

4.3 Möbius-Transformationen

Jahrhunderte lang wurde versucht, das Parallelenaxiom direkt zu beweisen – vergebens! Dann kam Saccheri auf die Idee, ein hyperbolisches Parallelenaxiom vorzusetzen und daraus einen Widerspruch herzuleiten. Auch er scheiterte. Erst Johann Bolyai und Nikolai Lobatschewski erkannten die Möglichkeit einer widerspruchsfreien nichteuklidischen Geometrie. Indem sie von einer solchen Annahme ausgingen, entdeckten sie in der räumlichen hyperbolischen Geometrie eine Fläche, die Horosphäre, auf der alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt sind. Damit war die euklidische Geometrie gerettet und zugleich das Tor zu einer neuen Welt aufgestoßen worden.

Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der Geometrie war damit nachgewiesen, aber für einen endgültigen Beweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie fehlte noch ein Modell! Man hoffte, dass sich eine nichteuklidische Ebene in den euklidischen Raum (isometrisch) einbetten ließe. Diese Hoffnung wurde durch Hilbert zerstört, der bewies, dass das unmöglich sei.

Allerdings war noch nicht alles verloren. Man kann nämlich zumindest einen Teil der nichteuklidischen Ebene, der durch einen Horozykel und zwei Radien begrenzt wird, einbetten. Das war schon Beltrami gelungen, der die sogenannte **Pseudosphäre** untersuchte, eine Fläche, die durch Rotation einer **Traktrix** (auch als *Hundekurve* bekannt) entsteht. Allgemein ist auf Flächen von konstanter negativer Krümmung zumindest teilweise die nichteuklidische Geometrie verwirklicht.

Ein erstes vollständiges Modell war das von Cayley-Klein-Beltrami, auf das wir später eingehen werden. Leider ist dieses Modell nicht „konform“, d.h., man kann die Winkel nicht mit einem euklidischen Winkelmesser messen. Insbesondere ist es schon schwierig, rechte Winkel als solche zu erkennen.

Ein konformes Modell stammt von Poincaré, und das soll hier vorgeführt werden. Dazu müssen wir im Komplexen zu arbeiten.

Durch die Zuordnung $z = x + iy \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x, y)$ wird eine Bijektion zwischen dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen und der reellen euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 hergestellt. Begriffe wie „offene Mengen“ lassen sich dann leicht übertragen. Ein **Gebiet** in \mathbb{C} ist eine zusammenhängende offene Teilmenge von \mathbb{C} .

Die Spiegelung an der x-Achse ergibt im Komplexen den Übergang $z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy$ zum Konjugiert-Komplexen. Aus der euklidischen Länge $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ wird im Komplexen der Betrag $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$.

Ist $z \in \mathbb{C}$, so gibt es die Polarkoordinaten-Darstellung

$$z = |z| e^{it} = |z| \cdot (\cos t + i \sin t).$$

Die Zahl $t \in [0, 2\pi)$ nennt man das **Argument** von z (in Zeichen $\arg(z)$). Aus den Eigenschaften (insbesondere den Additionstheoremen) für Sinus und Cosinus folgt

die Beziehung

$$e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}, \quad \overline{e^{it}} = e^{-it} \quad \text{und} \quad e^{2\pi i n} = 1 \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine komplexwertige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ kann in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden: $f = g + ih$. Dann lässt sich auch der Begriff der Stetigkeit übertragen.

Eine (*gebrochen*) *lineare Transformation* oder *Möbius-Transformation* ist eine Abbildung der Gestalt

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Die Funktion T ist für alle $z \neq -d/c$ definiert und stetig.

Wir betrachten zwei Spezialfälle.

1. Fall: Ist $c = 0$, $A := a/d$ und $B := b/d$, so ist T eine komplexe affin-lineare Funktion:

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

Da $A = re^{it}$ eine komplexe Zahl und

$$x + iy \mapsto e^{it} \cdot (x + iy) = x \cos t - y \sin t + i(y \cos t + x \sin t)$$

eine Drehung ist, stellt die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ eine Drehstreckung dar. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene.

2. Fall: Die Abbildung $I(z) := 1/z$ nennt man die *Inversion*. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig.

Ist $z = re^{it} \neq 0$, so setzt sich die Inversion $1/z = (1/(z\bar{z})) \cdot \bar{z} = (1/r) \cdot e^{-it}$ aus der „Spiegelung am Einheitskreis“ $re^{it} \mapsto \frac{1}{r}e^{it}$ und der Spiegelung an der x -Achse zusammen.

Ist $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ eine beliebige Möbius-Transformation mit $c \neq 0$ und

$$A := \frac{bc - ad}{c} \quad \text{und} \quad B := \frac{a}{c},$$

so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz + d} + B &= \frac{(a(cz + d) + (bc - ad))}{c(cz + d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

3.1 Hilfssatz. Jede Gerade und jeder Kreis in \mathbb{C} kann durch eine Menge der Gestalt

$$M = \{\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$ beschrieben werden.

Ist $\alpha = 0$, so liegt eine Gerade vor, andernfalls ein Kreis.

BEWEIS: 1) Ist $\alpha = 0$, so muss automatisch $c \neq 0$ sein, und die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

ist eine Gerade. Umgekehrt kann jede Gerade so geschrieben werden.

2) Ist $\alpha \neq 0$, so kann man dadurch dividieren, also o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha = 1$ ist. Dann ist $r := \sqrt{c\bar{c} - \delta}$ eine positive reelle Zahl, und der Kreis um $u := -\bar{c}$ mit Radius r ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |z - u| = r &\iff (z - u)(\bar{z} - \bar{u}) = r^2 \\ &\iff z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + (u\bar{u} - r^2) = 0 \\ &\iff z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0. \end{aligned}$$

■

Jetzt können wir eine besondere Eigenschaft der gebrochen linearen Funktionen beweisen:

3.2 Satz. Eine Möbius-Transformation $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ad - bc \neq 0$ bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.

Zum BEWEIS betrachten wir eine Menge der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$. Wir müssen zeigen, dass $T(M)$ wieder eine solche Gestalt hat:

Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Es ist klar, dass eine Translation $z \mapsto z + B$ Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abbildet. Betrachten wir eine Drehstreckung $z \mapsto w = Az$ mit $A \neq 0$. Dann ist $z = w/A$. Liegt z in M , so ist

$$0 = \alpha w\bar{w} + (c\bar{A})w + (\bar{c}A)\bar{w} + A\bar{A}\delta$$

mit $(c\bar{A})(\bar{c}A) = c\bar{c}A\bar{A} > \alpha(\delta A\bar{A})$. Also ist w wieder Element einer Menge vom gewünschten Typ.

