

## 4.5 Projektive Geometrie

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Auf  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  führt man eine Äquivalenzrelation ein:

$$v \sim w : \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w.$$

Die Äquivalenzklassen sind Geraden durch 0 (also 1-dimensionale  $\mathbb{K}$ -Unterräume von  $\mathbb{K}^{n+1}$ ), ohne Nullpunkt.

### Definition:

Die Menge  $P_n(\mathbb{K})$  der Geraden durch 0 in  $\mathbb{K}^{n+1}$  bezeichnet man als den  $n$ -dimensionalen **projektiven Raum** (über  $\mathbb{K}$ ). Im Falle  $n = 2$  spricht man von der **projektiven Ebene**.

Ist  $E \subset \mathbb{K}^{n+1}$  ein  $(k+1)$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Unterraum, so nennt man

$$\mathbb{P}(E) := \{L \in P_n(\mathbb{K}) : L \subset E\}$$

einen ( $k$ -dimensionalen) **projektiven Unterraum**.

0-dimensionale projektive Unterräume sind Punkte, die 1-dimensionalen projektiven Unterräume nennt man projektive Geraden.

**5.1 Satz.** Seien  $M, N \subset P_n(\mathbb{K})$  zwei projektive Unterräume mit

$$\dim M + \dim N \geq n.$$

Dann ist  $M \cap N \neq \emptyset$ .

BEWEIS: Sei  $M = \mathbb{P}(E)$  und  $N = \mathbb{P}(F)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \dim(E \cap F) &= \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \oplus F) \\ &\geq \dim(E) + \dim(F) - (n+1) \\ &= \dim M + \dim N + 2 - n - 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F) \neq \emptyset$ . ■

**5.2 Folgerung.** In der projektiven Ebene schneiden sich je zwei projektive Geraden in einem Punkt.

BEWEIS: Sind  $L_1, L_2 \subset P_2(\mathbb{K})$  zwei projektive Geraden, so ist  $\dim L_1 + \dim L_2 = 2$ . ■

Es gibt also in der projektiven Ebene keine Parallelen!

**5.3 Satz.** Zu zwei Punkten  $p \neq q$  im projektiven Raum  $P_n(\mathbb{K})$  gibt es genau eine projektive Gerade durch  $p$  und  $q$ .

BEWEIS: Es gibt Geraden  $L \neq M$  durch 0 mit  $\mathbb{P}(L) = p$  und  $\mathbb{P}(M) = q$ . Sie spannen eine eindeutig bestimmte Ebene  $E$  auf, und dann ist  $\ell = \mathbb{P}(E)$  eine projektive Gerade mit  $p, q \in \ell$ . Offensichtlich ist  $\ell$  dadurch eindeutig bestimmt. ■

Jeder Punkt  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  definiert genau eine Gerade  $L_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{K}^{n+1}$  durch  $\mathbf{0}$ , die man als projektiven Punkt auffassen kann. Das ergibt eine surjektive Abbildung  $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P_n(\mathbb{K})$  mit  $\pi(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{x}}$  und  $\pi^{-1}(L_{\mathbf{x}}) = L_{\mathbf{x}} \setminus \{0\}$ . Man schreibt auch

$$\pi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}] \quad \text{oder} \quad \pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Die Komponenten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  nennt man die **homogenen Koordinaten** des projektiven Punktes  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ . Sie sind nicht eindeutig bestimmt, denn für  $\lambda \neq 0$  ist

$$(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n) = (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Ist  $x_0 \neq 0$ , so ist

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right),$$

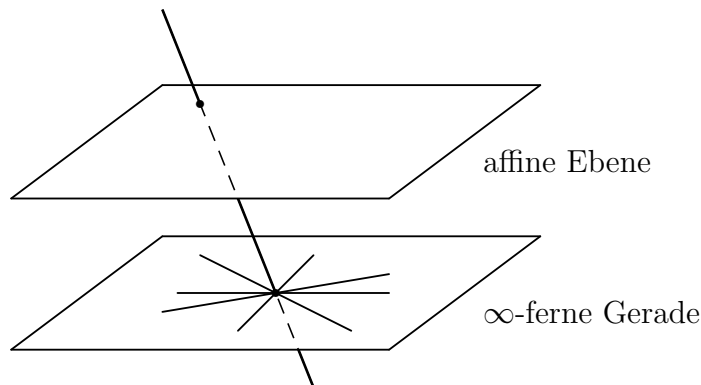
und der Punkt  $\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in \mathbb{K}^n$  ist durch den projektiven Punkt eindeutig bestimmt. Auf diese Weise kann man  $\mathbb{K}^n$  als Teilmenge von  $P_n(\mathbb{K})$  auffassen. Der Rest besteht aus den Punkten

$$\{(0 : x_1 : \dots : x_n) \in P_n(\mathbb{K}) : (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\} = P_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Der  $n$ -dimensionale projektive Raum ist Vereinigung einer  $n$ -dimensionalen affinen Ebene und einer „unendlich-fernen“  $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Hyperebene:

$$P_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}, \quad P_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup P_1(\mathbb{K}), \quad P_3(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^3 \cup P_2(\mathbb{K}) \quad \text{u.s.w.}$$

Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so ist  $P_1(\mathbb{K})$  die Riemann'sche Zahlenkugel  $\overline{\mathbb{C}}$ . Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so ist  $P_1(\mathbb{K})$  ein Kreis, und  $P_2(\mathbb{R})$  erhält man, indem man in der Sphäre  $S^2$  Antipodenpunkte miteinander identifiziert. Die Geometrie auf  $P_2(\mathbb{R})$  ist die sogenannte „elliptische Geometrie“, in der die Hypothese vom stumpfen Winkel erfüllt ist.



Die Gleichung einer projektiven Geraden in  $P_2(\mathbb{K})$  ist zugleich die Gleichung einer Ebene durch 0 in  $\mathbb{K}^3$ , also von der Form  $ax + by + cz = 0$  (mit festen Koeffizienten  $a, b$  und  $c$ ).

**5.4 Satz.** Die Gleichung der projektiven Geraden durch  $(x_0 : x_1 : x_2)$  und  $(y_0 : y_1 : y_2)$  ist gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

BEWEIS: Durch die Gleichung wird die Ebene der Punkte  $(x, y, z)$  beschrieben, die von  $(x_0, x_1, x_2)$  und  $(y_0, y_1, y_2)$  linear abhängig sind. ■

**Definition:**

Sei  $u : E \rightarrow F$  eine **injektive** lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen. Dann wird dadurch eine Abbildung  $\mathbb{P}(u) : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(F)$  mit  $\mathbb{P}(u)([v]) := [u(v)]$  induziert.

Ist  $u$  sogar bijektiv, so nennt man  $\mathbb{P}(u)$  eine **Projektivität** oder **projektive Transformation**.

**5.5 Satz.** Sei  $\dim E \geq 2$ . Sind  $u, v : E \rightarrow F$  zwei injektive lineare Abbildungen, so gilt:

$$\mathbb{P}(u) = \mathbb{P}(v) \iff \exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ mit } v = \alpha \cdot u.$$

BEWEIS: a) Ist  $v = \alpha u$ , so ist

$$\mathbb{P}(v)[x] = [v(x)] = [\alpha u(x)] = [u(x)] = \mathbb{P}(u)[x].$$

b) Sei  $\mathbb{P}(u) = \mathbb{P}(v)$ . Dann gilt für jedes  $x \in E \setminus \{0\}$ :  $[u(x)] = [v(x)]$ . Es gibt also ein  $\alpha(x) \in \mathbb{K}$ , so dass  $v(x) = \alpha(x) \cdot u(x)$  ist.

Wählt man  $x, y \in E$  linear unabhängig, so ist

$$\begin{aligned} v(x+y) &= \alpha(x+y) \cdot u(x+y) = \alpha(x+y) \cdot (u(x) + u(y)) \\ \text{und } v(x+y) &= v(x) + v(y) = \alpha(x) \cdot u(x) + \alpha(y) \cdot u(y), \end{aligned}$$

also

$$(\alpha(x+y) - \alpha(x)) \cdot u(x) + (\alpha(x+y) - \alpha(y)) \cdot u(y) = 0.$$

Weil mit  $x$  und  $y$  auch  $u(x)$  und  $u(y)$  linear unabhängig sind, folgt:

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) = \alpha(y).$$

Sind  $x$  und  $y$  beliebig, so kann man ein  $z$  finden, so dass jeweils  $x$  und  $z$  bzw.  $y$  und  $z$  linear unabhängig sind. Daher hängt  $\alpha(x)$  nicht von  $x$  ab. ■

Ist  $f = \mathbb{P}(u) : P_n(\mathbb{K}) \rightarrow P_n(\mathbb{K})$  eine Projektivität, so gibt es eine Matrix  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ , so dass gilt:

$$f([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x} \cdot A^\top].$$

Die Menge aller Projektivitäten von  $P_n(\mathbb{K})$  auf sich bildet eine Gruppe  $\text{PGL}_n(\mathbb{K}) = \text{GL}_n(\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$ , die **projektive Gruppe**.

Sei  $E$  ein  $(n+1)$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  eine Basis. Dann nennt man  $\varphi_A : \mathbb{P}(E) \rightarrow P_n(\mathbb{K})$  mit

$$\varphi_A([x_0 a_0 + \dots + x_n a_n]) := (x_0 : \dots : x_n)$$

ein **projektives Koordinatensystem**.

