3 Das Axiomensystem

Motiviert von den „Elementen“ des Euklid, wollen wir jetzt ein modernes Axiomensystem für die Ebene Geometrie aufstellen. Zum ersten Mal wurde das um 1900 von David Hilbert geleistet, nach wichtigen Vorarbeiten von Moritz Pasch.

Primitive Terme „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ und „Inzidenz“:

Wir benutzen einige Begriffe aus der elementaren Mengenlehre (Element- und Teilmengenbeziehung, leere Menge, endliche Durchschnitte und Vereinigungen, Differenzen). Man könnte – wie bei Hilbert – auch darauf noch verzichten und alles mit den Methoden der formalen Logik beschreiben, aber das würde die ganze Darstellung recht schwerfällig machen.

Die *Ebene* ist eine Menge $\mathcal{E}$, ihre Elemente heißen *Punkte*. Gewisse Teilmengen von $\mathcal{E}$ werden *Geraden* genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man, X *liegt auf* g, oder auch, g *enthält* X.

Bei Hilbert ist von einer Beziehung (der „Inzidenz“) zwischen den primitiven Termen die Rede, die in gewissen Fällen erfüllt ist. Näheres regeln die Axiome.

Für die Inzidenz zwischen Punkten, Geraden und der Ebene gilt:

Inzidenz-Axiome:

I-1) Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.

I-2) Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.

Axiom I-1 entspricht dem Postulat I von Euklid, wobei die Eindeutigkeit besonders hervorgehoben wird. Das Axiom I-2 hätte Euklid sicher für überflüssig gehalten.

Definition.

1. Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnet AB die dadurch eindeutig bestimmte Gerade.
2. Punkte $A, B, C, \ldots$, die auf einer Geraden liegen, heißen *kollinear*.

Offensichtlich ist $AB = BA$.

I-3) Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht kollinear sind.

Man nennt I-3 auch das „Dimensions-Axiom“. Eine Gerade enthält mindestens 2 verschiedene Punkte, eine Ebene mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und im Raum wird man die Existenz von 4 Punkten fordern, die nicht alle in einer Ebene liegen.

In Beweisen benötigt man oft eine Folgerung aus Axiom I-1:

Stimmen zwei Geraden in wenigstens zwei verschiedenen Punkten überein, so müssen sie gleich sein.

Daraus ergibt sich insbesondere:

3.1 Satz. *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Definition. Haben die Geraden g und h genau einen Punkt X gemeinsam, so sagt man, sie *schneiden sich in* X. Wenn sie gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man sie *parallel*.

Im Gegensatz dazu sind bei Euklid parallele Geraden immer verschieden.

3.2 Satz. *Es gibt mindestens drei paarweise verschiedene Geraden in $\mathcal{E}$.*

BEWEIS: Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind (Axiom I-3), so sind die drei Geraden AB, AC und BC paarweise verschieden. ∎

Ein Modell für die Inzidenz-Axiome kann schnell angegeben werden. Man nehme für $\mathcal{E}$ eine beliebige Menge mit 3 Elementen A, B, C. Die Geraden seien die 2-elementigen Teilmengen $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ und $\{B, C\}$. Dieses Modell, das wir mit $\mathcal{M}_1$ bezeichnen wollen, zeigt schon die Widerspruchsfreiheit der Inzidenz-Axiome.

Als Modell $\mathcal{M}_2$ bezeichnen wir die gewöhnliche Ebene der analytischen Geometrie:

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Geraden sind die Mengen

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = r\},$$

wobei a, b, r reelle Zahlen mit $(a, b) \neq (0, 0)$ sind. Die Theorie der linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zeigt, dass die Inzidenz-Axiome erfüllt sind.

Wenn wir als Ebene die Einheits-Sphäre

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

nehmen, und als Geraden die „Großkreise“, die sich als Schnitte von S^2 mit Ebenen durch den Nullpunkt ergeben, so sind die Inzidenz-Axiome nicht erfüllt! Es gehen z.B. durch Nord- und Südpol unendlich viele verschiedene „Längenkreise“. Man kann das Modell aber etwas modifizieren und bekommt dann ein echtes Modell $\mathcal{M}_3$:

Ein „projektiver Punkt“ soll eine 2-elementige Menge der Gestalt $\{\vec{x}, -\vec{x}\}$ sein, mit $\vec{x} \in S^2$. Wir verwenden dabei die Vektor-Schreibweise. Es wird also jeweils ein Punkt der Sphäre mit seinem Antipodenpunkt zusammengefasst. Als Ebene $\mathcal{E}$ nehmen wir die Menge aller projektiven Punkte. Da ein Großkreis mit jedem

Punkt der Sphäre auch den entsprechenden Antipodenpunkt enthält, kann man sagen: Eine Gerade in $\mathcal{E}$ ist die Menge aller projektiven Punkte $X = \{\vec{x}, -\vec{x}\}$, bei denen $\vec{x}$ einen Großkreis durchläuft. Nun kann man sich leicht davon überzeugen, dass die Inzidenz-Axiome für das Modell $\mathcal{M}_3$ erfüllt sind.