2) Nun sei $w = \frac{1}{z}$. Dann ist auch $z = \frac{1}{w}$, und es gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muss, können wir mit $w\bar{w}$ multiplizieren und erhalten:

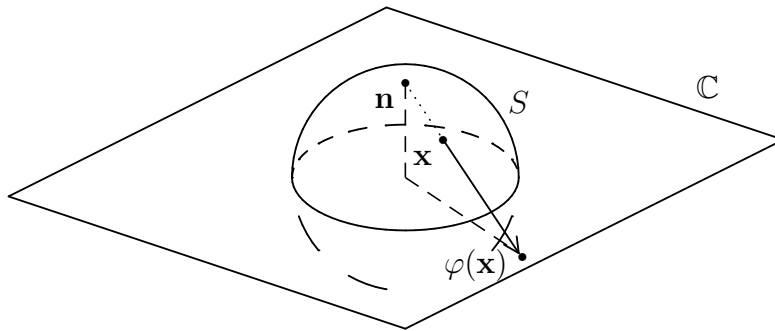
$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Auch hier ist das Bild von M wieder eine Menge vom gewünschten Typ. ■

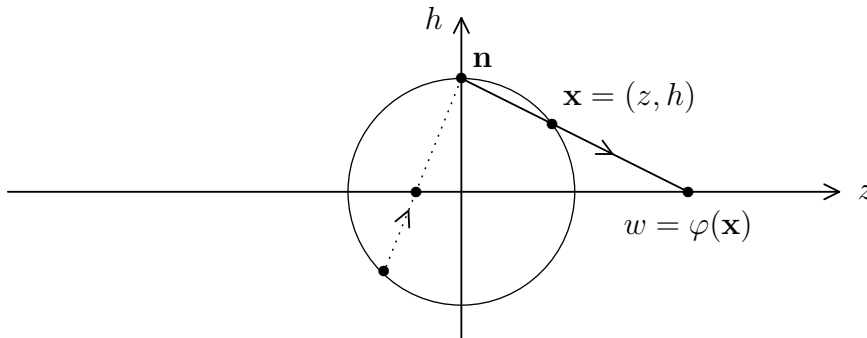
Die Menge der **Möbius-Transformationen** bildet eine Gruppe, die **Möbiusgruppe** Möb^+ .

BEWEIS: Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ induziert eine Möbius-Transformation T_A durch $T_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$. Man rechnet leicht nach, dass $T_{AB} = T_A \circ T_B$ ist. Außerdem ist $T_E = \text{id}$ und daher $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$. Daraus folgt die Gruppeneigenschaft. ■

Sei nun $S := S^2 = \{(z, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + h^2 = 1\}$ die Sphäre im \mathbb{R}^3 , $\mathbf{n} := (0, 1) \in S$ der „Nordpol“. Dann wird die *stereographische Projektion* $\varphi : S \setminus \{\mathbf{n}\} \rightarrow \mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:



Ist $\mathbf{x} = (z, h) \in S \setminus \{\mathbf{n}\}$, so trifft der Strahl, der von \mathbf{n} ausgeht und bei \mathbf{x} die Sphäre S durchstößt, in einem Punkt $\varphi(\mathbf{x})$ die komplexe Ebene:



Ist $w = \varphi(z, h)$, so liegen w und z auf dem gleichen Strahl in \mathbb{C} , der von 0 ausgeht. Also muß $w = \lambda z$ sein, mit einem reellen Faktor $\lambda > 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: Ist $h > 0$, so ist $z \neq 0$, $\lambda > 1$, und nach dem Strahlensatz besteht das Verhältnis

$$h : 1 = |w - z| : |w|.$$

Also ist $h = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, und daher $\lambda = \frac{1}{1 - h}$.

Ist $-1 < h < 0$, so ist ebenfalls $z \neq 0$ und $0 < \lambda < 1$, und man kommt zum gleichen Ergebnis. Schließlich ist $\varphi(0, -1) = 0$. Somit ist die stereographische Projektion gegeben durch

$$\varphi(z, h) = \frac{1}{1 - h} \cdot z.$$

Diese Abbildung ist sogar bijektiv! Ist nämlich $w \in \mathbb{C}$, so ist der Strahl, der von \mathbf{n} aus durch w geht, gegeben durch die Menge

$$\{(t(w, 0) + (1 - t)(0, 1) : t \geq 0\} = \{(tw, 1 - t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t \geq 0\}.$$

Es gibt genau ein t mit $|tw|^2 + (1 - t)^2 = 1$, nämlich $t = \frac{2}{|w|^2 + 1}$. Bei diesem Parameter trifft der Strahl die Sphäre im Punkt

$$\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right).$$

φ und φ^{-1} sind beides stetige Abbildungen. Nähert sich $\mathbf{x} = (z, h) \in S$ dem Nordpol $(0, 1)$, so wandert $\varphi(\mathbf{x})$ immer weiter ins Unendliche, denn es ist

$$|\varphi(z, h)|^2 = \frac{|z|^2}{(1 - h)^2} = \frac{1 - h^2}{(1 - h)^2} = \frac{1 + h}{1 - h}.$$

Es liegt daher nahe, die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} zur „abgeschlossenen Ebene“ $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu erweitern. Dann kann man auch die stereographische Projektion φ zu einer Abbildung $\overline{\varphi} : S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ erweitern, mit $\mathbf{n} = (0, 1) \mapsto \infty$. Man kann leicht zeigen, dass $\overline{\varphi}$ ein Homöomorphismus ist. Allerdings muss man dazu $\overline{\mathbb{C}}$ mit einer Topologie versehen, d.h. man muss festlegen, was Umgebungen des unendlich-fernen Punktes sind:

Ist $\varepsilon > 0$, so setzt man $U_\varepsilon(\infty) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty\}$.

Man identifiziert $\overline{\mathbb{C}}$ auf diese Weise mit der Sphäre S und spricht von der **Riemann'schen Zahlenkugel**. Und die Möbius-Transformationen lassen sich folgendermaßen auf $\overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen:

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, z \neq -d/c, \\ \infty & \text{für } z = -d/c, \\ a/c & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

Damit wird T zu einer stetigen Abbildung $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (man zeigt sehr leicht, dass affin-lineare Transformationen $z \mapsto Az + B$ und die Inversion $z \mapsto 1/z$ stetig sind).