**Definition:**

Eine Punktmenge  $\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \subset \mathbb{P}(E)$  heißt eine **projektive Basis**, falls es ein projektives Koordinatensystem  $\varphi = \varphi_A : \mathbb{P}(E) \rightarrow P_n(\mathbb{K})$  gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(p_0) &= (1 : 0 : \dots : 0), \\ \varphi(p_1) &= (0 : 1 : \dots : 0), \\ &\vdots \\ \varphi(p_n) &= (0 : \dots : 0 : 1) \\ \text{und } \varphi(p_{n+1}) &= (1 : 1 : \dots : 1). \end{aligned}$$

**5.6 Satz.** *Folgende Aussagen über Punkte  $p_0, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(E)$  sind äquivalent:*

1. Die Punkte  $p_0, \dots, p_{n+1}$  bilden eine projektive Basis.
2. Es gibt Vektoren  $x_i \in E$  mit  $[x_i] = p_i$  (für  $i = 0, \dots, n+1$ ), von denen je  $n+1$  linear unabhängig sind.
3.  $p_0, \dots, p_{n+1}$  liegen nicht alle in einer projektiven Hyperebene  $H \subset \mathbb{P}(E)$ .

**BEWEIS:** (1)  $\implies$  (2): Weil ein projektives Koordinatensystem  $\varphi : \mathbb{P}(E) \rightarrow P_n(\mathbb{K})$  von einem Isomorphismus  $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  induziert wird, reicht es zu zeigen, dass von den  $n+2$  Vektoren  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$  und  $(1, 1, \dots, 1)$  je  $n+1$  linear unabhängig sind. Das ist aber klar.

(2)  $\implies$  (3): Würden alle Vektoren  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  in einer Hyperebene  $\hat{H} \subset E$  liegen, so könnten höchstens  $n$  davon linear unabhängig sein.

(3)  $\implies$  (1): Man wähle Urbildpunkte  $y_i$  mit  $p_i = [y_i]$ , für  $i = 0, \dots, n+1$ . Wenn nicht alle Punkte  $p_0, \dots, p_{n+1}$  in einer Hyperebene liegen, dann müssen je  $n+1$  von

den Vektoren  $y_0, \dots, y_{n+1}$  linear unabhängig sein. Also ist  $\{y_0, \dots, y_n\}$  eine Basis von  $E$  und  $y_{n+1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i y_i$ . Dann sind alle Koeffizienten  $\alpha_i \neq 0$  (denn sonst wären  $n+1$  Vektoren von den  $y_i$  linear abhängig). Also bilden auch die Vektoren  $x_i := \alpha_i y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , eine Basis von  $E$ .

Es gibt einen Isomorphismus  $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  mit  $\Phi(x_0) = (1, 0, \dots, 0), \dots, \Phi(x_n) = (0, \dots, 0, 1)$ . Offensichtlich ist dann auch  $\Phi(x_{n+1}) = (1, \dots, 1)$ . ■

**5.7 Satz.** *Es seien  $p_0, \dots, p_{n+1}$  und  $q_0, \dots, q_{n+1}$  jeweils projektive Basen von  $\mathbb{P}(E)$ . Dann gibt es genau eine projektive Transformation  $h : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$  mit  $h(p_i) = q_i$  für  $i = 0, \dots, n+1$ .*

BEWEIS:  $\{a_0, \dots, a_n\}$  und  $\{b_0, \dots, b_n\}$  seien Basen von  $E$  mit  $[a_i] = p_i$  und  $[b_i] = q_i$  für  $i = 0, \dots, n$ . Außerdem sei  $[a_0 + \dots + a_n] = p_{n+1}$  und  $[b_0 + \dots + b_n] = q_{n+1}$ .

a) Zunächst die Eindeutigkeit: Wenn  $h$  existiert, dann ist  $h = \mathbb{P}(u)$ , mit  $u(a_i) = \alpha_i b_i$  (und  $\alpha_i \neq 0$ ) für  $i = 0, \dots, n$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} [u(a_0 + \dots + a_n)] &= \mathbb{P}(u)[a_0 + \dots + a_n] = h(p_{n+1}) \\ &= q_{n+1} = [b_0 + \dots + b_n]. \end{aligned}$$

Also gibt es ein  $\lambda$  mit  $u(a_0 + \dots + a_n) = \lambda \cdot (b_0 + \dots + b_n)$ . Aus der Gleichung

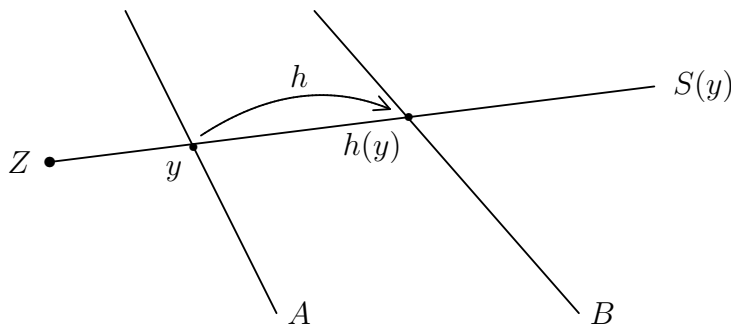
$$\alpha_0 b_0 + \dots + \alpha_n b_n = \lambda b_0 + \dots + \lambda b_n$$

folgt:  $\alpha_i = \lambda$  für alle  $i$ . Dann ist aber  $u = \lambda u_0$ , wenn man die Abbildung  $a_i \mapsto b_i$  mit  $u_0$  bezeichnet, also  $h = \mathbb{P}(u_0)$ .

b) Die Existenz ist offensichtlich. ■

**5.8 Projektionssatz.** *Sei  $E$  ein  $(n+1)$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Gegeben seien zwei  $m$ -dimensionale projektive Unterräume  $A, B \subset \mathbb{P}(E)$  und ein  $(n-m-1)$ -dimensionaler projektiver Unterraum  $Z \subset \mathbb{P}(E)$  mit  $A \cap Z = B \cap Z = \emptyset$ . Für jedes  $y \in A$  sei  $S(y)$  der  $(n-m)$ -dimensionale projektive Unterraum, der sowohl  $y$  als auch  $Z$  enthält. Wenn es zu jedem  $y \in A$  genau ein Element  $h(y) \in B$  mit  $S(y) \cap B = \{h(y)\}$  gibt, dann ist die Abbildung  $h : A \rightarrow B$  eine projektive Transformation.*

BEWEIS:



Sei  $A = \mathbb{P}(\widehat{A})$ ,  $B = \mathbb{P}(\widehat{B})$  und  $Z = \mathbb{P}(\widehat{Z})$ , mit Untervektorräumen  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{Z} \subset E$ . Dann ist  $\widehat{Z} \oplus \widehat{A} = \widehat{Z} \oplus \widehat{B} = \mathbb{P}(E)$ .

Sei  $w \in \widehat{A}$  und  $y = [w] \in A$ . Weil  $Z \cap A = \emptyset$  ist, ist  $\widehat{S}(y) := \mathbb{R}w \oplus \widehat{Z}$  ein  $(n-m+1)$ -dimensionaler Unterraum von  $E$  (und zwar der kleinste Unterraum von  $E$ , der  $w$  und  $\widehat{Z}$  umfasst). Sei  $S(y) := \mathbb{P}(\widehat{S}(y))$ . Dann ist  $\dim S(y) = n-m$  und deshalb  $S(y) \cap B \neq \emptyset$ . Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \widehat{S}(y) \cap \widehat{B} = \dim \widehat{S}(y) + \dim \widehat{B} - \dim E = (n-m+1) + (m+1) - (n+1) = 1,$$

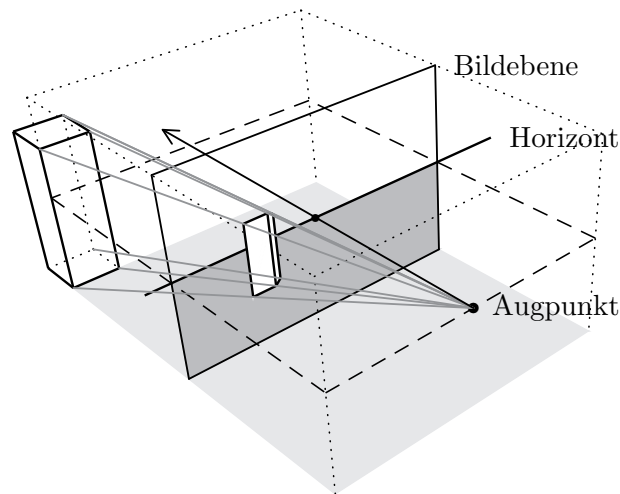
also besteht  $S(y) \cap B$  aus genau einem Punkt  $h(y)$ .

Sei  $\pi : \widehat{Z} \oplus \widehat{B} \rightarrow \widehat{B}$  die kanonische Projektion. Dann ist  $F := \pi|_{\widehat{A}} : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$  eine lineare Abbildung. Ist  $a = z + b \in \widehat{A} \subset E = \widehat{Z} \oplus \widehat{B}$  und  $0 = F(a) = b$ , so ist  $a = z$ . Weil  $\widehat{Z} \cap \widehat{A} = \{0\}$  ist, muss  $a = 0$  sein, und das bedeutet, dass  $F$  injektiv und aus Dimensionsgründen sogar bijektiv ist. Wir wollen zeigen, dass  $\mathbb{P}(F) = h$  ist.

Dazu sei noch einmal ein  $a \in \widehat{A}$  gegeben,  $a \neq 0$ , sowie  $y := [a]$ . Dann ist  $\mathbb{P}(F)(y) = [F(a)] \in B$ . Ist  $U := \mathbb{R}a \oplus \widehat{Z}$ , so ist  $\mathbb{P}(U \cap \widehat{B}) = S(y) \cap B = \{h(y)\}$ , und wir müssen nur noch zeigen, dass zusätzlich  $F(a) \in U$  gilt. Die Zerlegung  $a = z + b \in \widehat{Z} \oplus \widehat{B}$  liefert:  $F(a) = \pi(a) = b = a - z \in \mathbb{R}a \oplus \widehat{Z} = U$ . ■

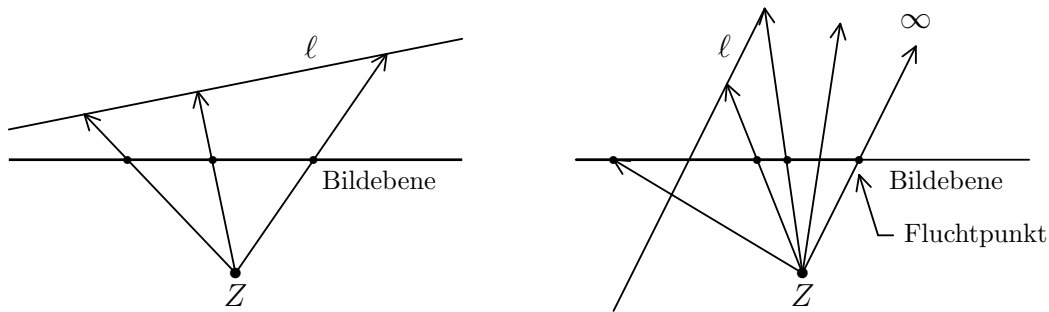
Man nennt die Abbildung  $h$  eine **Zentralprojektion** oder **Perspektivität**. Der gerade bewiesene Satz zeigt, dass jede Perspektivität eine projektive Transformation ist.

