Euklidische Geometrie

1 Die deduktive Methode

Thales von Milet, ca. 624 – 548 v. Chr., führte erstmals abstrakte Überlegungen in die Mathematik und speziell in die Geometrie ein, bewies vermutlich:

- Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
- Zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bestimmen ein Dreieck.
- Ein Winkel, der einem Halbkreis einbeschrieben ist, ist ein Rechter.

Pythagoras von Samos, ca. 570 – 495 v.Chr., ging um 529 nach Sizilien und schließlich nach Kroton in Süditalien, gründete dort die Gesellschaft der „Pythagoräer". entwickelte die „deduktive Methode" von Thales weiter.

Problem der *kommensurablen Größen*, Widerspruch zur Geometrie (Satz des Pythagoras), logischer Skandal.

Das Rechnen mit Verhältnissen irrationaler Zahlen entwickelt
Eudoxus von Cnidus, ca. 400 – 347 v.Chr., in seiner „Proportionenlehre".

Hippokrates von Chios (nicht der Mediziner!) lebte um 430 v.Chr. Er entdeckte als einer der ersten, dass die Kreisfläche proportional zum Quadrat des Durchmessers ist, und schrieb eines der ersten mathematischen Lehrbücher mit dem Titel „Elemente".

Während die pythagoräische Schule an Bedeutung verlor, entwickelte sich in Athen ein neues Zentrum griechischer Wissenschaft, die berühmte *Akademie* des
Platon, ca. 429 – 348 v.Chr. Da *Kreis* und *Gerade* als elementarste und zugleich vollkommenste geometrische Formen betrachtet wurden, ließ man nur noch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu. Vergeblich bemühte man sich um die Lösung der drei klassischen Probleme:

- Quadratur des Kreises
- Dreiteilung des Winkels
- Würfelverdopplung (sog. „Delisches Problem")

Alle diese drei Probleme sind mit Zirkel und Lineal unlösbar, aber der Beweis dafür konnte erst in der Moderne erbracht werden.

Nach dem Tode Alexanders des Großen (323 v.Chr.) wurde einer seiner führenden Generale, Ptolemaeus, Gouverneur von Ägypten, und später König. Hauptstadt wurde Alexandria, eine Handelsmetropole mit zeitweise einer Million Einwohner, für fast 1000 Jahre Mittelpunkt hellenistischer Kultur.

Um 300 v.Chr. wurde eine Universität gebaut, das sogenannte „Museion“. Einer der ersten Wissenschaftler in Alexandria war **Euklid**, über seine Person ist so gut wie nichts bekannt. Seine „Elemente“ wurden das einflussreichste Lehrbuch in der Geschichte der Zivilisation, die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie. Sie sind in über 1700 Ausgaben erschienen und stellen nach der Bibel das verbreitetste Buch der Erde dar.

Fast alle bekannten Versionen stammten von einer redigierten Ausgabe von **Theon von Alexandria** (um 370 *nach* Chr.) ab. Ungefähr 400 Jahre nach Theon wurde eine Kopie (oder die Kopie einer Kopie ...) ins Arabische übersetzt. Über Sizilien und Spanien kam das arabische Wissen später wieder nach Europa. Um 1120 wurde eine Kopie der arabischen Version von dem englischen Philosophen und Mönch **Adelard of Bath** ins Lateinische übersetzt. 150 Jahre später gab der italienische Wissenschaftler **Johannes Campanus** eine neue Übersetzung heraus, die andere arabische Quellen benutzte und etwas klarer und vollständiger war. Diese Version war auch Grundlage für die erste 1482 in Venedig erschienene gedruckte Auflage. 1808 entdeckte der Bibliothekar Francois Peyrard in der vatikanischen Bibliothek eine vollständige Handschrift, die auf ältere und bessere Unterlagen als die von Theon zurückging. Der dänische Philologe **Johan Ludvig Heiberg** benutzte nun die vorhandenen Versionen, um eine möglichst originalgetreue griechische Version von Euklids „Elementen“ zu rekonstruieren. Sie wurde zwischen 1883 und 1888 veröffentlicht und bildete die Basis für alle späteren Übersetzungen, z.B. die von **Sir Thomas L. Heath** ins Englische (1908).

Weiterentwicklung der griechischen Mathematik nach Euklid:

Eratosthenes, ca. 276 – 194 v.Chr., bekannt wegen seiner relativ genauen Ermittlung des Erdumfanges, aber z.B. auch durch seine Siebmethode zur Bestimmung von Primzahlen.

Archimedes, ca. 285 – 212 v.Chr., der größte Mathematiker der Antike, zu vergleichen mit Gauss und Newton, entwickelte u.a. gewisse Vorstufen zur Integralrechnung.