Wir stellen uns nun die folgende Frage: Wieviele **Fixpunkte** hat eine nicht-konstante Möbius-Transformation $T(z)$?

1. Für die identische Abbildung $T(z) = \text{id}_{\mathbb{C}}$ ist jeder Punkt Fixpunkt.
2. Es sei T affin-linear, $T(z) = az + b \neq \text{id}_{\mathbb{C}}$.

Ist $a = 1$, so liegt eine Translation vor, die außer ∞ keinen Fixpunkt besitzt.

Ist $a \neq 1$, so stellen ∞ und $z = \frac{-b}{a-1}$ (die Lösung der Gleichung $az + b = z$) die einzigen Fixpunkte dar.

3. Ist $c \neq 0$, so gilt $T(z) = z$ genau dann, wenn $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ ist, und da es für eine quadratische Gleichung höchstens zwei verschiedene Lösungen gibt, hat T höchstens zwei Fixpunkte (die in \mathbb{C} liegen).

3.3 Folgerung.

1. Sei T eine Möbius-Transformation mit mehr als zwei Fixpunkten.
Dann ist $T = \text{id}_{\mathbb{C}}$.
2. Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $T \in \text{Möb}^+$.
Dann ist T durch die Bilder $T(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ eindeutig festgelegt. Dabei kann einer der Werte $= \infty$ sein.

BEWEIS: 1) Ist $T \neq \text{id}_{\mathbb{C}}$ eine Möbius-Transformation, so hat T (inkl. ∞) höchstens zwei Fixpunkte.

2) Seien $S, T \in \text{Möb}^+$ mit $S(z_i) = T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist auch $S^{-1}T$ eine Möbius-Transformation, hat aber mindestens drei Fixpunkte. Also muss $S = T$ sein! ■

Man kann sogar zu drei beliebigen Punkten und drei vorgegebenen Bildern die passende lineare Transformation konkret bestimmen.

Dazu suchen wir zunächst zu beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 eine Möbiustransformation T mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ und $T(z_3) = \infty$. Offensichtlich bildet

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

schon die Punkte z_1 und z_3 richtig ab. Allerdings ist

$$T(z_2) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Dividieren wir $T(z)$ noch durch diesen Bruch, so erhalten wir die gewünschte Transformation.

Definition:

Als **Doppelverhältnis** der Punkte z, z_1, z_2, z_3 bezeichnen wir die Größe

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

$T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ist die Möbius-Transformation mit $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$ und $z_3 \mapsto \infty$.

Bemerkung. Ist einer der drei Punkte z_1, z_2, z_3 gleich Unendlich, so vereinfacht sich die Formel. Im Falle $z_1 = \infty$ gilt z.B.

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Der fehlende Bruch

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(z/z_1) - 1}{(z_2/z_1) - 1}$$

geht gegen Eins, wenn z_1 nach Unendlich geht.

3.4 Satz. Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils paarweise verschieden, so gibt es genau eine Möbius-Transformation T mit $T(z_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.

BEWEIS: Seien $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ und $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$. Dann erfüllt die Verkettung

$$T(z) := T_2^{-1} \circ T_1(z)$$

die Forderung. Dass die Transformation T eindeutig bestimmt ist, haben wir schon gesehen. ■

3.5 Satz. Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Ein Punkt $z \in \overline{\mathbb{C}}$ liegt genau dann auf der durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreislinie (alle $z_i \in \mathbb{C}$) oder Geraden (ein $z_i = \infty$), falls das Doppelverhältnis $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine reelle Zahl oder Unendlich ist.

BEWEIS: Sei $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$, K die Gerade oder Kreislinie durch die z_i . Dann ist $T(K)$ Kreis oder Gerade durch 0, 1 und Unendlich, also $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und damit ist $z \in K$ genau dann, wenn $T(z)$ reell ist oder Unendlich. ■

Definition:

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist die **Einheitskreisscheibe**,
 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ die **obere Halbebene**.

3.6 Folgerung. Wird ein Gebiet $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ von einer Geraden oder einer Kreislinie berandet, so gibt es eine Möbius-Transformation T mit $T(G) = \mathbb{H}$.

BEWEIS: Es gibt eine Möbius-Transformation T , die ∂G auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abbildet. Weil ∂G und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ jeweils in zwei disjunkte Gebiete zerlegen, ist entweder $T(G) = \mathbb{H}$ oder $T(G) = -\mathbb{H}$. Im letzteren Falle schalte man noch die Abbildung $z \mapsto -z$ dahinter. ■

Beispiel.

Die Abbildung

$$C(z) := i \cdot \frac{1+z}{1-z} = DV(z, -1, -i, 1)$$

bildet die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ab, denn -1 , $-i$ und 1 liegen alle auf $\partial\mathbb{D}$, und es ist $C(0) = i$. Also ist $C(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$w = \frac{i + iz}{1 - z}, \quad \text{also } z = C^{-1}(w) = \frac{w - i}{w + i}.$$

Man spricht auch von der **Cayley-Abbildung**.

3.7 Satz. Eine Möbius-Transformation $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ bildet genau dann \mathbb{H} bijektiv auf sich ab, wenn a, b, c, d reell sind und $ad - bc > 0$ ist.

BEWEIS: T bildet genau dann \mathbb{H} auf sich ab, wenn $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf sich und i nach \mathbb{H} abgebildet wird.

a) Sei $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ (und deshalb $T(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$). Dann gibt es Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{H}$, die auf $0, 1$ und ∞ abgebildet werden, und die müssen dann natürlich reell oder $= \infty$ sein. Weil $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ist, müssen die Koeffizienten a, b, c, d von T reell sein. Außerdem ist

$$\text{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) = \text{Im}\left(\frac{(ai + b)(d - ci)}{(d + ci)(d - ci)}\right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Also liegt $T(i)$ genau dann in \mathbb{H} , wenn $ad - bc > 0$ ist.

b) Sind umgekehrt a, b, c, d reell, so wird $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ nach $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abgebildet, also \mathbb{H} nach \mathbb{H} oder $-\mathbb{H}$. Die Bedingung $ad - bc > 0$ sorgt dafür, dass Ersteres der Fall ist. ■

Ein glatter differenzierbarer Weg in \mathbb{C} ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Beispiele.