Die Zentralprojektion kommt in der Kunst zum Einsatz, bei der perspektivischen Darstellung der Welt.



Man nimmt zur Vereinfachung an, dass der Künstler bzw. der Betrachter ein einziges Auge besitzt, mit dem er die Szene ansieht. Lichtstrahlen, die von einem Objektpunkt  $y$  ausgehen und auf das Auge (das Zentrum  $Z$  der Projektion) treffen, stoßen im Punkt  $h(y)$  durch die Bildebene. Jeder Projektionsstrahl entspricht einem Punkt der Bildebene. Wir nennen solche Strahlen „radiale Geraden“.

Radiale Geraden ergeben Bildpunkte, radiale Ebenen ergeben Bildgeraden. Eine nicht-radiale Gerade  $\ell$  wird auf eine Gerade in der Bildebene projiziert: Jede radiale Gerade in der von  $\ell$  und  $Z$  aufgespannten radialen Ebene  $\mathcal{E}$  trifft  $\ell$  in einem Punkt (und liefert so einen Bildpunkt) – mit einer Ausnahme. Die zu  $\ell$  im Affinen parallele Gerade trifft  $\ell$  natürlich nicht, sie entspricht dem unendlich-fernen Punkt von  $\ell$ .

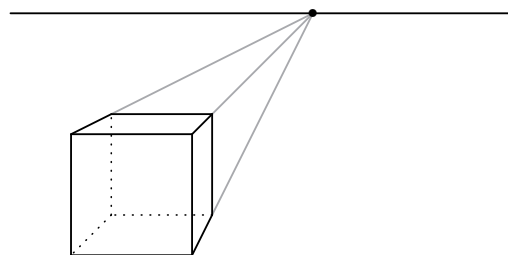


Dieser unendlich ferne Punkt wirkt auch im Bild so, als sei er unendlich weit entfernt. Er kann allerdings einen Bildpunkt im endlichen Teil der Bildebene besitzen. Dann bezeichnet man diesen Bildpunkt als **Fluchtpunkt**.

Die Ebene durch  $Z$ , die parallel zur Grundebene verläuft, schneidet die Bildebene in der Horizontlinie. Alle nicht-radialen Geraden, die parallel zur Grundebene verlaufen, haben ihren Fluchtpunkt auf der Horizontlinie. Parallele Geraden haben den gleichen Fluchtpunkt. Geraden, die zur Bildebene parallel sind, haben im Endlichen keinen Fluchtpunkt, und sie bleiben auch im Bild parallel.

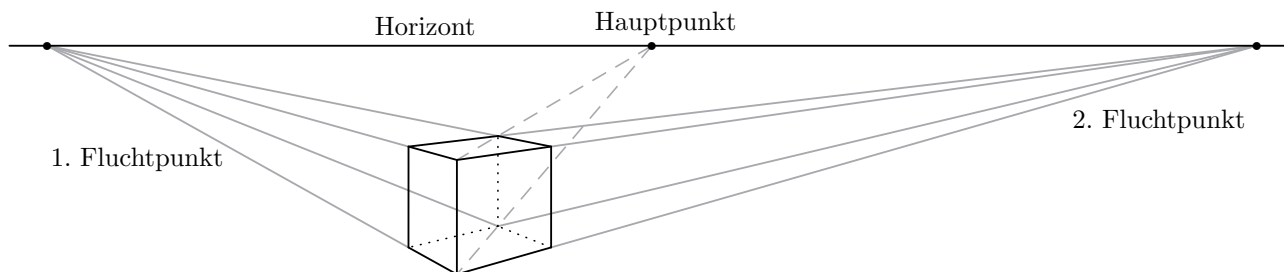
Bei der perspektivischen Darstellung eines Würfels gibt es drei Möglichkeiten:

1. **Ein-Punkt-Perspektive:** Eine Seite des Würfels ist parallel zur Bildebene, und alle Kanten dieser und der gegenüberliegenden Seite sind deshalb auch im Bild parallel. Die anderen Kanten treffen sich alle in einem Fluchtpunkt.

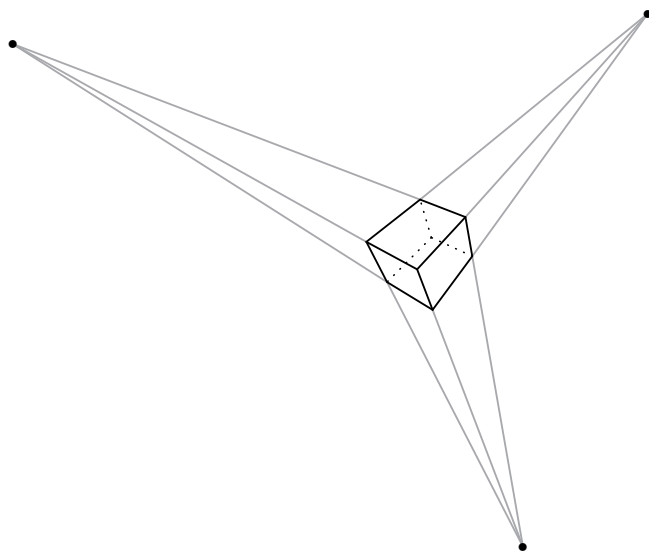


2. **Zwei-Punkt-Perspektive:** Dreht man den Würfel etwas um seine vertikale Achse, so bleiben die vertikalen Seitenkanten parallel zur Bildebene, aber die horizontalen Kanten streben im Bild zwei verschiedenen Fluchtpunkten entgegen. Beide Fluchtpunkte liegen in diesem Fall auf der Horizontlinie. Das Bild des Augpunktes, der sogenannte „Hauptpunkt“, liegt ebenfalls auf dem Horizont. Wenn die Diagonale der Grundfläche des Würfels senkrecht zur

Bildebene verläuft (was der Fall ist, wenn man den Würfel gerade um  $45^\circ$  dreht), dann läuft deren Bild auf den Hauptpunkt zu.



3. **Drei-Punkt-Perspektive:** Kippt man den Würfel zusätzlich, so ist keine Seite und keine Kante parallel zur Bildebene. Da es drei Scharen von untereinander parallelen Kanten gibt, tauchen nun im Bild drei Fluchtpunkte auf, von denen in der Regel keiner mehr auf der Horizontlinie liegt.



Vielfach versteckt sich hinter einer Zwei-Punkt-Perspektive eigentlich eine Drei-Punkt-Perspektive. Dafür braucht z.B. nur die Bildebene gegenüber den vertikalen Linien leicht geneigt zu sein. Dann ist aber einer der Fluchtpunkte so weit entfernt, dass die zugehörigen Neigungen kaum wahrnehmbar sind.

Eine echte Drei-Punkt-Perspektive sieht man bei Bildern in Frosch- oder Vogelperspektive.

Wir kehren nun zur projektiven Geometrie zurück.

Für drei Punkte  $X = X_0 + x \cdot V$ ,  $Y = X_0 + y \cdot V$  und  $Z = X_0 + z \cdot V$  auf einer affinen Geraden mit  $X \neq Y$  bezeichnet man die Zahl

$$\lambda = \text{TV}(X, Y, Z) := \frac{z - x}{y - x}$$



als **Teilverhältnis** der Punkte  $X, Y, Z$ . Dann ist  $Z - X = \lambda \cdot (Y - X)$ .

Ist  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow g$  ein affines Koordinatensystem mit  $\varphi(0) = X$  und  $\varphi(1) = Y$ , so ist  $\varphi(t) = X + t(Y - X)$ , also  $\varphi(\lambda) = X + \lambda(Y - X) = Z$ , d.h.  $\lambda = \varphi^{-1}(Z)$ .

Ist etwa  $\text{TV}(X, Y, Z) = \frac{1}{2}$ , so ist  $Z$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{XY}$ .

Unter affinen Abbildungen bleibt das Teilverhältnis invariant. Eine Abbildung  $\Phi$  der affinen Ebene auf sich heißt **affin**, falls die Abbildung  $\widehat{\Phi} : Y - X \mapsto \Phi(Y) - \Phi(X)$  linear ist. Ist  $Z - X = \lambda \cdot (Y - X)$ , so ist

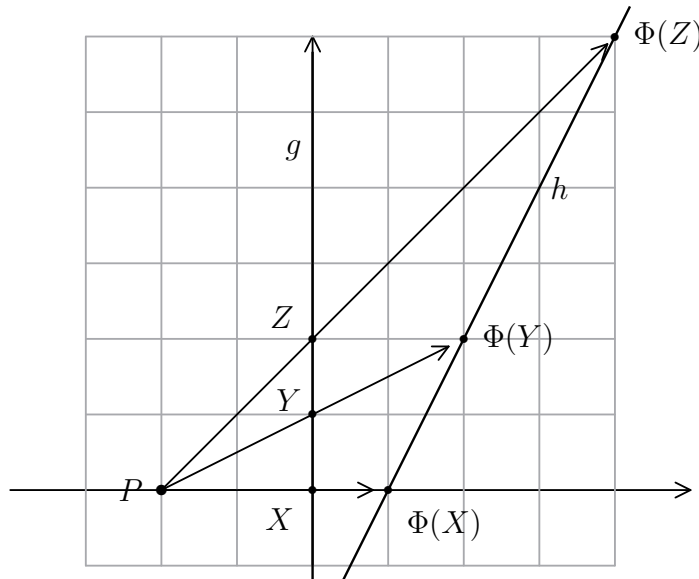
$$\Phi(Z) - \Phi(X) = \widehat{\Phi}(Z - X) = \widehat{\Phi}(\lambda \cdot (Y - X)) = \lambda \cdot \widehat{\Phi}(Y - X) = \lambda \cdot (\Phi(Y) - \Phi(X)),$$

also  $\text{TV}(\Phi(X), \Phi(Y), \Phi(Z)) = \lambda = \text{TV}(X, Y, Z)$ .