Primitiver Term „zwischen“:

Euklid benutzt immer wieder Annahmen über die Lage von Punkten, die er höchstens aus der Anschauung her rechtfertigen kann. Um die Anschauung ganz aus dem Axiomensystem verbannen zu können, müssen wir einen weiteren primitiven Term einführen:

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ besteht eine Beziehung $A - B - C$. Wir sagen dann: *B liegt zwischen A und C.*

Anordnungs-Axiome:

A-1) Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden und liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

A-2) Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.

A-3) Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei folgenden Beziehungen:

$$A - B - C \quad \text{oder} \quad B - C - A \quad \text{oder} \quad C - A - B.$$

Die Axiome A-1 bis A-3 sind die Formulierungen ganz simpler und anschaulicher Sachverhalte. Von Euklid wären sie sicher als überflüssig abgetan worden. Weiter unten folgen noch zwei etwas weniger triviale Anordnungsaxiome.

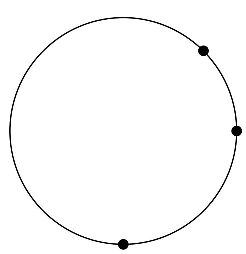
Im Modell $\mathcal{M}_1$ sind die Axiome A-1 bis A-3 gegenstandslos, weil nie mehr als 2 Punkte auf einer Geraden liegen. Im Modell $\mathcal{M}_2$ kann man jede Gerade parametrisieren:

$$t \mapsto \varphi(t) = \vec{x} + t\vec{v},$$

wobei t in $\mathbb{R}$ läuft. Setzt man nun

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_2) - \varphi(t_3) :\iff t_1 < t_2 < t_3 \text{ oder } t_1 > t_2 > t_3,$$

so sind $A - 1$ bis $A - 3$ sicher erfüllt. Die Widerspruchsfreiheit ist damit gesichert. Im Modell $\mathcal{M}_3$ haben die Geraden kreisförmige Gestalt:



Daher liegt von drei Punkten auf einer Geraden **jeder** zwischen den beiden anderen. Also sind in diesem Modell die Anordnungsaxiome zumindest für den üblichen „zwischen"-Begriff nicht erfüllt.

Definition. Seien $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$.

1. $\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\}$ heißt *Strecke mit den Endpunkten* A und B.
2. $\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - B - X\}$ heißt der *Strahl von* A *in Richtung* B.

3.3 Satz. *Sind* $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$, *so gilt:*

1. $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset AB$.
2. $\overline{AB} = \overline{BA}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ *und* $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = AB$.

BEWEIS: 1) und 2) sind trivial. Außerdem ist offensichtlich

$$\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset AB.$$

Sei nun $X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Wäre $X \notin \overline{AB}$, so müsste zugleich $A - B - X$ und $B - A - X$ gelten. Das ist aber nicht möglich.

Ist $X \in AB$, so ist entweder $X \in \overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, oder es muss $X - A - B$ oder $A - B - X$ gelten. In jedem Fall liegt X in $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. ∎

Es gibt noch zwei weitere Anordnungsaxiome:

A-4) Für alle $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.

A-5) Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und l eine Gerade, die A, B und C nicht enthält. Ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$, so ist

$$\overline{AC} \cap l \neq \varnothing \quad \text{oder} \quad \overline{BC} \cap l \neq \varnothing.$$

Das Axiom A-4 entspricht dem Postulat II von Euklid über die Verlängerbarkeit von Geraden über einen Punkt hinaus. Hier wird nur etwas genauer gesagt, was das bedeuten soll. Das Axiom A-5 bezeichnet man als **Pasch-Axiom**. Es schließt eine echte Lücke im Euklidischen Axiomensystem.

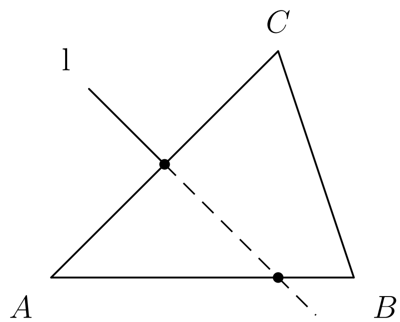
Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte, so heißt

$$\triangle ABC := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

das *Dreieck* mit den *Ecken* A, B und C und den *Seiten* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$. Oft schreibt man auch nur kurz ABC für das Dreieck.