1. Sei $L = \{z = a + tu \in \mathbb{C} : t \in \mathbb{R}\}$ (mit $|u| = 1$) eine Gerade durch a in Richtung u . Dann ist die Parametrisierung $\alpha(t) := a + tu$ von L ein glatter differenzierbarer Weg mit $\alpha(0) = a$ und $\alpha'(0) = u$.
2. Sei $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ der Kreis mit Radius r um z_0 . Setzt man

$$\kappa_K(z) := |z - z_0|^2 - r^2,$$

so ist $K = \{z \in \mathbb{C} : \kappa_K(z) = 0\}$. Der Kreis K berandet die Scheibe $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : \kappa_K(z) < 0\}$, deshalb schreibt man auch $K = \partial D_r(z_0)$. Das „Äußere“ des Kreises K ist die Menge der z mit $\kappa_K(z) > 0$.

Ist $z \in K$, so ist die Tangente an K in z die Senkrechte zur Geraden z_0z in z . Der Kreis wird parametrisiert durch $\alpha(t) := z_0 + re^{it} = (x_0 + r \cos t) + i(y_0 + r \sin t)$. Es ist $\alpha'(t) = -r \sin t + ir \cos t$. Setzt man $\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(z\bar{w})$, so ist

$$\langle x + iy, u + iv \rangle = \operatorname{Re}((x + iy)(u - iv)) = xu + yv$$

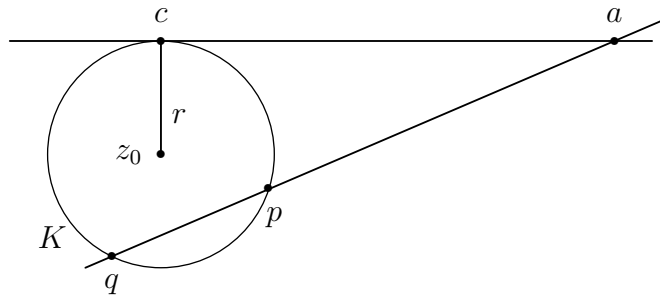
das gewöhnliche Skalarprodukt. Zwei Vektoren v, w stehen bekanntlich genau dann aufeinander senkrecht, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ ist. Tatsächlich ist $\langle \alpha(t) - z_0, \alpha'(t) \rangle = r^2(-\cos t \sin t + \sin t \cos t) = 0$.

3.8 Sehnen-Tangenten-Satz. Sei a ein Punkt im Äußeren des Kreises $K = \{z = z_0 + re^{it} : t \in \mathbb{R}\}$, p und q die zwei Schnittpunkte einer Geraden $L = \{z = a + tu : t \in \mathbb{R}\}$ (mit $|u| = 1$) mit dem Kreis K . Außerdem sei c der Berührungspunkt der Tangenten an K durch a . Dann ist

$$|c - a|^2 = |q - a| \cdot |p - a|.$$

BEWEIS: Wenn es zwei Schnittpunkte gibt, ist L eine Sekante, das Stück zwischen p und q eine Sehne. Es gilt:

$$\begin{aligned} z = a + tu \in K \cap L &\iff z = a + tu \text{ und } \kappa_K(z) = 0 \\ &\iff z = a + tu \text{ und } |a + tu - z_0|^2 - r^2 = 0 \\ &\iff z = a + tu \text{ und } (tu + (a - z_0)) \cdot (t\bar{u} + (\bar{a} - \bar{z}_0)) - r^2 = 0 \\ &\iff z = a + tu \text{ und } t^2 + 2t\langle u, a - z_0 \rangle + \kappa_K(a) = 0. \end{aligned}$$



Es sei $p = a + t_0 u$ und $q = a + s_0 u$. Dann sind s_0 und t_0 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$t^2 + 2t\langle u, a - z_0 \rangle + \kappa_K(a) = 0,$$

insbesondere ist $|q - a| \cdot |p - a| = |s_0| \cdot |t_0| = \kappa_K(a)$. Nach Pythagoras ist außerdem $|a - z_0|^2 = r^2 + |c - a|^2$, also $\kappa_K(a) = |c - a|^2$. ■

Wir betrachten nun die Spiegelung am Kreis genauer.

Im Falle des Einheitskreises ist die Spiegelung an $\partial\mathbb{D}$ gegeben durch

$$z = re^{it} \mapsto \frac{1}{r}e^{it} = \frac{1}{re^{-it}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Die Spiegelung an einem beliebigen Kreis $K = \partial D_r(z_0)$ ist dann analog gegeben durch

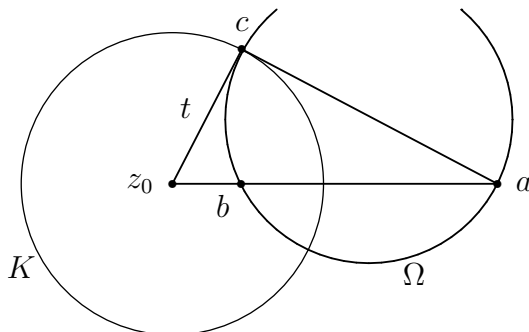
$$z = z_0 + \varrho e^{it} = z_0 + t(re^{it}) \mapsto z_0 + \frac{1}{t}(re^{it}) = z_0 + \frac{r^2}{\varrho e^{-it}} = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$

mit $t := \varrho/r$. Diese Spiegelung sei mit σ (im Falle des Einheitskreises) und mit σ_K (im Falle eines beliebigen Kreises K) bezeichnet.

3.9 Satz. Sei $K = \partial D_r(z_0)$, a ein Punkt außerhalb von K und $b = \sigma_K(a)$ die Spiegelung von a an K . Ein Kreis Ω durch a geht genau dann auch durch b , wenn er K in zwei Punkten orthogonal trifft. In diesem Falle bildet σ_K den Kreis Ω auf sich ab.

BEWEIS: Der Kreis Ω gehe durch a und b . Dann sei t die Tangente durch z_0 an Ω , c der Punkt, an dem t den Kreis Ω berührt. Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz ist

$$|c - z_0|^2 = |b - z_0| \cdot |a - z_0| = r^2, \quad \text{also } c \in K.$$



Die Strecke von z_0 nach c steht in c auf der Tangente an K senkrecht, und zugleich ist sie Tangente an Ω . Das bedeutet, dass Ω und K in c (und aus Symmetriegründen auch in dem zweiten Schnittpunkt) zueinander orthogonal sind.