Unter Projektivitäten und speziell unter Perspektivitäten bleibt das Teilverhältnis i.a. nicht erhalten.

### Beispiel.

Sei  $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  und  $h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x - 2\}$ . Projiziert man vom Zentrum  $P = (-2, 0)$  aus die Gerade  $g$  auf die Gerade  $h$ , so ergibt sich für die Punkte  $X = (0, 0)$ ,  $Y = (0, 1)$  und  $Z = (0, 2)$  auf  $g$  folgende Situation:



Bei der Parametrisierung  $\varphi(t) := (0, t)$  für  $g$  ist  $\varphi(0) = X$ ,  $\varphi(1) = Y$  und  $\varphi(2) = Z$ , also  $\text{TV}(X, Y, Z) = \varphi^{-1}(Z) = 2$ .

Um die Bildpunkte auszurechnen, muss man jeweils  $h$  mit den Strahlen  $g_1 := \{(x, y) : y = 0\}$  (durch  $P$  und  $X$ ),  $g_2 := \{(x, y) : y = x/2 + 1\}$  (durch  $P$  und  $Y$ ) und  $g_3 := \{(x, y) : y = x + 2\}$  (durch  $P$  und  $Z$ ) zum Schnitt bringen. Bezeichnet man die Zentralprojektion mit  $\Phi$ , so ergibt sich:

$$\Phi(X) = (1, 0), \quad \Phi(Y) = (2, 2) \quad \text{und} \quad \Phi(Z) = (4, 6).$$

Parametrisiert man  $h$  durch  $\psi(t) := (1, 0) + t(1, 2)$ , so ist  $\psi(0) = \Phi(X)$ ,  $\psi(1) = \Phi(Y)$  und  $\psi(3) = \Phi(Z)$ , also  $\text{TV}(\Phi(X), \Phi(Y), \Phi(Z)) = \psi^{-1}(Z) = 3$ .

Es stellt sich heraus, dass das „Doppelverhältnis“ invariant unter Perspektivitäten ist. Dazu müssen wir das Doppelverhältnis neu definieren.

**Definition:**

Unter dem **Doppelverhältnis** von vier Punkten  $A, B, C, D$  auf einer affinen Geraden versteht man den Quotienten

$$DV^*(A, B, C, D) := \text{TV}(B, C, D) : \text{TV}(A, C, D).$$

Haben die Punkte  $A, B, C, D$  unter einer Parametrisierung  $t \mapsto X_0 + tV$  der Geraden die Koordinaten  $a, b, c, d$ , so ist

$$DV^*(A, B, C, D) = \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b} = DV(a, c, b, d).$$

Dabei ist  $DV(a, c, b, d)$  das früher eingeführte Doppelverhältnis von vier komplexen (oder analog von vier reellen) Zahlen. Wie man sieht, hat sich die Reihenfolge der Punkte leicht geändert. Das alte Doppelverhältnis war dadurch definiert worden, dass  $z \mapsto DV(z, u, v, w)$  diejenige Möbius-Transformation ist, die  $u$  auf 0,  $v$  auf 1 und  $w$  auf  $\infty$  abbildet. Dabei kann für  $z$  jeder Wert, auch  $\infty$ , eingesetzt werden.

Auch das neue Doppelverhältnis kann auf projektiven Geraden definiert werden. Dabei setzen wir  $\infty := (0 : 1)$  und betten  $\mathbb{K}$  vermöge  $t \mapsto (1 : t)$  in  $P_1(\mathbb{K})$  ein. Nun sei  $L = \mathbb{P}(P) \subset \mathbb{P}(E)$  eine beliebige projektive Gerade. Wir wählen eine beliebige Basis  $\{v, w\} \subset P$ , Dann wird  $L$  durch  $\psi : P_1(\mathbb{K}) \rightarrow L$  mit  $\psi(\alpha : \beta) := [\alpha v + \beta w]$  parametrisiert. Es ist  $\psi(0 : 1) = [w]$  und  $\psi(1 : t) := [v + tw]$  für  $t \in \mathbb{K}$ . Sind  $A = \psi(1 : a)$ ,  $B = \psi(1 : b)$ ,  $C = \psi(1 : c)$  und  $D = \psi(1 : d)$  Punkte auf  $L$ , so setzt man weiterhin  $DV^*(A, B, C, D) = \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b}$ . Lässt man z.B.  $(1 : b)$  gegen  $(0 : 1)$  gehen, so strebt  $B$  gegen  $\psi(\infty)$  und das Doppelverhältnis gegen

$$\frac{c-a}{d-a} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b}.$$

Das (neue) Doppelverhältnis kann deshalb wie folgt charakterisiert werden.

**5.9 Satz.** Sei  $L \subset \mathbb{P}(E)$  eine projektive Gerade. Weiter seien  $A, B, C, D$  vier Punkte auf  $L$ , und es gebe ein projektives Koordinatensystem  $\varphi : L \rightarrow P_1(\mathbb{K})$  mit  $\varphi(A) = (1 : 0)$ ,  $\varphi(B) = (0 : 1)$  und  $\varphi(C) = (1 : 1)$ . Ist dann  $\varphi(D) = (\lambda : \mu)$ , so ist  $DV^*(A, B, C, D) = \lambda/\mu$  (und  $= \infty$  im Falle  $\mu = 0$ ).

**BEWEIS:** Die Gerade  $L$  wird durch  $\psi := \varphi^{-1} : P_1(\mathbb{K}) \rightarrow L$  parametrisiert. Dabei ist  $\psi(1 : 0) = A$ ,  $\psi(0 : 1) = B$ ,  $\psi(1 : 1) = C$  und  $\psi(\lambda : \mu) = D$ , also

$$DV^*(A, B, C, D) = \frac{c-a}{d-a} = \frac{1-0}{\mu/\lambda-0} = \lambda/\mu.$$

Auf der anderen Seite ist  $DV(0, 1, \infty, \mu/\lambda) = (1-0)/(\mu/\lambda-0) = \lambda/\mu$ . Das alte Doppelverhältnis ist invariant unter Möbius-Transformationen (für  $z \mapsto z+A$  und  $z \mapsto Bz$  ist das trivial, für die Inversion  $z \mapsto 1/z$  sieht man das nach einer kleinen Rechnung). Deshalb hängt das alles nicht von der zu Anfang gewählten Basis ab, und das neue Doppelverhältnis ist ebenfalls invariant unter projektiven Transformationen. ■

Betrachtet man noch mal das weiter oben untersuchte Beispiel, in dem die Gerade  $g = \{x = 0\}$  vom Zentrum  $P = (-2, 0)$  aus auf die Gerade  $h = \{y = 2x - 2\}$  mittels der Perspektivität  $\Phi$  projiziert wird, so kann man die Punkte  $X = (0, 0)$ ,  $Y = (0, 1)$  und  $Z = (0, 2)$  noch um einen Punkt  $U := (0, -1)$  ergänzen. Dann ist  $\Phi(U) = (2/5, -6/5)$ . Unter der Parametrisierung  $\varphi(t) := (0, t)$  von  $g$  haben  $U, X, Y, Z$  die Koordinaten  $-1, 0, 1$  und  $2$ . Unter der Parametrisierung  $\psi(t) := (1+t, 2t)$  von  $h$  haben  $\Phi(U), \Phi(X), \Phi(Y), \Phi(Z)$  die Koordinaten  $-3/5, 0, 1$  und  $3$ . Damit rechnet man leicht nach:

$$DV^*(U, X, Y, Z) = \frac{4}{3} = DV^*(\Phi(U), \Phi(X), \Phi(Y), \Phi(Z)).$$

**5.10 Satz.**  $U = [u]$ ,  $X = [x]$ ,  $Y = [y]$  und  $Z = [z]$  seien Punkte auf der projektiven Geraden  $L \subset \mathbb{P}(E)$ . Ist  $y = \alpha u + \beta x$  und  $z = \gamma u + \delta x$ , so ist  $DV^*(U, X, Y, Z) = (\beta/\alpha)/(\delta/\gamma)$ .

BEWEIS: In der Parametrisierung

$$\varphi(t) := \begin{cases} [u + tx] & \text{für } t \in \mathbb{K}, \\ [x] & \text{für } t = \infty \end{cases}$$

haben  $U, X, Y, Z$  die Koordinaten  $0, \infty, \beta/\alpha$  und  $\delta/\gamma$ . Dann ist

$$DV^*(U, X, Y, Z) = \frac{(\beta/\alpha) - 0}{(\delta/\gamma) - 0} \cdot \frac{(\delta/\gamma) - \infty}{(\beta/\alpha) - \infty} = \frac{\beta/\alpha}{\delta/\gamma}.$$

■

### Definition:

Ein (nicht-entarteter) **Kegelschnitt**  $C \subset P_2(\mathbb{K})$  ist eine Menge der Gestalt

$$C = \{[\mathbf{x}] = (x_0 : x_1 : x_2) \in P_2(\mathbb{K}) : \mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{x}^\top = 0\}, \quad \text{mit } A \in GL_3(\mathbb{K}).$$

Ist  $f : P_2(\mathbb{K}) \rightarrow P_2(\mathbb{K})$  eine projektive Transformation und  $C \subset P_2(\mathbb{K})$  ein nicht-entarteter Kegelschnitt, so ist auch  $T(C)$  ein nicht-entarteter Kegelschnitt.