Das Pasch-Axiom bedeutet anschaulich folgendes:

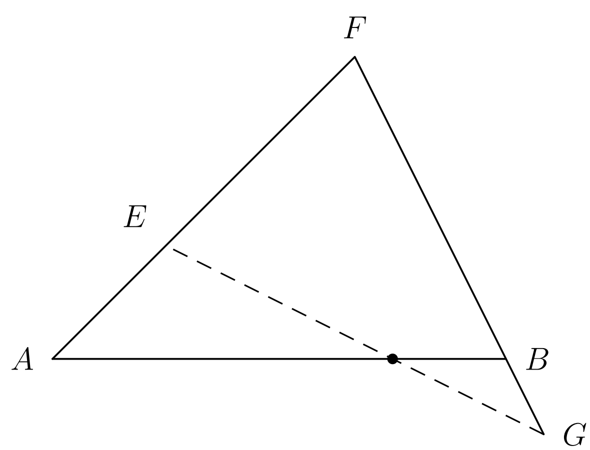
Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks trifft, aber keine der Ecken, so trifft die Gerade notwendigerweise noch eine andere Seite des Dreiecks.



3.4 Folgerung. *Für beliebige Punkte $A \neq B$ gibt es ein D mit $A - D - B$.*

Beweis: Sei $g = AB$ und E ein Punkt, der nicht auf g liegt (Axiom I-3).

Es gibt nach Axiom A-4 einen Punkt F mit $A - E - F$ und einen Punkt G mit $F - B - G$. Da $AE \cap g = \{A\}$ und $F \neq A$ ist, kann F nicht auf AB liegen und insbesondere nicht $= B$ sein.



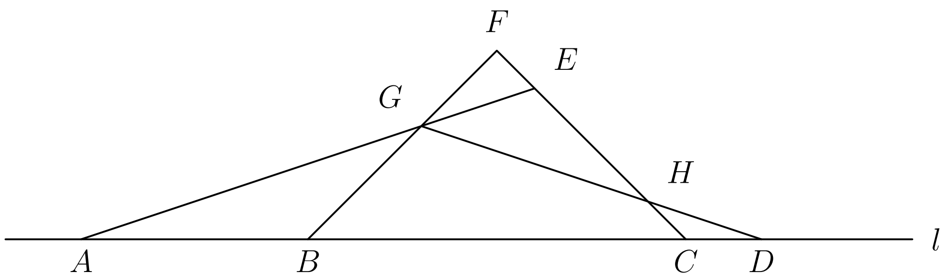
Wir wollen zeigen, dass EG einen Punkt zwischen A und B enthält. Zunächst trifft EG die Seite $\overline{AF}$ des Dreiecks ABF in E, aber nicht die Seite $\overline{BF}$, denn dann wäre $EG = FB$, also $E \in FG$ und damit auch $A \in FG$ und $FG = g$, was unmöglich ist.

Nach dem Axiom von Pasch trifft EG die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt D. Es ist $A - D - B$. ■

Ab hier Abweichung von der Vorlesung!

3.5 Hilfssatz. *Ist $A - B - C$ und $B - C - D$, so ist auch $A - B - D$ und $A - C - D$.*

Beweis: 1) Wähle E außerhalb der Geraden l, auf der A, B, C, D liegen, und wähle einen Punkt F mit $C - E - F$. Dann liegt auch F nicht auf l.



Im Dreieck ACE schneidet FB die Seite $\overline{AC}$ im Punkt B. Nach Pasch schneidet FB dann $\overline{AE}$ oder $\overline{EC}$.

Würde FB die Seite $\overline{EC}$ in einem Punkt F' treffen, so wäre $FB = EC$. Aber B und C bestimmen schon die Gerade l, und E liegt nicht auf l. Dieser Fall kann nicht eintreten.

Also gibt es einen Punkt $G \in FB$ mit $A - G - E$.

2) **Behauptung:** $B - G - F$.

Beweis dafür: Im Dreieck FBC schneidet $h := AE$ die Seite $\overline{FC}$ in E. Nach Pasch schneidet h dann $\overline{BF}$ oder $\overline{BC}$.

Würde h die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt X treffen, dann wäre $h = BC = l$, also $E \in l$. Das ist ein Widerspruch.

Also gibt es einen Punkt $Y \in h$ mit $B - Y - F$. Der Punkt Y liegt in $h = AE$ und in BF. Das gilt auch für G, also ist $Y = G$.

3) Im Dreieck BCF schneidet GD die Seite $\overline{BF}$ in G. Wie beim Beweis der Existenz von G folgt die Existenz eines Punktes $H \in GD$ mit $C - H - F$.

4) **Behauptung:** $G - H - D$.