Ist umgekehrt Ω ein Kreis durch a , der K orthogonal schneidet, sowie b der zweite Schnittpunkt der Verbindungsstrecke von z_0 und b , so folgt aus dem Sehnen-Tangenten-Satz, dass $|b - z_0| \cdot |a - z_0| = r^2$ ist, und das bedeutet, dass b bezüglich K der Spiegelpunkt von a ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Ω in der gegebenen Situation durch σ_K auf sich abgebildet wird. Aber das folgt wieder aus dem Sehnen-Tangenten-Satz, angewandt auf beliebige Geraden durch z_0 . ■

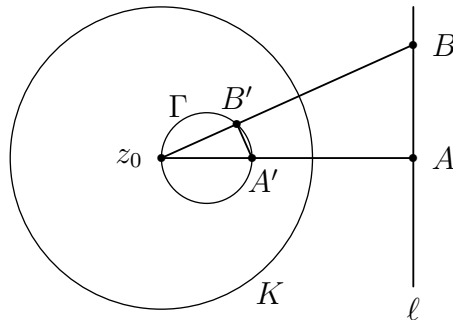
3.10 Satz. Sei $K = \partial D_r(z_0)$, a ein Punkt außerhalb von K und $b = \sigma_K(a)$ die Spiegelung von a an K .

a) Die Gerade durch a und z_0 wird durch σ_K auf sich abgebildet.

b) Eine Gerade durch a , die z_0 nicht trifft, wird durch σ_K auf einen Kreis durch z_0 abgebildet.

BEWEIS: a) ist trivial.

b) Die Gerade ℓ durch a gehe nicht durch z_0 . Sei A der Fußpunkt des Lotes von z_0 auf ℓ , A' der Spiegelpunkt von A bezüglich K . Weiter sei Γ der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{z_0 A'}$.



Sei $B \in \ell$, $B \neq A$, sowie B' der Schnittpunkt von $\overline{z_0 B}$ mit Γ . Nach dem Satz von Thales ist das Dreieck $z_0 A' B'$ bei B' rechtwinklig. Daher sind die Dreiecke $z_0 A' B'$ und $B z_0 A$ ähnlich, und weil A und A' spiegelbildlich zu K liegen, gilt:

$$\overline{z_0 B'} : \overline{z_0 A'} = \overline{z_0 A} : \overline{z_0 B}, \text{ also } \overline{z_0 B} \cdot \overline{z_0 B'} = \overline{z_0 A} \cdot \overline{z_0 A'} = r^2.$$

Aber das bedeutet, dass B und B' spiegelbildlich bezüglich K liegen. ■

Sind $z = r_1 \cdot e^{it_1}$ und $w = r_2 \cdot e^{it_2}$ zwei komplexe Zahlen $\neq 0$, so verstehen wir unter dem Winkel zwischen z und w die Zahl

$$\angle(z, w) = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{falls } t_2 > t_1 \\ 2\pi + t_2 - t_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Winkel $\angle(z, w)$ wird also von z aus immer in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen. Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei glatte differenzierbare Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, so setzt man

$$\angle(\alpha, \beta) := \angle(\alpha'(0), \beta'(0)).$$

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in z_0 **winkeltreu**, falls für beliebige glatte differenzierbare Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gilt:

$$\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta).$$

Ist f injektiv, winkeltreu und orientierungserhaltend, so nennt man f **konform**.

3.11 Satz. *Die Möbius-Transformationen sind konform.*

BEWEIS: Da es nur um die **Tangenten** an glatte Kurven geht, können wir uns auf Geraden oder Kreise beschränken, und bei den Möbius-Transformationen müssen wir nur affin-lineare Transformationen und die Inversion betrachten.

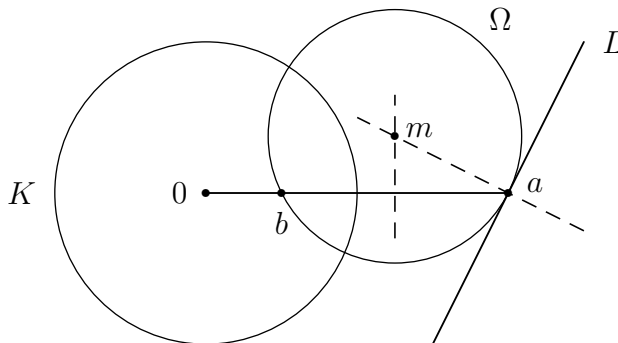
1. Fall: $T(z) = Az + B$ (mit $A = re^{i\varphi}$).

Wir betrachten zwei Geraden $L_k = \{z = a + tu_k : t \in \mathbb{R}\}$ durch a (mit $|u_k| = 1$), $k = 1, 2$. Ist $u_k = e^{i\theta_k}$, so ist also $\angle(L_1, L_2) = \theta_2 - \theta_1$.

Weiter ist $T(a + tu_k) = (Aa + B) + t(Au_k)$ mit $Au_k = (re^{i\varphi}) \cdot e^{i\theta_k} = re^{i(\varphi + \theta_k)}$. Also ist $\angle(T(L_1), T(L_2)) = (\theta_2 + \varphi) - (\theta_1 + \varphi) = \theta_2 - \theta_1 = \angle(L_1, L_2)$.

2. Fall: $T(z)$ sei die Inversion $I(z) = 1/z$.

Vorbetrachtung: Sei $K = \partial\mathbb{D}$ der Einheitskreis, a ein Punkt im Äußeren von K und L eine Gerade durch a , die nicht durch den Nullpunkt geht. Weiter sei b der Spiegelpunkt zu a bezüglich $\partial\mathbb{D}$. Dann gibt es einen Kreis Ω durch a und b , der L in a berührt und K in zwei Punkten orthogonal trifft. (Der Mittelpunkt von Ω ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von \overline{ab} mit der Senkrechten zu L in a .)



Sind nun zwei sich in a schneidende Geraden L_1, L_2 gegeben, so kann man sie als Tangenten zweier Kreise Ω_1, Ω_2 durch a und b auffassen, die K jeweils orthogonal treffen.

Solche Kreise werden durch die Spiegelung σ auf sich abgebildet. Das bedeutet, dass sich Ω_1 und Ω_2 in $b = \sigma(a)$ unter dem gleichen Winkel wie in a treffen. Dies ist der Winkel zwischen $\sigma(L_1)$ und $\sigma(L_2)$.

Also ist die Kreisspiegelung σ winkeltreu, mit der Einschränkung, dass die Orientierung der Winkel umgekehrt wird. Das Gleiche gilt für die Spiegelung $\text{conj} : z \mapsto \bar{z}$. Weil sich die Inversion aus σ und conj zusammensetzt, ist sie konform. ■

Man kann die Cayley-Abbildung benutzen, um diejenigen linearen Transformationen zu finden, die das Innere \mathbb{D} des Einheitskreises auf sich abbilden. Wir wollen das hier aber etwas anders machen.