Apollonius von Perge, ca. 260 – 200 v.Chr., mit umfangreichen Untersuchungen über Kegelschnitte.

Deduktive Methode: Der Beweis einer Aussage (A1) wird auf eine offensichtlichere Aussage (A2) zurückgeführt. Dann wird nach einer noch unbedenklicheren Aussage (A3) gesucht, aus der (A2) folgt, usw.

Irgendwann müssen wir bei Aussagen ankommen, die jeder als wahr akzeptiert. Das sind die Spielregeln, in der Mathematik nennt man sie **Axiome** oder **Postulate**.

Dabei müssen immer wieder Begriffe erklärt werden, das ist der Sinn der **Definitionen**. Aber in den Definitionen muss man wieder Wörter benutzen, und die müssen wieder definiert werden usw. Also müssen wir akzeptieren, dass gewisse

Begriffe nicht definiert werden können. Solche Begriffe nennt man **undefinierte Begriffe** oder **primitive Terme**. „Punkt" und „Gerade" sind z.B. solche primitiven Terme für die Geometrie. Die Aufgabe der Axiome ist es unter anderem, die Eigenschaften der primitiven Terme festzulegen.

Ein sogenanntes „materielles" oder „klassisches" axiomatisches System sieht nun folgendermaßen aus:

1. Festlegung der Grundbegriffe (der *primitiven Terme*).

2. Angabe einer Liste grundlegender Aussagen (der *Axiome*) über die primitiven Terme. Die Axiome sollten möglichst einfach gehalten werden, und über ihre Wahrheit sollte allgemeine Einigkeit herrschen.

3. Alle anderen benötigten Begriffe werden mit Hilfe der primitiven Terme und der Axiome erklärt (*Definitionen*).

4. Alle weiteren Aussagen (*Theoreme*, *Propositionen* usw.) werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet.

(umgangssprachliches) **Beispiel:**

Das Kollegium der mathematischen Fakultät von Syldavien ist nicht leer, aber recht klein. Deshalb muss sich jeder Professor an den Aufgaben der akademischen Selbstverwaltung beteiligen. Diese Aufgaben werden von Kommissionen erledigt, die einen oder mehrere Professoren als Mitglieder haben, und darüber gibt es folgende Vorschriften:

Axiom I: Jeder Professor ist Mitglied einer Kommission.

Axiom II: Zwei verschiedene Professoren sind Mitglieder genau einer (gemeinsamen) Kommission.

Definition: Zwei Kommissionen heißen *konkurrierend*, falls sie kein gemeinsames Mitglied besitzen.

Axiom III: Zu jeder Kommission gibt es genau eine konkurrierende Kommission.

Die primitiven Terme sind „Kommission", „Professor" und „ist Mitglied von".

Außerdem werden Zahlwörter, logische Begriffe und alle diejenigen Wörter, die nötig sind, um aus den primitiven Termen vernünftige deutsche Sätze zu bilden, als bekannt vorausgesetzt und in der üblichen Bedeutung benutzt.

Nun kann man Sätze beweisen.

Satz 1: Jeder Professor ist Mitglied von mindestens zwei Kommissionen

Satz 2: Jede Kommission hat mindestens 2 Professoren als Mitglieder.

Satz 3: Es gibt mindestens 6 Kommissionen.

Satz 4: Jede Kommission hat genau 2 Mitglieder. Insgesamt gibt es genau 4 Professoren und 6 Kommissionen.

Ein Axiomensystem braucht nicht „materiell“ zu sein. Es kann sinnvoll sein, ohne dass die primitiven Terme mit ihren axiomatisch festgelegten Eigenschaften irgendwelchen Dingen in der Wirklichkeit entsprechen. **David Hilbert** (Grundlagen der Geometrie, 1899):

> *Man muss jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Bänke, Bierseidel“ sagen können.*

Eigenschaften eines modernen Axiomensystems:

A) **Widerspruchsfreiheit**

Beweis durch Konstruktion eines Modells (z.B. Ecken und Kanten eines Tetraeders für das Professoren–und–Kommissionen–System, die kartesische Koordinaten-Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Modell für die ebene euklidische Geometrie).

Allerdings kann man die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems nicht beweisen, ohne die eines etwas primitiveren Systems als gegeben hinzunehmen (Kurt Gödel).

B) **Unabhängigkeit**

Kein Axiom soll aus den anderen hergeleitet werden können. Um zu zeigen, dass Axiom A von einem System S von Axiomen unabhängig ist, muss man ein Modell konstruieren, in dem alle Axiome von S gelten, nicht aber A.