**Bemerkung.** In  $P_2(\mathbb{K})$  ist ein nicht-entarteter Kegelschnitt  $C$  gegeben durch  $q_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{x}^\top = 0$ , mit  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{K})$ . Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so gibt es nur die Normalform  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so ist der durch  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  gegebene Kegelschnitt leer. Die Gleichungen  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ ,  $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$  und  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  liefern äquivalente Kegelschnitte, sie unterscheiden sich nur in der affinen Ebene. Dort erhält man z.B.:

$$u^2 + v^2 = 1 \text{ (Kreis)} \quad \text{oder} \quad (u - v)(u + v) = 1 \text{ (Hyperbel)}.$$

Das Komplement von  $C$  in  $P_2(\mathbb{R})$  besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Eine davon, das „Innere“ von  $C$ , ist homöomorph zu  $\mathbb{D}$ , während die andere homöomorph zum Möbiusband ist. Man beachte, dass eine projektive Gerade  $\ell \subset P_2(\mathbb{R})$  auch eine geschlossene Kurve ist, dass ihr Komplement in  $P_2(\mathbb{R})$  aber homöomorph zur affinen Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist.

Ein Punkt  $Q$  liegt genau dann *im Innern von*  $C$ , falls jede Gerade durch  $Q$  den Kegelschnitt  $C$  in zwei verschiedenen Punkten trifft. Der Punkt  $Q$  liegt *im Äußeren von*  $C$ , falls es eine Gerade durch  $Q$  gibt, die  $C$  nicht trifft. Die Eigenschaft, im Innern oder Äußeren eines nicht-entarteten Kegelschnittes zu liegen, ist invariant unter projektiven Transformationen.

Eine projektive Gerade  $\ell$  heißt *Tangente* an den nicht-entarteten Kegelschnitt  $C$ , falls sie  $C$  in genau einem Punkt trifft.

Mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  erhält man den nicht-entarteten Kegelschnitt

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P_2(\mathbb{K}) : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(1 : u : v) : u^2 + v^2 = 1\}.$$

Im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist das der Einheitskreis  $\partial\mathbb{D}$  (denn  $C$  liegt komplett im affinen Teil  $\{(1 : u : v) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ ).

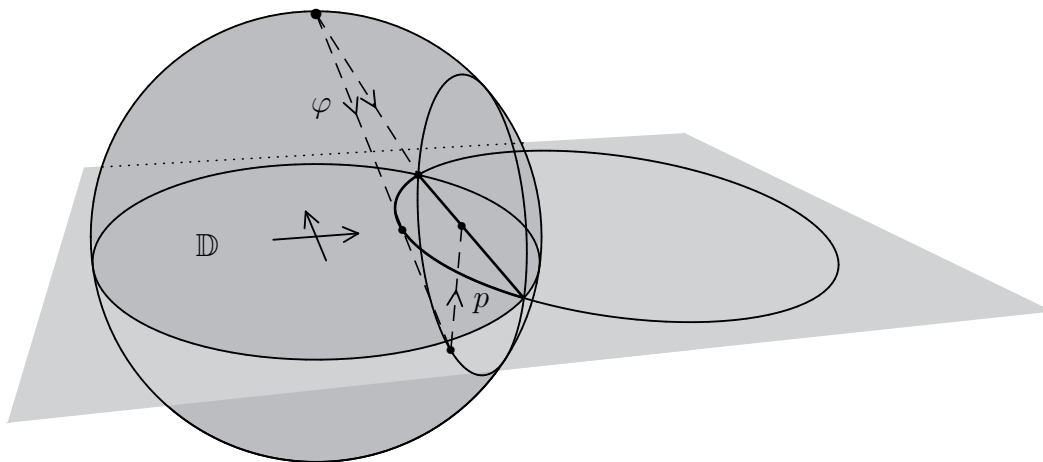
Sei  $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  die stereographische Projektion (mit  $\varphi(z, h) := (1/(1-h)) \cdot z$ ) und  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  die lineare Projektion mit  $p(z, h) := z$ . Dann bezeichnen wir  $L := p \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  als *Linearisierungsabbildung*. Offensichtlich ist  $L(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  und  $L(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ .

**Behauptung:**  $L : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ist bijektiv.

BEWEIS:  $\varphi^{-1}$  bildet  $\mathbb{D}$  bijektiv auf die untere Halbsphäre

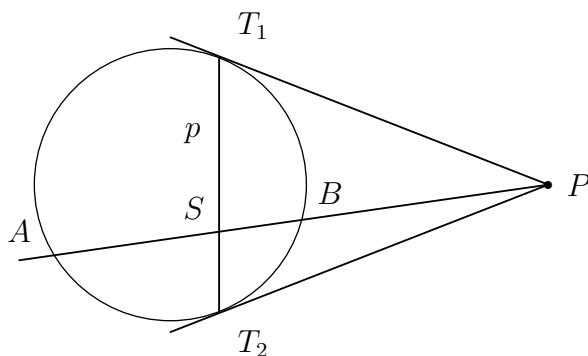
$$S_- := \{(z, h) : |z|^2 + h^2 = 1 \text{ und } h < 0\}$$

ab. Und dann bildet  $p$  die untere Halbsphäre  $S_-$  bijektiv auf  $\mathbb{D}$  ab, mit Umkehrabbildung  $z \mapsto (z, -\sqrt{1 - |z|^2})$ . ■



Man kann zeigen, dass die stereographische Projektion konform ist. Das Urbild eines Orthokreises muss deshalb ein Kreis auf  $S^2$  sein, der  $\partial\mathbb{D}$  orthogonal trifft, also der Schnitt von  $S^2$  mit einer auf der  $x$ - $y$ -Ebene senkrecht stehenden Ebene. Projiziert man anschließend mit  $p$  wieder auf  $\mathbb{D}$ , so erhält man ein Geradenstück, nämlich die Sehne des Orthokreises, die  $\partial\mathbb{D}$  dort trifft, wo zuvor der Orthokreis getroffen hat. Die Übertragung der hyperbolischen Geometrie aus dem Poincaré-Modell mittels der Linearisierungsabbildung wieder auf  $\mathbb{D}$  ergibt das **Beltrami-Klein-Modell**. Die Ebene ist das Inneres des Einheitskreises, also eines nicht-entarteten Kegelschnittes in der projektiven Ebene (man beachte, dass man alle drei Geometrien – elliptisch, euklidisch und hyperbolisch – in der projektiven Ebene wiederfinden kann). Die Geraden im Beltrami-Klein-Modell (manchmal auch respektlos als „Bierdeckel-Modell“ bezeichnet) sind die Abschnitte von Geraden, soweit sie im Innern von  $\mathbb{D}$  verlaufen.

Zu einem Punkt  $P$ , der im Äußeren eines nicht entarteten Kegelschnitts  $C$  liegt, gibt es stets zwei Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  an  $C$ , die durch  $P$  gehen. Berühren diese den Kegelschnitt in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$ , so heißt die Gerade  $p = T_1T_2$  „die **Polare** zu  $P$  (bezüglich des gegebenen Kegelschnitts)“.



Umgekehrt sagt man: Schneidet eine Gerade  $p$  (die Polare) einen Kegelschnitt in zwei Punkten  $T_1$  und  $T_2$ , so heißt der Schnittpunkt der beiden Tangenten in  $T_1$  und  $T_2$  der **Pol** zu  $p$  (bezüglich des Kegelschnittes).

Zeichnet man durch den Pol  $P$  eine Sekante, die den Kegelschnitt in  $A$  und  $B$  und die Polare in  $S$  schneidet, so teilen die Punkte  $S$  und  $P$  die Strecke  $\overline{AB}$  **harmonisch** (das heißt definitionsgemäß:  $\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{AP} : \overline{BP}$ ). Dies erlaubt es, die Polare auch folgendermaßen zu definieren:

Zeichnet man durch einen Punkt  $P$  (den Pol) die Sekanten zu einem nicht entarteten Kegelschnitt, so liegen die „vierten harmonischen Punkte“, die (zusammen mit  $P$ ) die ausgeschnittenen Sehnen harmonisch teilen, auf einer Geraden. Diese Gerade heißt die Polare zu  $P$  (bezüglich des Kegelschnittes).

Wir gehen wieder zur komplexen Schreibweise über. Dann gilt:

**5.11 Satz.** *Gilt  $p - r - q$  und  $r - q - s$ , so teilen  $r$  und  $s$  die Strecke  $\overline{pq}$  genau dann harmonisch, wenn  $DV^*(p, q, r, s) = -1$  ist.*

BEWEIS:  $r$  und  $s$  teilen die Strecke  $\overline{pq}$  genau dann harmonisch, wenn gilt:

$$\frac{r - p}{q - r} = \frac{s - p}{s - q}.$$

Daraus folgt:

$$DV^*(p, q, r, s) = DV(p, r, q, s) = \frac{(p - r)(q - s)}{(p - s)(q - r)} = \frac{(q - r)(q - s)}{(s - q)(q - r)} = -1.$$

Die Umkehrung folgt ebenso. ■

Bewegungen im Klein-Beltrami-Modell  $\mathcal{K}$  definiert man folgendermaßen: Eine **Bewegung** von  $\mathcal{K}$  ist eine Abbildung  $L \circ f \circ L^{-1}$ , wobei  $L$  die Linearisierungsabbildung und  $f$  eine hyperbolische Bewegung (im Poincaré-Modell) ist.