Beweis dafür: Im Dreieck BDG trifft FC die Seite $\overline{BD}$ in C, muss also nach Pasch noch $\overline{BG}$ oder $\overline{DG}$ treffen. Ersteres ist nicht möglich (sonst lägen B, G, F und C auf einer Geraden, nämlich l, und das kann nicht sein). Also trifft FC die Seite $\overline{DG}$, und das kann nur im Punkt H passieren.

5) Im Dreieck ADG trifft FC die Seite $\overline{GD}$ im Punkt H. Also muss FC noch $\overline{AG}$ oder $\overline{AD}$ treffen. Da sich FC und AG in E treffen und $A - G - E$ gilt, muss $A - C - D$ gelten.

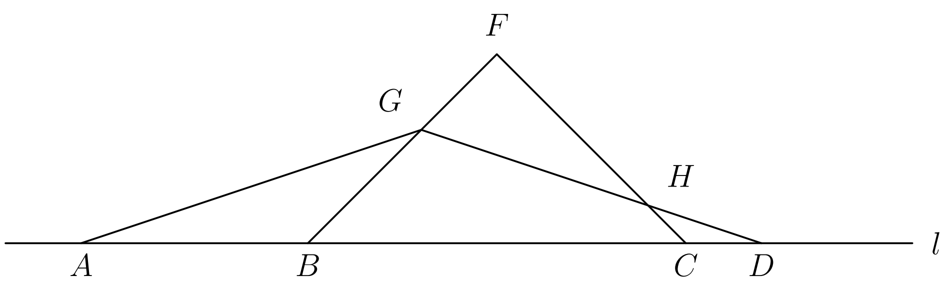
Wir haben also „$A - B - C$ und $B - C - D \implies A - C - D$“ gezeigt. Durch Vertauschen der Bezeichnungen erhält man: „$D - C - B$ und $C - B - A \implies D - B - A$“. Also gilt $A - B - D$. ∎

Nun folgt:

3.6 Satz (4er-Relationen).

Ist $A - B - C$ und $A - C - D$, so ist auch $B - C - D$ und $A - B - D$.

Beweis: Die zweite Aussage folgt mit dem Hilfssatz aus der ersten. Also brauchen wir nur $B - C - D$ zu zeigen.



Wähle einen Punkt G außerhalb l und einen Punkt F mit $B - G - F$. Die Gerade $g := CF$ trifft **nicht** $\overline{AB}$ (sonst wäre $l = g$) und **nicht** $\overline{BG}$ (wegen der Beziehung $B - G - F$). Also kann g im Dreieck ABG auch nicht $\overline{AG}$ treffen.

Im Dreieck ADG trifft g die Strecke $\overline{AD}$ im Punkt C (wegen $A - C - D$), und – wie gerade bewiesen – nicht $\overline{AG}$, nach Pasch also noch die Seite $\overline{DG}$ in einem Punkt H.

Im Dreieck BDG trifft g die Seite $\overline{DG}$ in H, nicht aber die Seite $\overline{BG}$ (denn es ist $B - G - F$). Also trifft g auch noch $\overline{BD}$, d.h., es gilt $B - C - D$. ■

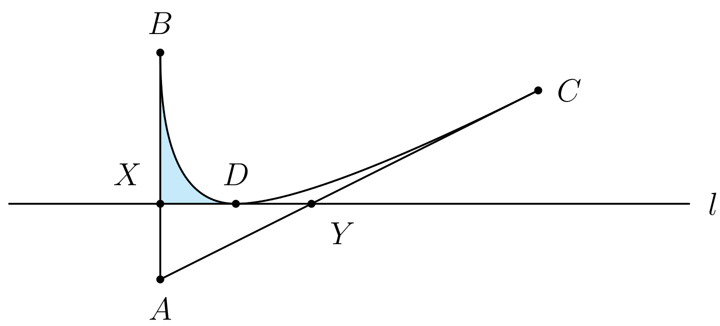
3.7 Satz von Pasch. *Sei l eine Gerade, A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf l liegen und $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

$$\textit{Entweder ist} \quad \overline{AC} \cap l = \varnothing \quad \textit{oder} \quad \overline{BC} \cap l = \varnothing.$$

Beweis:

1) A, B, C seien nicht kollinear. Dann bilden sie ein Dreieck, und l trifft die Seite $\overline{AB}$ (in einem Punkt X). Nach Pasch trifft l dann noch eine weitere Seite, etwa $\overline{AC}$ (in einem Punkt Y).

Annahme: l trifft zusätzlich $\overline{BC}$ in einem Punkt D.



Beh.1: $Y \notin \overline{XD}$.