Beispiel: Die Axiome I und II für Professoren und Kommissionen sind genauso für Punkte und Geraden der Ebene erfüllt. Also ist die euklidische Ebene ein passendes Modell. Allerdings ist Axiom III dort nicht erfüllt. Das zeigt die Unabhängigkeit von III.

C) **Vollständigkeit**

Ein System ist vollständig, wenn man kein unabhängiges Axiom hinzufügen kann (das nur die schon bekannten Terme benutzt), ohne Widersprüche zu erzeugen. Die Vollständigkeit eines Systems ist i.a. sehr schwer nachzuweisen.

D) **Kategorizität**

Ein Axiomensystem heißt *kategorisch*, wenn es widerspruchsfrei ist, und wenn je zwei Modelle „isomorph“ sind.

Die Axiome der Gruppentheorie sind nicht kategorisch, denn es gibt endliche und unendliche Gruppen. Das Beispiel mit den Professoren und Kommissionen ist kategorisch. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie nach

Hilbert ist kategorisch, das von Euklid aber nicht. Lässt man das Parallelen-Axiom weg, ist auch das Hilbert'sche System nicht mehr kategorisch. Das ist das Thema dieser Vorlesung.

Mögliche Schritte eines Beweises:

1. Nach Hypothese gilt ...,
2. Nach einem Axiom gilt ...,
3. Nach Definition gilt ...,
4. Nach einem vorangegangenen Schritt des Beweises gilt ...,
5. Nach einem früher bewiesenen Satz gilt ...,
6. Nach einer logischen Regel folgt ...,
7. Nach Annahme der verneinten Folgerung gilt ....

Beim letzten Schritt handelt es sich um die Einleitung eines Widerspruchsbeweises („reductio ad absurdum", kurz RAA). Um eine Implikation $A \implies B$ zu beweisen, zeigt man eine Implikation $A \wedge (\neg B) \implies C$, mit einer offensichtlich falschen Aussage C. Dies ist die stärkste Waffe, die dem Mathematiker zur Verfügung steht.

Beispiel von Euklid (7. Buch):

- Eine *Zahl* ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Größe.

  (Die Eins galt bei den Griechen nicht als Zahl, aber man konnte eine Strecke als Einheit festlegen. Eine „Zahl" im obigen Sinne ist dann eine Strecke, die ganzzahliges Vielfaches der Einheitsstrecke ist).

- Eine *Primzahl* ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt.

  (Eine Primzahl ist also eine Zahl, die außer der 1 keine echten Teiler besitzt).

  Proposition 20: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*

(Wir sagen heute: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* Aber die Griechen haben den Begriff „Unendlich" in der Mathematik nicht zugelassen, weder im Großen, noch im Kleinen. Also musste Euklid eine Formulierung finden, die den Gebrauch von „Unendlich" umgeht.)

Es seien Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ vorgelegt und der Größe nach sortiert, $q := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ und $x := q+1$. Ist x eine Primzahl, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist x keine Primzahl, so besitzt x wenigstens einen Primteiler y.

Annahme: y ist eine der vorgelegten Primzahlen. Dann teilt y die Zahl q und die Zahl x, also auch die Differenz $x - q = 1$. Aber das ist absurd! ∎

2 Die „Elemente“ des Euklid

Der Inhalt der 13 Bücher der „Elemente“:

I) Anfänge der ebenen Geometrie bis zum Lehrsatz des Pythagoras.

II) Polygone, geometrische Algebra (z.B. binomische Formel).

III) Kreislehre, aber ohne Inhalt und Umfang (erst von Archimedes gefunden).

IV) Reguläre Polygone.

V) Proportionenlehre nach Eudoxus (in Definition 4: „Axiom des Archimedes“).

VI) Ähnlichkeitslehre, Flächen, Anfänge der Theorie der Kegelschnitte (vollendet von Apollonius).

VII) Zahlentheorie (Primzahlen, ggT und kgV, „Euklidischer Algorithmus“ u.a.).

VIII) und

IX) Potenzen und Wurzeln, Primfaktorzerlegung, endliche geometrische Reihen.

X) Rechnen mit irrationalen Zahlen.

XI) Anfänge der Stereometrie.

XII) Rauminhalte, Exhaustions-Methode.

XIII) Die 5 regulären Polyeder, Kantenberechnungen, Beweis dafür, dass es keine weiteren gibt.

Die „Elemente“ haben kein Vorwort, keine Einführung, keine Motivation, keinen Kommentar und keine Erklärungen. Sie beginnen im 1. Buch mit 23 „Definitionen“, 5 „Postulaten“ und einigen „Axiomen“. Danach folgen unmittelbar die Sätze. In den weiteren Büchern gibt es noch allerlei Definitionen, aber keine Postulate oder Axiome mehr.

Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.

   Wahrscheinlich Versuch, einen undefinierbaren Begriff einzuführen. Zusammenhang zur Grundlagen-Krise um die nicht kommensurablen Größen?

2. Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.

   Für den Aufbau einer axiomatischen Theorie ziemlich wertlos.

3. Die Enden einer Linie sind Punkte.

   Es gibt bei Euklid keine unendlich weit ausgedehnten Linien.

4. Eine Linie ist **gerade**, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.

   Hier wird der primitive Term „Gerade“ eingeführt, der bei Euklid mit dem Begriff „Strecke“ zusammenfällt. Die Erklärung ist schwer zu interpretieren.

5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.

6. Die Enden einer Fläche sind Linien.

7. Eine Fläche ist **eben**, wenn sie zu den geraden Linien auf ihr auf einerlei Art gelegen ist.

   Einführung der „Ebene“ als primitiver Term.

8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.

   Auf den ersten Blick wird hier der Begriff „Winkel“ als primitiver Term festgelegt, in Wirklichkeit haben wir hier die erste echte Definition. Es ist weder ein Winkel von 0° noch ein Winkel von 180° zugelassen. Von den beiden Winkeln, die zwischen den Strecken gebildet werden, soll stets der kleinere genommen werden.

   Es fällt auf, dass durch die Reihenfolge der Euklid’schen Definitionen eine Trennung zwischen der Einführung primitiver Terme und den echten Definitionen stattfindet.

9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.

10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**; und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.

    Hier wird erklärt, wie man an einer beliebigen Stelle der Ebene einen rechten Winkel erzeugt.

11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.

    Diese Definition wird erst dann sinnvoll, wenn geklärt ist, wie man Winkel miteinander vergleicht.

12. **Spitz** ist ein Winkel, wenn er kleiner als ein Rechter ist.

15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind.

    Diese Definition enthält zahlreiche Annahmen, die weder durch Festlegung primitiver Terme, noch durch Axiome oder Sätze gesichert sind. Insbesondere wird benutzt, dass ein Kreis die Ebene in einen inneren und einen äußeren Bereich unterteilt, und dass Strecken vom Inneren zum Äußeren die Kreislinie treffen.

16. Der in Definition 15 genannte Punkt heißt **Mittelpunkt** des Kreises.

17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von der Kreislinie begrenzte Strecke;
    eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

    Wieder werden unbewiesene Annahmen gemacht, und der etwas vage formulierte Zusatz hat die Form eines Axioms oder Satzes. Er wird hier zur Definition des „Halbkreises“ benötigt (Def. 18).

19. - 22. definiert verschiedene Figuren, insbesondere Dreiecke (auch gleichschenklige, gleichseitige, rechtwinklige, spitz- und stumpfwinklige Dreiecke), sowie Rechtecke, Quadrate und andere Vierecke.

    Unter einem Dreieck versteht Euklid die Fläche des Dreiecks, zusammen mit den begrenzenden Strecken. Er argumentiert dann später in seinen Beweisen auch häufig mit der Fläche. Gemeint ist die Fläche mit all ihren unter Deck-Abbildungen invarianten Eigenschaften, insbesondere auch mit dem Flächeninhalt, ohne dass für letzteren eine saubere Erklärung gegeben wird.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten unbeschränkt verlängert, auf keiner einander treffen.

    Diese Definition ist erstaunlich klar formuliert. In der deutschen Ausgabe von Clemens Thaer heißt es „ins Unendliche verlängert“ (ein Übersetzungsfehler).

Die grundlegenden Axiome bei Euklid sind die

Postulate:

Gefordert soll sein:

I. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;

II. Dass man eine berenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann;

III. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.

IV. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind;

V. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, sich dann die zwei geraden Linien bei beliebiger Verlängerung auf der Seite treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

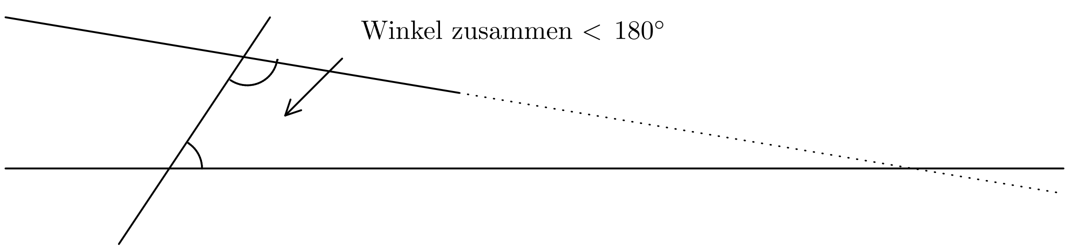
Postulat I führt die Möglichkeit ein, mit einem unmarkierten Lineal die Strecke zwischen zwei Punkten zu zeichnen. Die Definition der geraden Linie und der konstruktive Aspekt des ersten Postulats legen die Vermutung nahe, dass die **eindeutige** Existenz der Verbindungsstrecke gemeint war.