3.12 Hilfssatz. Sei K ein fester Kreis und T eine Möbius-Transformation. Liegen z und w spiegelbildlich bezüglich K , so liegen auch $z^* = T(z)$ und $w^* = T(w)$ spiegelbildlich bezüglich $K' = T(K)$.

BEWEIS: Ist $K = \{z = z_0 + re^{it} : t \in \mathbb{R}\}$, so ist die Spiegelung an K gegeben durch $\sigma_K : z \mapsto w = z_0 + r^2/(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Sei w der Spiegelpunkt zu z (bezüglich K). Ist Ω ein Kreis durch z , der orthogonal zu K ist, so trifft die Gerade durch z_0 und z den Kreis Ω in $w = \sigma_K(z)$ (gemäß Sehnen-Tangenten-Satz). Seien nun Ω_1, Ω_2 zwei solche zu K orthogonale Kreise durch z . Dann treffen sich diese beiden Kreise auch in w .

Weil T konform ist, schneiden die Bildkreise $T(\Omega_1)$ und $T(\Omega_2)$ den Kreis $K' = T(K)$ wieder orthogonal, und sie schneiden sich außerdem gegenseitig in den Punkten z^* und w^* . Offensichtlich ist w^* Spiegelpunkt zu z^* bezüglich K' (wieder gemäß Sehnen-Tangenten-Satz). ■

3.13 Satz. Die Möbius-Transformationen, die \mathbb{D} auf sich abbilden, sind genau die Transformationen der Gestalt

$$T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \text{ mit } \theta \in [0, 2\pi) \text{ und } \alpha \in \mathbb{D}.$$

BEWEIS: a) Durch $w \mapsto e^{i\theta} \cdot w$ wird eine Drehung um den Nullpunkt definiert, die offensichtlich \mathbb{D} auf \mathbb{D} abbildet. Ist $\alpha \in \mathbb{D}$ und $f(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, so gilt für $z \in \partial\mathbb{D}$:

$$z\bar{z} = 1 \text{ und } f(z)\overline{f(z)} = \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(1 - \bar{\alpha}z)(1 - \alpha\bar{z})} = \frac{1 + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{z} - z\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}} = 1.$$

Also ist $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, und weil außerdem $f(\alpha) = 0$ ist, ist $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Das heißt, dass alle Transformationen der Gestalt $T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ (mit $\alpha \in \mathbb{D}$) den Einheitskreis auf sich abbilden.

b) Sei nun T eine Möbius-Transformation, die \mathbb{D} auf sich abbildet. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{D}$ mit $T(\alpha) = 0$. Wir setzen $T_\alpha(z) := (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$. Dann ist auch $T \circ T_\alpha^{-1}$ eine Möbius-Transformation mit $T \circ T_\alpha^{-1}(0) = 0$. Nach dem Hilfssatz muss der Spiegelpunkt von 0 bezüglich $\partial\mathbb{D}$ (also der Punkt ∞) auf den Spiegelpunkt des Bildes von 0 abgebildet werden, d.h. es ist $T \circ T_\alpha^{-1}(\infty) = \infty$.

Setzt man $S(w) := T \circ T_\alpha^{-1}(w)$ in der Form $(aw + b)/(cw + d)$ an, so folgt aus den Eigenschaften $S(0) = 0$ und $S(\infty) = \infty$, dass es eine Konstante $q \neq 0$ mit $S(w) = qw$ gibt. Weil $T \circ T_\alpha^{-1}$ den Einheitskreis auf sich abbildet, muss $|q| = 1$ sein. Setzt man $w = T_\alpha(z)$ ein, so folgt: $T(z) = q \cdot T_\alpha(z)$. ■

Wir nennen die gefundenen Abbildungen die **Automorphismen des Einheitskreises**.

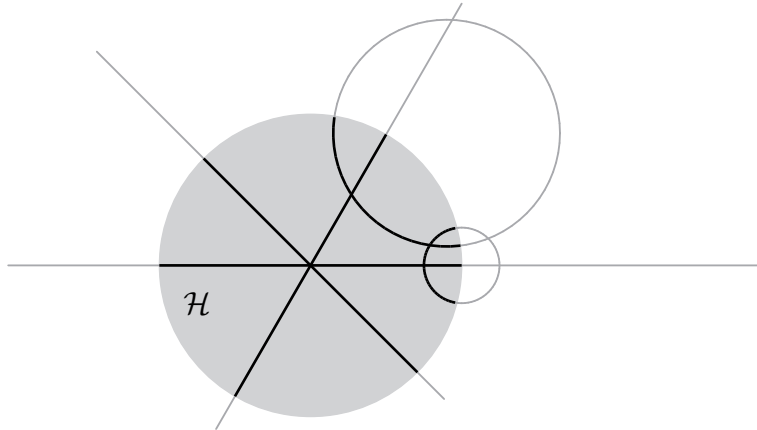
3.14 Satz. *Zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ gibt es einen Automorphismus T des Einheitskreises mit $T(z_1) = z_2$.*

BEWEIS: Für $\alpha \in \mathbb{D}$ sei $T_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$. Dann ist $T := T_{z_2}^{-1} \circ T_{z_1}$ ein Automorphismus von \mathbb{D} mit $T(z_1) = T_{z_2}^{-1}(0) = z_2$. ■

4.4 Das Poincaré-Modell

Als Modell für die **hyperbolische Ebene** \mathcal{H} benutzen wir das Innere des Einheitskreises $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Eine **hyperbolische Gerade** ist eine Menge $g = K \cap \mathbb{D}$, wobei K ein sogenannter „Orthokreis“ ist, also ein Kreis, der $\partial\mathbb{D}$ in zwei Punkten orthogonal trifft. Dazu gehören auch die in \mathbb{D} gelegenen Stücke von Geraden durch den Nullpunkt.



Wir sprechen von h -Punkten und h -Geraden. Untersuchen wir die Gültigkeit der Inzidenz-Axiome:

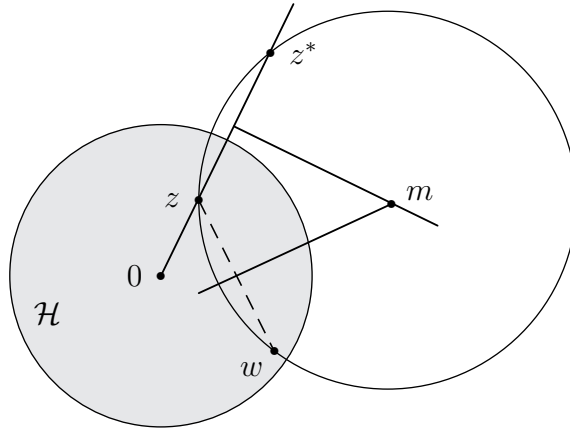
(I-1) Gegeben seien zwei h -Punkte z und w . Wir müssen zeigen, dass es genau eine h -Gerade durch z und w gibt.