Beweis dafür: Wenn $Y \in \overline{XD}$ ist, trifft $g := AC$ im Dreieck XBD die Seite $\overline{XD}$, muss nach Pasch also $\overline{XB}$ oder $\overline{DB}$ treffen.

a) Im ersten Fall folgt, dass g die Gerade AB in A und in einem weiteren Punkt $\neq A$ trifft (weil sonst $D - C - B$ und $C - D - B$ gleichzeitig gelten müsste). Aber dann ist $g = AB$, und A, B, C sind kollinear. Das ist ein Widerspruch.

b) Im zweiten Fall folgt, dass g die Gerade BC in C und in einem Punkt $\neq C$ trifft (weil sonst $D - C - B$ und $C - D - B$ gleichzeitig gelten müsste). Dann ist $g = BC$ und wieder erhält man einen Widerspruch.

Analog beweist man (durch zyklische Vertauschung von X, D, Y)

Beh.2: $X \notin \overline{YD}$ (man arbeite im Dreieck DYC)
und
Beh.3: $D \notin \overline{XY}$ (im Gegensatz zum Augenschein! Man arbeite im Dreieck AYX).

Das bedeutet, dass $X - Y - D$, $Y - X - D$ und $X - D - Y$ falsch sind. Das ist nur möglich, wenn X, D, Y nicht kollinear sind, im Widerspruch dazu, dass sie alle auf l liegen. Das bedeutet, dass l nicht $\overline{BC}$ treffen kann.

2) A, B, C seien kollinear. Nach Voraussetzung gibt es ein $X \in l$ mit $A - X - B$.

a) Gilt $A - B - C$, so folgt aus den 4-er-Relationen $X - B - C$ und $A - X - C$, also $\overline{AC} \cap l \neq \varnothing$ und $\overline{BC} \cap l = \varnothing$.

b) Gilt $C - A - B$, so folgt aus $B - X - A$ und $B - A - C$ mit den 4-er-Relationen $X - A - C$ und $B - X - C$, also $\overline{BC} \cap l \neq \varnothing$ und $\overline{AC} \cap l = \varnothing$.

c) Es gelte $A - C - B$ und $\overline{AC} \cap l \neq \varnothing$. Dann ist $A - X - C$ und daher $X - C - B$, also $\overline{BC} \cap l = \varnothing$.

Ist $\overline{BC} \cap l \neq \varnothing$, so ist $B - X - C$ und $B - C - A$, also $X - C - A$ und $\overline{AC} \cap l = \varnothing$.

■

Ab hier weitgehend wieder wie in der Vorlesung!

3.8 Folgerung. *Es sei g eine Gerade, und A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf g liegen.*

1. *Ist $\overline{AB} \cap g = \varnothing$ und $\overline{BC} \cap g = \varnothing$, so ist auch $\overline{AC} \cap g = \varnothing$.*

2. Ist $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$ und $\overline{BC} \cap g \neq \varnothing$, so ist $\overline{AC} \cap g = \varnothing$.

BEWEIS:

Klar wegen des Satzes von Pasch. ∎

Sei nun eine Gerade $g \subset \mathcal{E}$ festgehalten. Für Punkte $A, B \in \mathcal{E} \setminus g$ erklären wir eine Relation

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap g = \varnothing.$$

Wir sagen dafür auch: A und B liegen auf der gleichen Seite von g.

3.9 Satz. *„Auf der gleichen Seite von g liegen“ ist eine Äquivalenzrelation.*

BEWEIS: Offensichtlich ist $A \sim A$ (Reflexivität), und mit $A \sim B$ ist auch $B \sim A$ (Symmetrie).

Sei nun $A \sim B$ und $B \sim C$. Ist $A = B$ oder $B = C$, so ist offensichtlich auch $A \sim C$. Wir können uns also auf den Fall beschränken, dass A, B, C paarweise verschieden sind. Aber dann folgt aus dem vorigen Satz, dass $A \sim C$ ist. Also ist die Relation auch transitiv. ∎

Liegen A und B nicht auf der gleichen Seite von g, so sagen wir, sie *liegen auf verschiedenen Seiten von g*. Wir wollen nun zeigen, dass jede Gerade genau zwei Seiten hat.

Definition. Ist $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade und $A \in \mathcal{E} \setminus g$, so heißt

$$H(g, A) := \{X \in \mathcal{E} \setminus g \mid X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } g \text{ wie } A\}$$

die durch A bestimmte Seite von g.

$H(l, A)$ ist nichts anderes als die Äquivalenzklasse von A bezüglich der oben betrachteten Äquivalenzrelation. Damit ist schon einmal klar, dass $\mathcal{E} \setminus g$ in disjunkte derartige Klassen zerfällt.

3.10 Satz. *Jede Gerade hat genau zwei Seiten.*

BEWEIS: Sei g die gegebene Gerade.