Da Strecken begrenzte Figuren sind, wird in Postulat II die Verlängerbarkeit einer Strecke über einen Endpunkt hinaus gefordert.

Postulat III führt den Zirkel ein. Zum Zeichnen eines Kreises muss ein Punkt P und eine bei P angelegte Strecke PQ als Radius gegeben sein. Der Zirkel kann nicht benutzt werden, um Strecken zu übertragen.

Postulat IV überrascht, weil hier einmal ausdrücklich die Eindeutigkeit gefordert wird. Der rechte Winkel kann somit als Eichmaß für Winkel genutzt werden. Die Existenz rechter Winkel wird später in einem Satz bewiesen, es ist aber schon an früherer Stelle erforderlich, rechte Winkel konstruieren bzw. als solche erkennen zu können. Dazu braucht man Postulat IV.

Die Aufstellung von Postulat V gilt als große Leistung Euklids. Anschaulich stellt sich die Situation folgendermaßen dar:



Es fällt auf, dass die Formulierung viel komplizierter als bei den anderen Axiomen ist, und der Sachverhalt ist auch nicht unmittelbar einleuchtend, denn der geforderte Schnittpunkt kann so weit entfernt sein, dass man ihn nicht beobachten kann. Insofern entspricht Postulat V nicht den Vorstellungen, die man im Altertum von Axiomen hatte.

Von Anfang an gab es daher Zweifel, ob es sich wirklich um ein Axiom handelte, oder ob nicht vielmehr Euklid es nur nicht geschafft habe, die Aussage zu beweisen. Für diese Theorie sprach unter anderem, dass Euklid selbst gezögert hat, das

Postulat anzuwenden. Er benutzt es zum ersten Mal in Proposition 29 und beweist vorher etliche Sätze mit großer Mühe, die mit Hilfe von Postulat V fast trivial wären. Ein weiteres Indiz für die Beweisbarkeit scheint die Tatsache zu sein, dass die Umkehrung ein Satz ist:

> Proposition 17: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.*

Das kann man auch so formulieren:

> *Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten getroffen werden, so bildet die schneidende mit den beiden anderen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*

Warum wird Postulat V das „Parallelenpostulat“ genannt? Die Existenz einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt wird in Proposition 31 bewiesen, aber ohne Postulat V. In Proposition 32 wird u.a. gezeigt, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechten entspricht. Das geht nur mit der Information, dass Wechselwinkel an Parallelen gleich sind. Und das wiederum wird in Proposition 29 bewiesen. Die Annahme, dass diese Aussage falsch ist, führt nämlich zu einem Widerspruch zum Parallelenaxiom. Und nun ist der Weg frei für eine Behandlung der Geometrie in der Weise, wie man es von der Schule her kennt.

Eine Sammlung von logischen Regeln und besonders offensichtlichen Annahmen bilden die

Axiome:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Was einander deckt, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.
6. Zwei Strecken umfassen keine Fläche.

Die ersten drei Aussagen kann man leicht in Formeln schreiben:

$$\begin{aligned} a = c \quad &\wedge \quad b = c \quad \Longrightarrow \quad a = b \\ a = b \quad &\wedge \quad c = d \quad \Longrightarrow \quad a + c = b + d \\ a = b \quad &\wedge \quad c = d \quad \Longrightarrow \quad a - c = b - d. \end{aligned}$$

Dabei sind mit a, b, c, d stets „Größen“ gleicher Art gemeint, wie etwa Strecken, Flächen oder Körper. Natürlich fehlen viele Relationen ähnlicher Art, die dann später benutzt werden. Es ist möglich, dass es im Original tatsächlich mehr waren.

Gleichheit bedeutet bei Euklid Deckungsgleichheit. Damit tritt ein neuer besonders problematischer undefinierter Begriff auf, mit dem Euklid dann auch erhebliche Schwierigkeiten hatte. Er versuchte, ihn zu vermeiden, wo es ging. Beim Beweis der „Kongruenzsätze“ war das aber nicht möglich.

Aussage 5. beschreibt, wie Größen verglichen werden müssen. Man versucht, sie zur Deckung zu bringen, und wenn es sich dann zeigt, dass die eine Größe in der anderen enthalten ist, dann gilt sie als die kleinere. Alles wird über geometrische Konstruktionen abgewickelt.