Ein Beispiel sind die „projektiven Spiegelungen“:

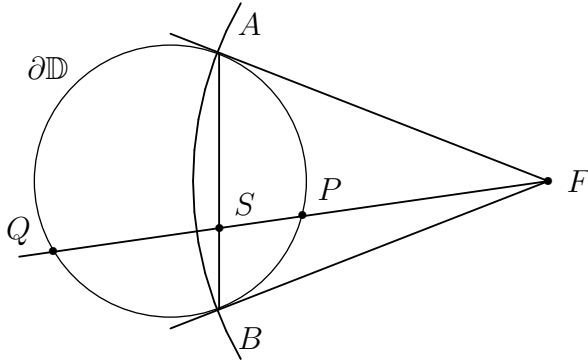
Sei  $\ell \subset P_2(\mathbb{R})$  eine projektive Gerade und  $F \in P_2(\mathbb{R}) \setminus \ell$  ein Punkt. Die **projektive Spiegelung** an  $\ell$  mit Zentrum  $F$  ist eine Abbildung  $s : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $s(P) = P$  für alle  $P \in \ell$ .
2. Ist  $P \notin \ell$ ,  $P \neq F$  und  $R$  der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von  $F$  und  $P$  mit  $\ell$ , so liegt auch  $s(P)$  auf der Geraden  $\overline{FP}$ , und es ist  $DV^*(F, R, P, s(P)) = -1$ . (d.h.,  $F$  und  $R$  teilen die Strecke  $\overline{Ps(P)}$  harmonisch).

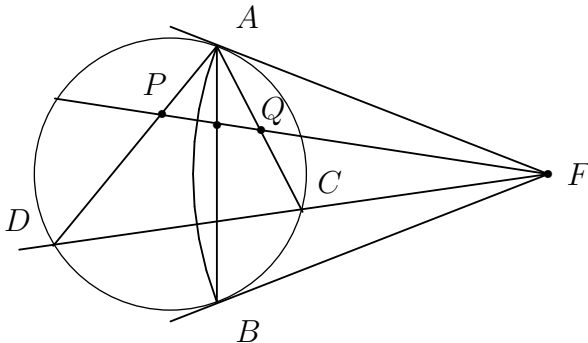
**Behauptung:** Sei  $K$  ein Orthokreis, der zwei Punkte  $A, B \in \partial\mathbb{D}$  verbindet. Ist  $\sigma$  die hyperbolische Spiegelung an  $K$  und  $F$  der Pol zu der Sekante  $\overline{AB}$ , so ist  $L \circ \sigma \circ L^{-1}$  die projektive Spiegelung an  $AB$  mit Zentrum  $F$ .

BEWEIS:  $F$  ist der Mittelpunkt des Orthokreises durch  $A$  und  $B$ .

a) Sei  $f := L \circ \sigma \circ L^{-1}$ . Dann ist  $f|_{\partial\mathbb{D}} = \sigma$ . Die hyperbolische Spiegelung  $\sigma$  bildet einen Punkt  $P \in \partial\mathbb{D}$  auf den zweiten Schnittpunkt  $Q$  der Geraden  $FP$  mit  $\partial\mathbb{D}$  ab. Weil  $F$  aber auch der Pol zur Strecke  $\overline{AB}$  ist, teilen  $F$  und der Schnittpunkt  $S$  von  $AB$  mit  $FP$  die Strecke  $\overline{QP}$  harmonisch. Daraus folgt, dass  $Q$  das Bild von  $P$  unter der projektiven Spiegelung  $s = s_{AB,F}$  an  $AB$  mit Zentrum  $F$  ist. Also ist  $\sigma = s$  auf  $\partial\mathbb{D}$ .



b) Sei nun  $P \in \mathbb{D}$ . Die Gerade  $AP$  trifft  $\partial\mathbb{D}$  in einem weiteren Punkt  $D$ , und  $DF$  trifft  $\partial\mathbb{D}$  in einem Punkt  $C$ . Schließlich trifft  $AC$  die Gerade  $FP$  in einem Punkt  $Q$ .



Da  $s(A) = A$  und  $s(D) = C$  ist, bildet  $s$  die Sehne  $AD$  auf  $AC$  ab. Außerdem bildet  $s$  die Gerade  $FP$  auf  $FP$  ab (nach Konstruktion der projektiven Spiegelung). Wegen  $AD \cap FP = \{P\}$  und  $AC \cap FP = \{Q\}$  muss  $s(P) = Q$  sein.

Die Abbildung  $f = L \circ \sigma \circ L^{-1}$  bildet Sehnen auf Sehnen ab. Weil  $f|_{\partial\mathbb{D}} = \sigma$  ist, bildet sie  $\overline{AD}$  auf  $\overline{AC}$  ab. Die Gerade  $FP$  ist Radius des Orthokreises und wird auf sich selbst abgebildet. Also bildet  $f$  den Schnittpunkt  $P$  von  $AD$  und  $FP$  auf den Schnittpunkt  $Q$  von  $AC$  und  $FP$  ab. Damit stimmen  $f$  und  $s$  auch in  $\mathbb{D}$  überein. ■

**5.12 Satz.** Jede Bewegung von  $\mathcal{H}$  ist eine projektive Transformation, die  $\partial\mathbb{D}$  auf sich und  $\mathbb{D}$  auf sich abbildet.

BEWEIS: Da jede Bewegung im Poincaré-Modell eine Komposition von hyperbolischen Spiegelungen ist, ist auch jede Bewegung von  $\mathcal{H}$  eine Komposition von

projektiven Spiegelungen. Es reicht deshalb, die Behauptung für projektive Spiegelungen zu zeigen.

Sei  $s$  die projektive Spiegelung an einer Geraden  $\ell$  mit Zentrum  $F$ , sowie  $\{R\} = PF \cap \ell$ . Ist  $T$  eine projektive Transformation, so gilt für  $P \notin \ell$ ,  $P \neq F$ , und  $Q := s(P)$ :

$T(P) \notin T(\ell)$ ,  $T(P) \neq T(F)$ ,  $\{T(R)\} = T(P)T(F) \cap T(\ell)$  und

$$DV^*(T(F), T(R), T(P), T(Q)) = DV^*(F, R, P, Q) = -1.$$

Also ist  $s' : T(P) \mapsto T(Q)$  die projektive Spiegelung an  $T(\ell)$  mit Zentrum  $T(F)$ , und es ist  $T^{-1} \circ s' \circ T = s$ . Ist  $s'$  eine projektive Transformation, so gilt dies auch für  $s$ .

Deshalb kann man o.B.d.A. annehmen, dass

$$F = (0 : 0 : 1) \quad \text{und} \quad \ell = \{(x : y : z) : z = 0\}$$

ist (man bilde  $F$  und zwei Punkte von  $\ell$  mit einer projektiven Transformation auf  $(0 : 0 : 1)$ ,  $(1 : 0 : 0)$  und  $(0 : 1 : 0)$  ab). Sei  $P = (a : b : c)$  ein beliebiger Punkt  $\neq F$ , der nicht auf  $\ell$  liegt. Die Gerade  $PF$  wird durch eine Gleichung  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$  beschrieben, mit  $\gamma = 0$  (weil  $F$  darauf liegt). Dass  $P$  auf der Geraden liegt, bedeutet, dass  $\alpha a + \beta b = 0$  ist. Also ist

$$PF \cap \ell = \{(x : y : 0) : \alpha x + \beta y = 0\} = \{(a : b : 0)\}, \text{ d.h., } R = (a : b : 0).$$

Sei  $Q := s(P) \in PF$ . Dann ist  $Q = (a : b : d)$  mit einem  $d \neq 0$ .

Es ist  $P = (a : b : c)$ ,  $Q = (a : b : d)$ ,  $R = (a : b : 0)$  und  $F = (0 : 0 : 1)$ , sowie

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= 1 \cdot (a, b, 0) + c \cdot (0, 0, 1) \\ \text{und } (a, b, d) &= 1 \cdot (a, b, 0) + d \cdot (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Also ist  $-1 = DV^*(F, R, P, Q) = (c/1)/(d/1) = c/d$  und damit  $d = -c$ . Das bedeutet:

$$s(a, b, c) = (a, b, -c),$$

und das ist eine projektive Transformation. ■

Die Geometrie des Klein-Beltrami-Modells ist also eine „Unter-Geometrie“ der projektiven Geometrie.

Wir sind nun auch in der Lage, in  $\mathcal{K}$  den Abstand zweier Punkte zu berechnen. Wir erinnern uns: Ist  $r \in \mathbb{D}$  ein Punkt auf der reellen Achse, so ist

$$d_h(0, r) = \frac{1}{2} \left| \log \frac{1+r}{1-r} \right| = \frac{1}{2} \left| \log DV(0, 1, r, -1) \right| = \frac{1}{2} \left| \log DV^*(0, r, 1, -1) \right|.$$

Seien nun  $z, w \in \mathbb{D}$  zwei beliebige Punkte und  $p$  und  $q$  die Endpunkte des eindeutig bestimmten Orthokreises durch  $z$  und  $w$  auf  $\partial\mathbb{D}$ . Mit einem Automorphismus  $T$  des



Einheitskreises kann man  $z$  auf 0 und  $w$  auf ein  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , abbilden. Dann wird aus dem Orthokreis der Durchmesser von  $\mathbb{D}$  durch 0 und  $r$ . Die Punkte  $p$  und  $q$  werden auf  $-1$  und  $1$  abgebildet. Weil das Doppelverhältnis invariant unter projektiven Transformationen (und damit insbesondere unter Möbiustransformationen) ist, folgt:

$$d_h(z, w) = \frac{1}{2} |\log DV^*(z, w, q, p)|.$$

Jetzt übertragen wir das Ganze auf das Beltrami-Klein-Modell, indem wir

$$d_{\mathcal{K}}(L(z), L(w)) := d_h(z, w)$$

setzen, wobei  $L$  die Linearisierungsabbildung ist.