Es gibt einen Punkt A, der nicht auf g liegt (Axiom I-3).
Es gibt einen Punkt $O \in g$ (Axiom I-1).
Es gibt einen Punkt B mit $A - O - B$ (Axiom A-4).
Dann ist $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$, also nicht $A \sim B$.
Demnach gibt es wenigstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

Seien A und B die Repräsentanten zweier verschiedener Äquivalenzklassen und C irgendein Punkt aus $\mathcal{E} \setminus l$. Ist $C = A$ oder $C = B$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $C \neq A$ und $C \neq B$. Wenn C nicht äquivalent zu A ist, dann ist $\overline{AC} \cap g \neq \varnothing$. Da außerdem $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$ ist, muss $\overline{BC} \cap g = \varnothing$ sein, nach Pasch. Also ist C äquivalent zu B. Damit gibt es nur die beiden durch A und B repräsentierten Klassen. ∎

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ heißt *konvex*, wenn gilt:

Für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \neq B$ ist $\overline{AB} \subset \mathcal{M}$.

3.11 Satz. *Die Mengen $H(l, A)$ sind konvex.*

Beweis: Sind $X, Y \in H(l, A)$, so ist $X \sim A$ und $Y \sim A$. Also ist auch $A \sim Y$ und dann $X \sim Y$. Das bedeutet, dass $\overline{XY} \subset \mathcal{E} \setminus l$ ist.

Sei $Z \in \overline{XY}$, $Z \neq X$ und $Z \neq Y$. Wir nehmen an, es gibt einen Punkt $R \in l$ mit $\overline{XZ} \cap l = \{R\}$. Dann ist $X - R - Z$ und $X - Z - Y$. Mit den 4er-Relationen folgt: $X - R - Y$. Aber das ist unmöglich. Also ist $X \sim Z$, und damit $A \sim Z$. Ganz $\overline{XY}$ liegt in $H(l, A)$. ∎

Zusammenfassend können wir sagen:

> *Eine Gerade teilt den Rest der Ebene in zwei disjunkte nicht-leere konvexe Teilmengen. Diese Teilmengen werden auch als Halbebenen bezeichnet.*

3.12 Satz. *Wenn der Punkt O zwischen den beiden Punkten A und B liegt, dann gilt:*

1. $AB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.
2. $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \{O\}$.

Beweis: Sei $l := AB$ und $Z \notin l$ ein Punkt, sowie $g := OZ$. Dann ist $\overline{AB} \cap g = \{O\}$. Also liegen A und B auf verschiedenen Seiten von g.

1) Sei $P \in l$. Ist $P \in \overrightarrow{OA}$, so ist nichts weiter zu zeigen. Sei also $P \notin \overrightarrow{OA}$. Dann muss $A - O - P$ gelten. Das heißt, dass A und P auf verschiedenen Seiten von g liegen, also P und B auf der gleichen Seite. Damit muss $B = P$ oder $O - B - P$ oder $O - P - B$ gelten. In jedem dieser Fälle liegt aber P in $\overrightarrow{OB}$.

2) Sei $P \in \overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB}$. Dann muss $P = O$ sein, oder P liegt zugleich auf beiden Seiten von g, aber das ist unmöglich. ∎

Ein Punkt O auf einer Geraden l teilt also den Rest der Geraden in zwei disjunkte Halbgeraden. Man kann dann sagen, wann zwei Punkte von l auf der gleichen Seite oder auf zwei verschiedenen Seiten von O liegen.

3.13 Satz. *Sind $O \neq A$ zwei Punkte, so gilt für jeden Punkt $X \in \overrightarrow{OA}$:*

$$X = O \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}.$$

Beweis: Ist $X \neq O$ und $X \neq A$, so ist $O - X - A$ oder $O - A - X$.

Sei $Y \in \overrightarrow{OX}$. Wir wollen zeigen, dass Y dann auch in $\overrightarrow{OA}$ liegt. Für $Y = O$ oder $Y = X$ ist das klar. Ist $O - Y - X$ oder $O - X - Y$, so liegen Y und X auf der gleichen Seite von O, und das ist die Seite, auf der auch A liegt. Also gehört Y zu $\overrightarrow{OA}$.

Analog zeigt man, dass auch $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{OX}$ ist. ∎

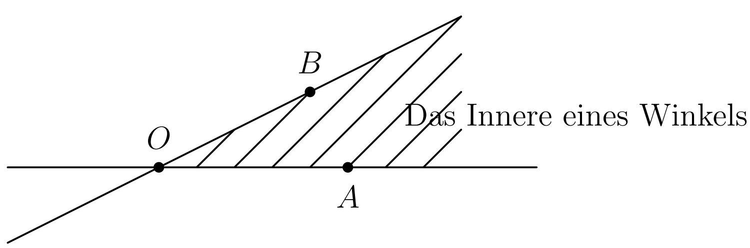
Wir sind nun in der Lage, Winkel und Dreiecke zu definieren.