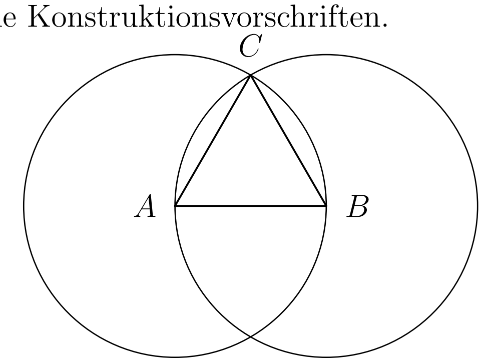
Die 6. Aussage gehört nicht in allen Quellen zu den Axiomen, aber sie wird später in einem Beweis benötigt.

Nun folgen die

Sätze

Proposition 1. *Über einer gegebenen Strecke kann ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.*

Beweis: Die Formulierung ist etwas eigenartig. Aber viele der euklidischen Sätze sind rein algorithmische Konstruktionsvorschriften.



1. AB sei die gegebene Strecke.
2. Schlage Kreis um A mit Radius AB.
3. Schlage Kreis um B mit Radius AB.
4. Sei C ein Punkt, wo sich die Kreise treffen.
5. Verbinde C mit A zur Strecke AC.
6. Verbinde C mit B zur Strecke BC.
7. Es ist $AC = AB$ (Radien eines Kreises).
8. Es ist $BC = AB$ (Radien eines Kreises).
9. Also ist auch $AC = BC$. (Axiom)
10. Somit ist gezeigt, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist. ∎

Die Formulierung ist in halbwegs moderner Sprache abgefasst, aber die einzelnen Schritte entsprechen dem Originalbeweis von Euklid. Ein großes Problem stellt Schritt 4 dar, denn es ist durch nichts gesichert, dass sich die Kreise tatsächlich schneiden. Würde man als Modell der Ebene z.B. die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wählen, so würde man keinen Schnittpunkt erhalten!

In modernen Axiomensystemen werden deshalb zusätzliche Postulate eingefügt. Dass das nötig ist, war den Mathematikern bis ins 19. Jahrhundert kaum bewusst geworden. Erst Moritz Pasch stellte 1882 ein Axiomensystem für die ebene Geometrie auf, das in seiner Logik wesentlich strenger als das euklidische war und insbesondere die Probleme der Anordnung von Punkten sehr viel besser berücksichtigte. David Hilbert hat in seinen „Grundlagen der Geometrie“ dann das „Axiom von Pasch“ aufgenommen, das im wesentlichen besagt: *Wenn eine Gerade ins Innere eines Dreiecks eintritt, tritt sie auch wieder heraus.* Damit können auch Probleme wie das Schneiden von Kreisen erledigt werden.

Proposition 2. *An einem gegebenen Punkt kann man eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke anlegen. (die Richtung der angelegten Strecke kann man dabei nicht festlegen)*

Beweis:

1. Sei A der gegebene Punkt und BC die gegebene Strecke.

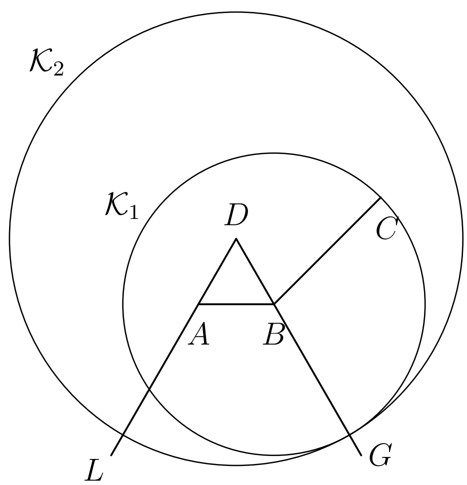
2. Verbinde A mit B (Postulat I)

3. Errichte ein gleichseitiges Dreieck ABD über AB (Prop. 1)

4. Zeichne den Kreis $\mathcal{K}_1$ um B mit Radius BC. (Postulat III)

5. Verlängere DB nach beiden Seiten und wähle auf der Seite von B einen Schnittpunkt G mit dem Kreis $\mathcal{K}_1$. (Postulat VI.3)