Es ist  $L(z) = p \circ \varphi^{-1}(z) = 2z/(|z|^2 + 1)$ , also  $L(0) = 0$  und  $L(r) = s = s(r) := 2r/(1 + r^2)$  (für  $r > 0$ ). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{K}}(L(0), L(r)) &:= d_h(0, r) = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} \\ &= \frac{1}{4} \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^2 = \frac{1}{4} \log \left( \frac{1+r^2+2r}{1+r^2-2r} \right) \\ &= \frac{1}{4} \log \left( \frac{1+s}{1-s} \right) = \frac{1}{4} \left| \log \frac{1-s}{1+s} \right| = \frac{1}{4} |\log DV^*(0, s, -1, 1)| \\ &= \frac{1}{4} |\log DV^*(L(0), L(r), -1, 1)|. \end{aligned}$$

Nun seien  $z, w \in \mathbb{D}$  beliebig und  $a, b$  die Endpunkte der Sehne durch  $z$  und  $w$  auf  $\partial\mathbb{D}$ . Dann liegen  $L^{-1}z$  und  $L^{-1}w$  auf dem Orthokreis durch  $a$  und  $b$ , und es gibt ein  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  mit  $f(a) = -1$ ,  $f(L^{-1}z) = 0$ ,  $f(L^{-1}w) = r > 0$  und  $f(b) = 1$ . Die Abbildung  $T := L \circ f \circ L^{-1}$  ist eine projektive Transformation. Daher gilt:

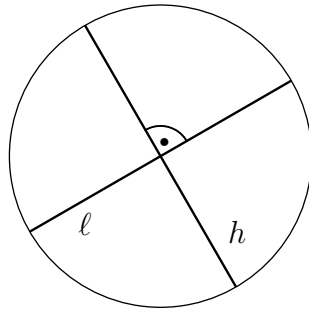
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |\log DV^*(z, w, a, b)| &= \frac{1}{4} |\log DV^*(Tz, Tw, Ta, Tb)| \\ &= \frac{1}{4} |\log DV^*(0, s, -1, 1)| = \frac{1}{4} |\log DV^*(L(0), L(r), -1, 1)| \\ &= d_h(0, r) = d_h(f \circ L^{-1}z, f \circ L^{-1}w) = d_h(L^{-1}z, L^{-1}w) \\ &=: d_{\mathcal{K}}(z, w). \end{aligned}$$

**Bemerkung.** In der Literatur wird der hyperbolische Abstand oft ohne den Faktor  $1/2$  definiert (was an den Eigenschaften nichts ändert, außer der Euklidizität im Nullpunkt). Im Modell  $\mathcal{K}$  müsste dann der Faktor  $1/4$  durch  $1/2$  ersetzt werden.

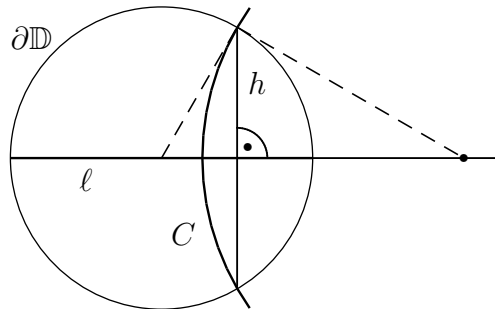
Tatsächlich könnte man  $d_h(z, w) = k \cdot |\log DV^*(z, w, q, p)|$  setzen (mit einer beliebigen Konstanten  $k$  und den Schnittpunkten  $q, p$  des Orthokreises durch  $z$  und  $w$  mit  $\partial\mathbb{D}$ ). Wir haben  $k = 1/2$  gesetzt, damit  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_h(0, t)}{t} = 1$  ist.

Leider ist das Beltrami-Klein-Modell nicht konform. Es ist es schon schwierig, rechte Winkel als solche zu erkennen. Seien  $\ell$  und  $h$  zwei Geraden im Beltrami-Klein-Modell  $\mathcal{H}$ .

1. Fall: Sind  $\ell$  und  $h$  beide Durchmesser von  $\mathbb{D}$ , so sind sie gleichzeitig Orthokreise. Deshalb sind sie genau dann in  $\mathcal{H}$  orthogonal, wenn sie es im euklidischen Sinne sind.



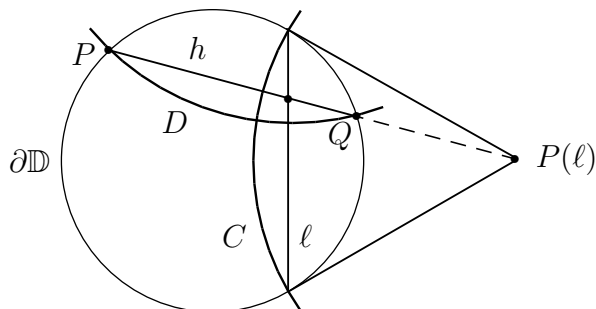
2. Fall: Sei  $\ell$  ein Durchmesser von  $\mathbb{D}$  und  $h$  eine dazu (im euklidischen Sinne) senkrechte Gerade, aber kein Durchmesser:



Ist  $L$  die Linearisierungsabbildung und  $C := L^{-1}(h)$ , sowie  $P$  der Schnittpunkt von  $\ell$  und  $h$ , so ist  $Q := L^{-1}(P)$  der Schnittpunkt von  $\ell$  und  $C$ . Aus Symmetriegründen treffen sich  $\ell$  und  $C$  unter einem rechten Winkel. Also treffen sich  $\ell$  und  $h$  auch in  $\mathcal{H}$  senkrecht.

3. Fall: Sei weder  $\ell$  noch  $h$  ein Durchmesser von  $\mathbb{D}$ .

Es seien  $C = L^{-1}(\ell)$  und  $D = L^{-1}(h)$  die zugeordneten Großkreis-Abschnitte. Dann ist der Pol  $P(\ell)$  zu  $\ell$  zugleich der Mittelpunkt von  $C$ .

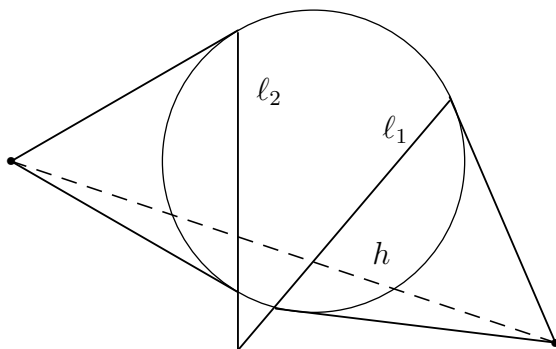


Sei  $\sigma$  die Spiegelung am Kreisbogen  $C$ , sowie  $P$  der im Äußeren von  $C$  gelegene Endpunkt von  $h$ , also insbesondere ein Schnittpunkt von  $D$  und  $\partial\mathbb{D}$ . Weil sich  $C$  und  $\partial\mathbb{D}$  in zwei Punkten orthogonal treffen, muss  $\partial\mathbb{D}$  auch durch  $\sigma(P)$  gehen (nach Satz 3.9). Außerdem liegt  $\sigma(P)$  natürlich auf der Geraden durch  $P$  und  $P(\ell)$ , ist also der Schnittpunkt von  $\partial\mathbb{D}$  und der Geraden  $PP(\ell)$ .

Der Kreisbogen  $D$  habe den Punkt  $Q$  als zweiten Endpunkt.  $\ell$  und  $h$  stehen im Modell  $\mathcal{K}$  genau dann aufeinander senkrecht, wenn sich  $C$  und  $D$  orthogonal treffen. Aus Symmetriegründen müssen sie das dann sogar in zwei Punkten tun. Also muss  $D$  nach Satz 3.9 auch durch  $\sigma(P)$  gehen. Weil  $D \cap \partial\mathbb{D} = \{P, Q\}$  und  $\{P, \sigma(P)\} \subset D \cap \partial\mathbb{D}$  ist, folgt:  $Q = \sigma(P)$ .

Damit ist gezeigt:  $\ell$  und  $h$  stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn die Verlängerung von  $h$  durch den Pol  $P(\ell)$  geht.

Divergente Parallelen haben bekanntlich eine gemeinsame Senkrechte. Im Beltrami-Klein-Modell sieht das zum Beispiel wie folgt aus:



Hier sind  $l_1$  und  $l_2$  die divergenten Parallelen, und  $h$  ist die gemeinsame Senkrechte.

## Literaturverzeichnis

### Original-Literatur:

Natürlich kann man die Elemente des Euklid nicht im Original lesen, weil sie gar nicht mehr existieren, und die wenigsten werden sich die Mühe machen, Arbeiten von Gauß im Original nachzulesen. Im Folgenden handelt es sich also meist auch schon um Übersetzungen und Bearbeitungen.

**K.-R. Biermann (Herausg.).** *Carl Friedrich Gauß, Briefe und Gespräche.* Verlag C. H. Beck, München 1990.

**G. D. Birkhoff.** *A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor.* Annals of Mathematics, vol. 33, April 1932.

**G. D. Birkhoff / R. Beatley.** *Basic Geometry.* Chelsea Publishing Company, 3. Auflage, New York 1959.

**J. Bolyai.** *Appendix (ed. by F.Kárteszi).* North-Holland, Amsterdam 1987.

**R. Bonola.** *Non-Euclidean Geometry.* Dover Publications, 1955.

**Euklid.** *Die Elemente.* Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235. Harri Deutsch Verlag, 1996.

**Euclid.** *The thirteen books of the elements, translated from the text of Heiberg by Sir Thomas L.Heath.* Dover Publications, 1956.

**D. Hilbert.** *Grundlagen der Geometrie.* Teubner, Stuttgart 1987.

**D. Hilbert.** *Lectures on the Foundations of Geometry 1891 - 1902.* Editors: M. Hallett, U. Majer. Springer, 2004.

**A. M. Legendre.** *Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 12. Auflage.* Übersetzung aus dem Französischen von A. L. Crelle (2. Auflage), August Rücker, Berlin 1833.

**S. MacLane.** *Metric Postulates for Plane Geometry.* The American Mathematical Monthly, vol. 66, 1959.

**M. Pasch.** *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Teubner, 1912.

**J.-Cl. Pont.** *L'Aventure des Parallèles. Histoire de la Géométrie non Euclidienne. Précurseurs et Attardés.* Peter Lang, Bern 1986.