Definition. Es seien O, A, B drei nicht-kollineare Punkte. Unter dem *Winkel* $\angle AOB$ versteht man die Vereinigung der Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$.

Der Punkt O heißt *Scheitel* des Winkels, die beiden Strahlen heißen die *Schenkel* des Winkels.

Es kommt beim Winkel nicht auf die Reihenfolge der Schenkel an, und statt der Punkte A und B kann man auch beliebige andere Punkte auf den Schenkeln zur Beschreibung heranziehen.

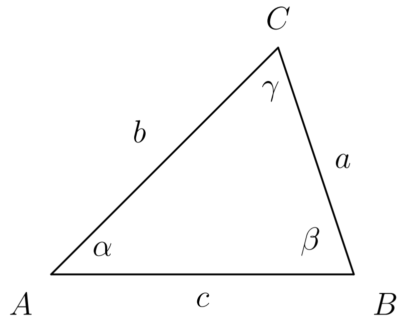
Definition. Sei $\alpha = \angle AOB$. Dann nennt man $I(\alpha) := H(OA, B) \cap H(OB, A)$ *das Innere des Winkels* α. Die Menge $A(\alpha)$ aller Punkte, die weder auf α noch in $I(\alpha)$ liegen, bezeichnet man als *das Äußere des Winkels.*



Das Innere eines Winkels ist immer eine echte nicht-leere konvexe Teilmenge einer Halbebene. Anschaulich bedeutet das, dass wir nur Winkel α mit $0° < \alpha < 180°$ betrachten. Das Äußere eines Winkels ist niemals konvex.

Definition. A, B, C seien drei nicht-kollineare Punkte. Unter den *Winkeln des Dreiecks* ABC versteht man die *Winkel* $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle ACB$.

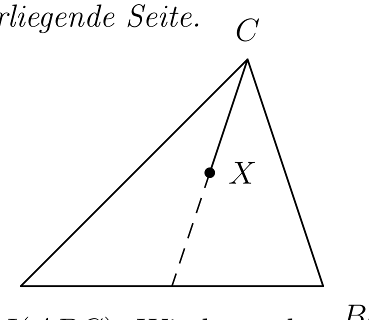
Die Menge $I(ABC) := I(\alpha) \cap I(\beta) \cap I(\gamma)$ nennt man *das Innere des Dreiecks.* Die Menge $A(ABC)$ aller Punkte, die nicht auf dem Dreieck und nicht im Inneren liegen, bezeichnet man als *das Äußere des Dreiecks.*



Das Innere eines Dreiecks ist konvex, das Äußere nicht.

Jede Ecke eines Dreiecks gehört gleichzeitig zu zwei Seiten. Die dritte Seite, die die Ecke nicht enthält, nennt man auch *die der Ecke gegenüberliegende Seite.*

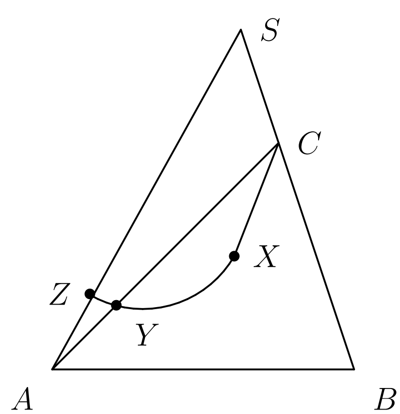
3.14 Folgerung. *Eine Gerade, die durch eine Ecke und einen inneren Punkt eines Dreiecks geht, schneidet die der Ecke gegenüberliegende Seite.*



Beweis:

Gegeben sei das Dreieck ABC und ein Punkt $X \in I(ABC)$. Wir betrachten die Gerade $l = CX$. Würde l zwei Ecken des Dreiecks ABC enthalten, so könnte X nicht im Innern des Dreiecks liegen. Also befinden sich die Punkte A und B nicht auf l.

Nach Axiom A-4 gibt es ein S mit $B - C - S$. Dann liegen B und S auf verschiedenen Seiten von AC. Außerdem liegt S auf der Geraden BC und damit nicht im Innern des Dreiecks.



Es ist nun ein neues Dreieck entstanden, nämlich ABS. Da $BS \cap l = \{C\}$ ist, trifft l die Seite $\overline{BS}$ des neuen Dreiecks, aber keine der Ecken. Nach Pasch muss l dann noch eine andere Seite treffen. Ist dies die Seite $\overline{AB}$, so sind wir fertig. Also nehmen wir an:

$$l \cap \overline{AB} = \varnothing \quad \text{und} \quad l \cap \overline{AS} \neq \varnothing.$$

Es gibt dann ein Z mit

$$A - Z - S \text{ und } Z \in l.$$

Da $SA \neq CA$ ist, treffen sich SA und CA nur im Punkte A. Wegen $S - Z - A$ liegen S und Z auf der gleichen Seite von AC und damit Z im Äußeren von ABC.