6. Zeichne den Kreis $\mathcal{K}_2$ um D mit Radius DG.

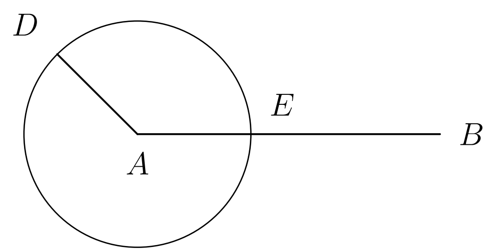


7. Verlängere DA nach beiden Seiten und wähle auf der Seite von A einen Schnittpunkt L mit dem Kreis $\mathcal{K}_2$. (Postulat VI.3)
8. Es ist $BC = BG$ (Radien von $\mathcal{K}_1$)
9. Es ist $DL = DG$ (Radien von $\mathcal{K}_2$)
10. Es ist $DA = DB$ (gleichseitiges Dreieck),
DA ein Teil von DL und DB ein Teil von DG.
11. Also ist $AL = BG$. (Axiom 3)
12. Aus (8) und (11) folgt: $AL = BC$ (Axiom 1).
13. Damit ist AL eine BC gleiche und bei A angetragene Strecke. ∎

Proposition 3. *Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, kann man auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke abtragen.*

Beweis: (nur angedeutet):

Sei $AB > XY$. Trage bei A eine Strecke $AD = XY$ an (nach Prop. 2). Zeichne den Kreis um A mit Radius AD.



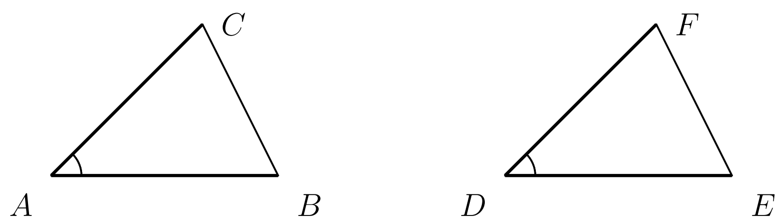
Da $AB > AD$ ist, liegt B im Äußeren des Kreises (kann und sollte man mit Hilfe von Postulat VI in einem Hilfssatz beweisen).

Also muss AB den Kreis in einem Punkt E treffen. Es ist $AE = AD$, also auch $AE = XY$. ■

Proposition 4. *Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreiecks entsprechend zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines anderen Dreiecks gleich sind, dann stimmen die Dreiecke auch in allen anderen einander entsprechenden Größen überein.*

(In moderner Sprache ist das der SWS-Kongruenzsatz)

BEWEIS: Hier ist schon die Formulierung des Satzes etwas problematisch.



Sei $AB = DE$ und $AC = DF$.

Nun schreibt Euklid:

> *Deckt man nämlich ΔABC auf ΔDEF und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie die gerade Linie AB auf DE, so muss auch Punkt B E decken, weil $AB = DE$.*

Euklid sagt nie, wie die „Superposition“ (das Überdecken von Figuren) funktioniert oder welchen Axiomen es genügt. Heute sprechen wir von Deck-Abbildungen, Bewegungen oder Kongruenzabbildungen. Im Prinzip kann man sie aber auch schon in den Beweisen von Euklid erkennen. ■

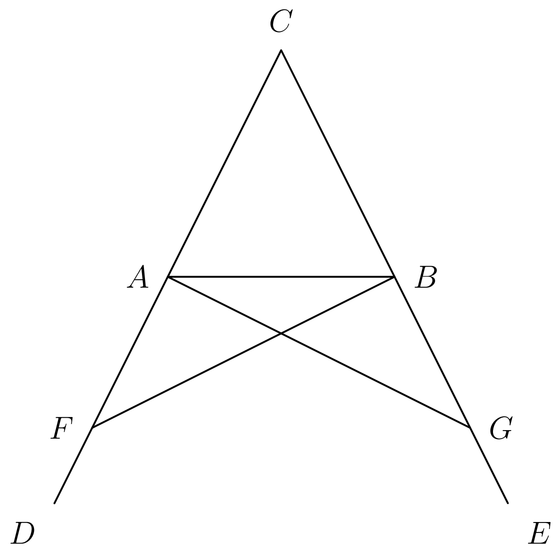
Proposition 5. *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.*

BEWEIS: Euklid bezeichnet meist eine Seite des Dreiecks als Grundlinie.

Der recht komplizierte Beweis, den Euklid hier liefert, ist typisch für die deduktive Methode. Er beginnt mit irgendwelchen schwer durchschaubaren Aktionen und fügt dann Folgerung an Folgerung, bis irgendwann ganz überraschend das Ergebnis auftaucht. Man nennt so etwas einen *synthetischen Beweis*, im Gegensatz zum *analytischen Beweis*, bei dem die zu beweisende Aussage zerlegt und auf einfachere

Aussagen zurückgeführt wird. Synthetische Beweise sind besonders schwer zu lesen und i.a. das Ergebnis einer vorangegangenen Analyse.

1. Es sei ΔABC das gleichschenklige Dreieck, mit der Grundlinie AB und den Schenkeln $AC = BC$.
2. Verlängere CA über A hinaus zu einer Strecke CD, und verlängere CB über B hinaus zu einer Strecke CE. Man kann annehmen, dass $CE \geq CD$ ist, also $BE \geq AD$.