**Proclus.** *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Translated by G. R. Morrow. Princeton University Press 1970.

**H. Reichardt.** *Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie.* Teubner, Archiv zur Mathematik, Band 4, 1985.

**F. Schur.** *Über die Grundlagen der Geometrie.* Math. Ann. 55, 1902.

**P. Stäckel / F. Engel.** *Die Theorie der Parallellinien (Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie)*. Teubner, Leipzig 1895 (Johnson Reprint Corporation, 1968).

**P. Stäckel / F. Engel.** *Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie*.

I *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij*.

II *Wolfgang und Johann Bolyai*.

Leipzig 1913 (Johnson Reprint Corporation, 1972).

### Biographien:

*Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner:*

Bd. 15 *Carl Friedrich Gauß* (von H. Wußig)

Bd. 34 *Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski* (von A. Halameisär, H. Seibt)

Bd. 87 *Euklid* (von P. Schreiber)

### Monographien:

**J. W. Anderson.** *Hyperbolic Geometry*. Springer, 1999.

Schwerpunkte: Möbiustransformationen, Halbebenenmodell, Gauß-Bonnet-Formel, Aufgaben mit Lösungen.

**M. Audin.** *Geometry*. Springer 2003.

Das Buch enthält u.a. eine gute, moderne Einführung in die projektive Geometrie.

**F. Bachmann.** *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer, 1959.

Ganz anderer axiomatischer Ansatz, tiefgehend.

**R. Baldus / F. Löbell.** *Nichteuklidische Geometrie*. Göschen, Walter de Gruyter, 1964.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie nach Hilbert, hyperbolische Geometrie im Beltrami-Klein-Modell, Fundamentalkonstruktionen.

**K. Borsuk / W. Szmielew.** *Foundations of Geometry*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960.

Sehr detaillierte axiomatische Geometrie, nicht leicht zu lesen.

**D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray.** *Geometry*. Cambridge University Press, 1999-2007.

Allgemeine Einführung in die Geometrie, gute Abschnitte über projektive Geometrie, Doppelverhältnis, Kreisspiegelung, stereographische Projektion, Möbiustransformationen, Poincaré-Kreismodell, sphärische Geometrie, Zusammenhang mit projektiver Geometrie und Beltrami-Klein-Modell, Aufgaben mit Lösungen.

**R. Courant / H. Robbins.** *Was ist Mathematik?* Springer 1992.

**N. W. Efimow.** *Über die Grundlagen der Geometrie I.* Vieweg, 1970.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie nach Hilbert, synthetische nichteuklidische Geometrie, Halbebenenmodell.

**R. L. Faber.** *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* Marcel Dekker, 1983.

Schwerpunkte: Axiomatik, Geschichte des Parallelenproblems, synthetische nichteuklidische Geometrie, Weierstraßmodell.

**A. Filler.** *Euklidische und nichteuklidische Geometrie.* BI-Wissenschaftsverlag, 1993.

Schwerpunkte: Sphärische Geometrie, euklidische Geometrie nach Hilbert, Halbebenenmodell für die hyperbolische Geometrie.

**G. Fischer.** *Analytische Geometrie.* Vieweg 1978.

Affine und projektive Geometrie, unter Verwendung des Vektorraum-Begriffs.

**H. G. Forder.** *The Foundations of Euclidean Geometry.* Dover Publications, 1958.

Sehr genaue Analyse geometrischer Axiome, Schwerpunkt euklidische Geometrie.

**D. Gans.** *An Introduction to Non-Euclidean Geometry.* Academic Press, 1973.

Schwerpunkte: Geschichte des Parallelenproblems, synthetische nichteuklidische Geometrie, elliptische Geometrie.

**M. J. Greenberg.** *Euclidean and Non-Euclidean Geometries (second edition).*

Freeman and Company, San Francisco, 1974.

Gutes Begleitbuch zur Vorlesung.

**R. Hartshorne.** *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer, 2000.

Sehr gute Begleitlektüre zur Vorlesung, anspruchsvoll.

**G. Hessenberg / J. Diller.** *Grundlagen der Geometrie.* Walter de Gruyter, 1967.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie mit Längen- und Winkelmessung, projektive und analytische Geometrie, Modelle der absoluten Geometrie.

**G. A. Jennings.** *Modern Geometry with Applications.* Springer, 1994.

Schwerpunkte: Euklidische Elementargeometrie, sphärische Geometrie, projektive Geometrie und Perspektive, spezielle Relativitätstheorie.

**H. Karzel / K. Sörensen / D. Windelberg.** *Einführung in die Geometrie.*

UTB 184, Vandenhoeck & Ruprecht 1971.

**P. Kelly / G. Matthews.** *The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane.*

Schwerpunkte: Absolute Geometrie mit Lineal und Winkelmesser, hyperbolische Geometrie mit vielen Konstruktionen, Poincaré-Kreismodell, metrische Ebenen.

**W. Klingenberg.** *Grundlagen der Geometrie.* BI.

**B. Klotzek / E. Quaisser.** *Nichteuklidische Geometrie.* VEB Wissenschaften, Berlin 1978.

Schwerpunkt u.a.: Axiomatische Geometrie mit Bewegungen, wie in der Vorlesung.

**H. Knörrer.** *Geometrie.* Vieweg, 1996.

Enthält eine ausführliche Darstellung des Halbebenen-Modells.

**M. Koecher / A. Krieg.** *Ebene Geometrie.* Springer, 1993.

Ausführliche analytische Darstellung der Elementargeometrie. Man findet so ziemlich alles.

**E. Kunz.** *Ebene Geometrie.* Vieweg 1976.

Schwerpunkte: Axiomatische euklidische Geometrie mit „Strecken“ und Bewegungen, Koordinaten, Halbebenenmodell.

**H. Lenz.** *Nichteuklidische Geometrie.* BI-Wissenschaftsverlag, 1966.

Schwerpunkte: Axiomensystem, das auf Bewegungen aufgebaut ist, Beltrami-Klein- und Poincaré-Kreismodell, Riemannsche Geometrie, Einführung von Koordinaten.

**H. Levi.** *Topics in Geometry.* Robert E. Krieger Publishing Company, 1975.

**H. Liebmann.** *Nichteuklidische Geometrie.* Göschen, 1912.

**G. E. Martin.** *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.* Springer, 1975.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie mit Lineal und Winkelmesser, Modelle, hyperbolische Geometrie.

**J. McCleary.** *Geometry from a Differentiable Viewpoint.* Cambridge University Press, 1994.

Schwerpunkte (knappe Darstellung): Sphärische Geometrie, Euklidische Geometrie, Parallelen-theorie, nichteuklidische Geometrie. Danach nur noch Differentialgeometrie

**H. Meschkowski.** *Grundlagen der euklidischen Geometrie.* BI-Wissenschaftsverlag, 1965.

**R. S. Millman / G. D. Parker.** *Geometry. A Metric Approach with Models (second edition).* Springer, 1991.

Schwerpunkte ähnlich wie bei Martin, ausführliche Theorie der Flächenfunktionen.

**E. E. Moise.** *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Addison-Wesley, 1963.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie mit Lineal und Winkelmesser, Vergleiche mit anderen Systemen, Flächenfunktionen, Raumgeometrie, Kreisgeometrie, Konstruierbarkeit und Vollständigkeit, hyperbolische Geometrie, Poincaré-Kreismodell, euklidische analytische Geometrie.

**T. Needham.** *Anschauliche Funktionentheorie.* Oldenbourg Verlag 2001.

**G. Nöbeling.** *Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene.* Walter de Gruyter, 1976.

Schwerpunkte: Etwas ungewöhnliche axiomatische Einführung der Geometrie mit Geradenbüscheln, elliptische und nichtelliptische Ebenen, Einführung von Koordinaten.

**A. P. Norden.** *Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie.* VEB Wissenschaften, Berlin 1958.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie mit Bewegungen, hyperbolische Geometrie nach Lobatschewski.

**O. Perron.** *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene.* Teubner, 1962.

Schwerpunkte: Euklidische Geometrie mit Lineal und Winkelmesser, nichteuklidische Geometrie mit Fundamentalkonstruktionen, viele Berechnungen.

**A. Ramsay / R. D. Richtmyer.** *Introduction to Hyperbolic Geometry.* Springer (Universitext), 1995.

Euklidische Geometrie mit Lineal und Winkelmesser, neutrale und hyperbolische Geometrie, differentialgeometrische Betrachtungen.

**E. G. Rees.** *Notes on Geometry.* Springer, 1983.

Neben analytischer euklidischer Geometrie und projektiver Geometrie ist am interessantesten die Darstellung des Beltrami-Klein-Modells.

**P. J. Ryan.** *Euclidean and Non-Euclidean Geometry - An Analytic Approach.* Cambridge University Press, 1986.

Analytische und metrische Beschreibung von euklidischer, sphärischer, projektiver und hyperbolischer Geometrie, Weierstraß- und Beltrami-Klein-Modell.

**P. Samuel.** *Projective Geometry.* Springer 1988.

**H. Scheid / W. Schwarz.** *Elemente der Geometrie.* 4. Auflage, Spektrum-Verlag, 2007.

**D. A. Singer.** *Geometry: Plane and Fancy.* Springer 1998.

**John Stillwell.** *The four pillars of Geometry.* Springer 2005.

**R. J. Trudeau.** *The Non-Euclidean Revolution.* Birkhäuser, 1986.

Deutsche Übersetzung: *Die geometrische Revolution.* Birkhäuser, 1998.

Dieses Buch gab den Anstoß zu meiner ersten Vorlesung über Grundlagen der Geometrie, die dann im Laufe der Jahre weiterentwickelt wurde.

### Internet-Quellen:

Die Elemente als interaktive Web-Version (englisch, HTML)

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

Die Elemente zweisprachig (griechisch-englisch, PDF, 693 Seiten!)

<http://farside.ph.ntexas.edu/euclid/euclid.pdf>