Sei zunächst einer der Punkte der Ursprung. Es gibt keinen Orthokreis durch 0 , denn die Tangente an einen solchen Kreis im Schnittpunkt mit $\partial\mathbb{D}$ müsste ein Radius von \mathbb{D} sein, dürfte den Orthokreis aber nur in einem Punkt treffen. Also ist in diesem Falle die euklidische Gerade durch z und w die gesuchte h -Verbindung.

Sind $z, w \in \mathbb{D}$ beliebig, so gibt es einen Automorphismus T von \mathbb{D} mit $T(z) = 0$. Sei $u := T(w)$. Wenn es zwei verschiedene Orthokreise durch z und w gäbe, so müsste es zwei verschiedene Geraden durch 0 und u geben. Das kann nicht sein. Es bleibt also nur noch die Existenz eines Orthokreises durch z und w zu zeigen. Aber dafür kann man das Urbild der Verbindungsgeraden von 0 und u unter T benutzen.

Eine Konstruktion des Orthokreises durch z und w erhält man wie folgt:

- a) Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{zw} .
- b) Spiegelt man z.B. z an $\partial\mathbb{D}$, so erhält man einen Punkt z^* außerhalb des Einheitskreises, und $\overline{zz^*}$ ist eine Sehne des Orthokreises, deren Mittelsenkrechte ebenfalls den Mittelpunkt m des gesuchten Kreises enthält.



Die Axiome (I-2) und (I-3) sind offensichtlich erfüllt. Jede h -Gerade enthält mindestens zwei Punkte, und die h -Punkte -0.5 , 0.5 und $0.5i$ liegen nicht auf einer h -Geraden.

Die Anordnungsaxiome (A-1), (A-2), (A-3) und (A-4) sind trivialerweise erfüllt. Da jeder Orthokreis \mathbb{D} in genau zwei Teile zerlegt, ist auch das Pasch-Axiom (A-5) erfüllt.

Als h -Winkel zwischen zwei h -Geraden bezeichnen wir einfach den Winkel zwischen den Tangenten.

Als nächstes brauchen wir Bewegungen. Das ist ein wenig komplizierter.

Wenn eine Geometrie die Bewegungsaxiome erfüllt, dann kann man die Existenz von Spiegelungen beweisen, und es gilt:

4.1 Satz. *Jede Bewegung ist Verknüpfung von höchstens drei Spiegelungen.*

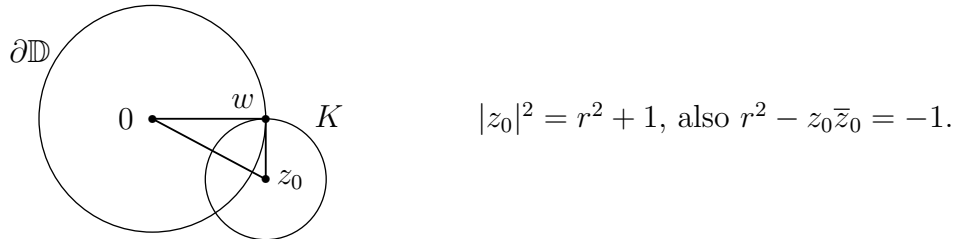
BEWEIS: Seien \overline{AB} und $\overline{A'B'}$ zwei verschiedene kongruente Strecken. Es gibt genau eine Bewegung T , die A auf A' und B auf B' abbildet und dabei einer bestimmten Seite von AB eine bestimmte Seite von $A'B'$ zuordnet.

Sei ℓ_1 die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$ und σ_1 die Spiegelung an ℓ_1 . Dann ist $\sigma_1(A) = A'$ und $\sigma_1(B)$ irgend ein Punkt B'' . Ist $B'' = B'$, so ist alles gut. Andernfalls sei ℓ_2 die Winkelhalbierende von $\angle BA'B''$ und σ_2 die Spiegelung an ℓ_2 .

Weil $\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B''}$ ist, gilt: $\sigma_2(B'') = B'$ und $\sigma_2(A') = A'$. Damit bildet $\sigma_2 \circ \sigma_1$ A auf A' und B auf B' ab. Müssen noch die Seiten von $A'B'$ vertauscht werden, so benötigt man noch eine dritte Spiegelung (diesmal an $A'B'$). ■

Nachdem Spiegelungen eine so wichtige Rolle spielen, kann man versuchen, die hyperbolischen Bewegungen aus Spiegelungen aufzubauen.

Sei K ein Orthokreis um z_0 mit Radius r und w ein Schnittpunkt von K und $\partial\mathbb{D}$. Weil das Dreieck mit den Ecken 0 , z_0 und w bei w rechtwinklig ist, gilt nach Pythagoras:



Ist z gegeben und z^* der Spiegelpunkt von z an K , so ist

$$z^* = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0\bar{z} + r^2 - |z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{z}_0} = c \cdot \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \alpha\bar{z}},$$

mit $c := -z_0/\bar{z}_0$ und $\alpha := 1/z_0$. Dann ist $|c| = 1$ und $|\alpha| < 1$. Also ist die Spiegelung $z \mapsto z^*$ ein Automorphismus des Einheitskreises, verknüpft mit der Konjugation $\text{conj} : z \mapsto \bar{z}$.

Als (**hyperbolische**) **Bewegungen** nehmen wir deshalb die von conj und den Automorphismen von \mathbb{D} erzeugte Gruppe \mathcal{B}_h . Diese enthält die „hyperbolischen Translationen“ $T_\alpha(z) := (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$ (mit $\alpha \mapsto 0$), die Drehungen $D_\theta(z) := e^{i\theta}z$ um den Nullpunkt und die Spiegelung conj an der x -Achse (und natürlich alle Spiegelungen an Orthokreisen).

Axiom (B-1) ergibt sich aus der Konstruktion. Da Möbius-Transformationen Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbilden und außerdem konform sind (also Orthokreise auf Orthokreise abbildet), ist auch Axiom (B-2) erfüllt.