3. Wähle F auf AD. Dann ist $AF < BE$.
4. Trage AF auf BE bei B an. Das ergibt die Strecke $BG = AF$.
5. Verbinde A mit G und F mit B.
6. Es ist $CF = CG$, $CA = CB$ und $\angle FCB = \angle ACG$, also $\Delta FBC \mathrel{\widehat{=}} \Delta AGC$. („$\widehat{=}$“ steht für „kongruent“)
7. Daher ist auch $FB = AG$, $\angle GAC = \angle FBC$ und $\angle BFC = \angle AGC$.
8. Da außerdem $AF = BG$ ist, ist $\Delta FBA \mathrel{\widehat{=}} \Delta AGB$.
9. Also ist $\angle FBA = \angle GAB$.
10. Durch Subtraktion erhält man aus (7) und (9): $\angle BAC = \angle ABC$. ∎

Wegen der brückenartigen Figur spricht man auch von der „Eselsbrücke“ („pons asinorum“). Es ist ein wenig verwunderlich, dass Euklid einen derartig komplizierten Weg gewählt hat. Auf Pappus, den letzten bedeutenden griechischen Mathematiker in Alexandria (um 300 n.Chr.), geht der folgende einfache Beweis zurück:

Es ist $AC = BC$, $BC = AC$ und $\angle ACB = \angle BCA$. Also ist $\Delta ABC \mathrel{\widehat{=}} \Delta BAC$, und insbesondere $\angle BAC = \angle ABC$. Q.e.d!

Proposition 6. *Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.*

Das ist die Umkehrung zu „Pons asinorum“.

Proposition 7 und 8 liefern den SSS-Kongruenzsatz. Der Beweis wird wieder mit Superposition geführt.

Proposition 9. *Ein gegebener Winkel kann halbiert werden.*

Proposition 10. *Eine gegebene Strecke kann halbiert werden.*

Beim Bweis braucht man das „Pasch-Axiom“.

Proposition 11. *Auf einer gegebenen Strecke kann in einem gegebenen Punkt eine Senkrechte errichtet werden.*

Dies ist die Stelle, wo ein rechter Winkel produziert werden muss, und wo sich Euklid auf sein Postulat IV bezieht.

Proposition 12. *Von einem gegebenen Punkt aus kann man auf eine gegebene Gerade, auf der der Punkt nicht liegt, das Lot fällen.*

Im Beweis werden allerlei Annahmen bezüglich der Anordnung der Punkte in der Ebene gemacht und Sätze vom Pasch-Typ benutzt.

Proposition 13. *Nebenwinkel ergeben zusammen zwei Rechte.*

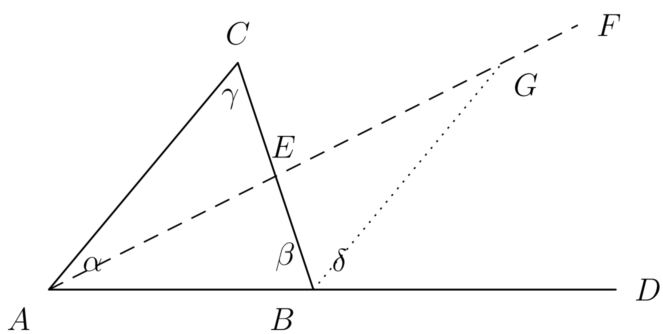
Proposition 14 ist die Umkehrung zu 13.

Proposition 15. *Scheitelwinkel sind gleich.*

Proposition 16. (Außenwinkelsatz)
An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Dieser Satz gilt als einer der Höhepunkte des ersten Bandes.

Beweis:
1. Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit den Innenwinkeln α, β und γ.



2. Verlängere AB über B hinaus zu AD. Dadurch entsteht der Außenwinkel δ.
3. Halbiere BC und bezeichne den Mittelpunkt mit E.
4. Verlängere AE über E hinaus so weit zu AF, dass $EF > AE$ ist.
5. Schneide von EF eine Strecke $EG = AE$ ab und verbinde G mit B.
6. Es ist $\angle AEC = \angle BEG$ (Scheitelwinkel), also $\Delta AEC \widehat{=} \Delta BGE$ (SWS).
7. Also ist $\gamma = \angle EBG$, und da $\angle EBG < \delta$ ist, ist auch $\gamma < \delta$.
8. Analog zeigt man, dass α kleiner als der Scheitelwinkel von δ ist, und damit $\alpha < \delta$. ∎

Auf die weiteren Sätze von Euklid soll hier zunächst nicht eingegangen werden.