Weil nun Z und X auf verschiedenen Seiten von AC liegen, gibt es ein $Y \in AC$ mit $Z - Y - X$ (und damit $\overline{ZX} \cap AC = \{Y\}$).

Mit Z und X liegt auch Y auf l.

Weil X im Innern von ABC liegt, sind X und A auf der gleichen Seite von $BC = BS$. Aus der Beziehung $A - Z - S$ folgt, dass auch A und Z auf der gleichen Seite von BS liegen. Also sind schließlich auch X und Z auf der gleichen Seite von BS. Insbesondere ist $Y \neq C$. Also ist $AC = YC = l$. Das kann aber nicht sein! Die Annahme war demnach falsch. ■

Wir wollen nun das Pasch-Axiom und die Folgerungen daraus benutzen, um die Lage eines Punktes relativ zu einem Winkel untersuchen:

3.15 Satz. *Sei $\alpha = \angle BAC$ und $P \in BC$. Dann gilt:*

$$P \in I(\alpha) \iff B - P - C.$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist $P \neq A$, und P, B, C liegen auf einer Geraden. Es ist $P \in I(\alpha) \iff P \in H(AB, C) \cap H(AC, B)$. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn gilt: $P \neq B$ und **nicht** $P - B - C$, sowie $P \neq C$ und **nicht** $P - C - B$.

Damit ist alles gezeigt. ■

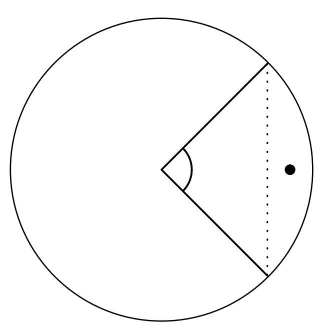
Man beachte aber: Ist $P \in I(\alpha)$, so braucht es keine Punkte $B' \in \overrightarrow{AB}$ und $C' \in \overrightarrow{AC}$ zu geben, so dass $P \in \overline{B'C'}$ liegt.

Um das zu belegen, konstruieren wir ein weiteres Modell: Im Modell $\mathcal{M}_8$ benutzen wir als Ebene die Menge

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

also das Innere des Einheitskreises. Und als Geraden nehmen wir einfach diejenigen Abschnitte von gewöhnlichen Geraden im $\mathbb{R}^2$, die innerhalb von $\mathcal{D}$ liegen. Dann ist sofort klar, dass die Inzidenz-Axiome gelten, und man sieht leicht, dass auch die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

Es gibt jedoch bei diesem Modell Punkte im Innern eines Winkels, die nicht auf einer Sehne liegen:



Mit einem Punkt gehört auch immer gleich ein ganzer Strahl zum Inneren eines Winkels:

3.16 Satz. *Sei $\alpha = \angle BAC$, P ein Punkt, der nicht auf α liegt.*

Liegt P im Inneren (bzw. Äußeren) von α, so auch alle Punkte $X \neq A$ auf $\overrightarrow{AP}$.

BEWEIS: Liegt P in $I(\alpha)$, so liegt P nicht auf den Geraden AB und AC. Also ist $AP \cap AB = \{A\}$ und $AP \cap AC = \{A\}$.

Für $X \in \overrightarrow{AP}$ und $X \neq A$, $X \neq P$ muss gelten: $A - X - P$ oder $A - P - X$. Das bedeutet aber, dass $X \in H(AB, C) \cap H(AC, B) = I(\alpha)$ ist.

Da $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AX}$ ist, folgt durch Widerspruch genauso: Mit P liegt auch X im Äußeren von α. ∎

3.17 Folgerung. *Sei $\alpha = \angle BAC$ und $P \in I(\alpha)$. Dann liegen B und C auf verschiedenen Seiten von AP.*

BEWEIS: AP geht durch die Ecke A des Dreiecks ABC, aber nicht durch B oder C.

a) Ist $P \in H(BC, A)$, also in $I(ABC)$, so muss AP nach Pasch die Seite $\overline{BC}$ treffen und alles ist gezeigt.

b) Ist sogar $P \in \overline{BC}$, so ist ebenfalls alles klar.

c) Sind A und P auf verschiedenen Seiten von BC, so gibt es einen Punkt $X \in \overline{AP} \cap BC$. Dann gehört X zu $\overrightarrow{AP}$, und nach dem vorigen Satz liegt X auch in $I(\alpha)$. Daher muss $B - X - C$ gelten. ∎