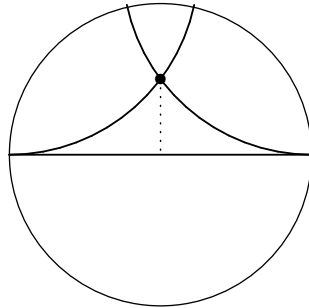
Sind A , B und C drei nicht-kollineare Punkte von \mathcal{H} , so kann man A mit einer hyperbolischen Translation in den Nullpunkt verschieben, dann den Bildpunkt von B auf einen Punkt B' auf der positiven reellen Achse drehen und schließlich – falls noch notwendig – mit Hilfe von conj das Bild von C in die obere Halbebene spiegeln. Das ergibt das wichtige Axiom (B-3).

Kommen wir zum Axiom (B-4). Zu zwei Punkten $z, w \in \mathcal{H}$ wird eine Bewegung gesucht, die z auf w und w auf z abbildet. Man kann zunächst mit einer Bewegung φ_0 erreichen, dass z auf 0 und w auf ein reelles r mit $0 < r < 1$ abgebildet wird. Danach wende man noch $\varphi(z) := (r - z)/(1 - rz)$ an. Offensichtlich ist $\varphi(r) = 0$ und $\varphi(0) = r$. Die Bewegung $\varphi_0^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_0$ leistet das Gewünschte.

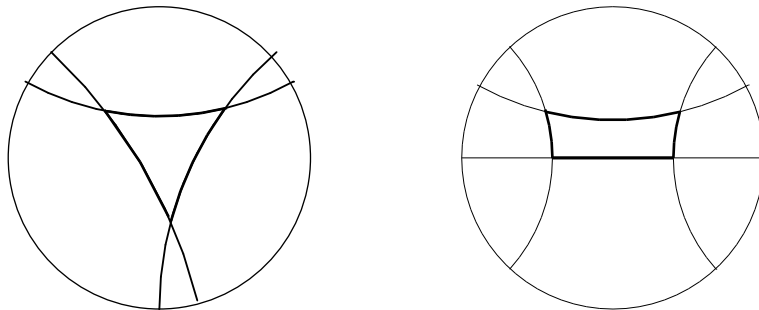
Sei nun ein Winkel $\angle vuw$ gegeben. Wegen des Axioms (B-3) können wir annehmen: $u = 0$, v reell und > 0 , $w \in \mathbb{H} \cap \mathbb{D}$. Mit einer weiteren Drehung kann man erreichen, dass die Strahlen \vec{uw} und \vec{vw} symmetrisch zur x -Achse liegen, dass also die x -Achse die Winkelhalbierende des gegebenen Winkels ist. Die Spiegelung $\text{conj} : z \mapsto \bar{z}$ vertauscht dann die Schenkel des Winkels. So erhält man Axiom (B-5).

Da alle hyperbolischen Geraden in diesem Modell homöomorph zu einem offenen Intervall und damit zur reellen Achse sind, ist auch das Dedekind-Axiom (und damit alle Stetigkeitsaxiome inkl. Kreisaxiom) erfüllt.

Die hyperbolische Ebene \mathcal{H} mit den hyperbolischen Geraden (Orthokreisen) und der Gruppe \mathcal{B}_h der hyperbolischen Bewegungen stellt somit ein vollständiges Modell für die neutrale Geometrie dar. Allerdings ist nicht das euklidische Parallelenaxiom, sondern das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt:



Man kann auch leicht Dreiecke mit einer Winkelsumme $< \pi$ finden, oder Saccheri-Vierecke, in denen die Hypothese vom spitzen Winkel erfüllt ist.



Um nun in unserem Modell auch Längen messen zu können, führen wir eine \mathcal{B}_h -invariante Metrik auf \mathbb{D} ein, also eine Abbildung $d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(z, w) \geq 0$ für alle $z, w \in \mathbb{D}$.
2. $d(z, w) = d(w, z)$.
3. $d(z, w) = 0 \iff z = w$.
4. $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$.
5. $d(f(z), f(w)) = d(z, w)$ für jede hyperbolische Bewegung f .

Behauptung: Wenn wir noch fordern, dass $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(0, t)}{t} = 1$ ist, also d im Nullpunkt „fast euklidisch“, und außerdem $d(0, x_1) + d(x_1, x_2) = d(0, x_2)$ für x_1, x_2 reell und $0 < x_1 < x_2 < 1$, so ist die Metrik schon festgelegt.

BEWEIS: Es gebe eine Metrik der gewünschten Art, und für $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < 1$ sei $\psi(t) := d(0, t)$.

Für $\alpha \in \mathbb{D}$ haben wir den Automorphismus $T_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ eingeführt. Da $T_r(r) = 0$ ist, ist

$$d(r, r + \varepsilon) = d(T_r(r), T_r(r + \varepsilon)) = \psi(T_r(r + \varepsilon)).$$

Also muss gelten:

$$\psi(r + \varepsilon) = \psi(r) + \psi\left(\frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2}\right).$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(r + \varepsilon) - \psi(r)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \psi\left(\frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2}\right) \\ &= \frac{1}{1 - r\varepsilon - r^2} \cdot \left[\psi\left(\frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2}\right) \middle/ \frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2} \right] \\ &\longrightarrow \frac{1}{1 - r^2} \quad (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: ψ ist differenzierbar, und es ist $\psi'(t) = \frac{1}{1 - t^2}$, also

$$d(0, r) = \psi(r) - \psi(0) = \int_0^r \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + r}{1 - r} + c,$$

für reelles $r > 0$. Lässt man noch r gegen Null gehen, so erhält man, dass $c = 0$ sein muss.

Sind $z, w \in \mathbb{D}$ beliebig, so ist $T_z(z) = 0$ und $T_z(w) = \frac{w - z}{1 - \bar{z}w}$. Indem man noch eine Drehung dahinter schaltet, gewinnt man einen Automorphismus T von \mathbb{D} mit

$$T(z) = 0 \quad \text{und} \quad T(w) = \delta(w, z) := \left| \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} \right|.$$

Dann muss $d(z, w) = d(0, \delta(w, z))$ sein, und der rechte Ausdruck ist oben schon berechnet worden. ■

Die obigen Berechnungen sollten nur die Motivation für unser Tun liefern. Aber jetzt gilt tatsächlich:

4.2 Satz. *Durch*

$$d_h(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z, w)}{1 - \delta(z, w)} \quad (\text{mit } \delta(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|)$$

wird eine \mathcal{B}_h -invariante Metrik auf \mathbb{D} definiert.

BEWEIS:

$\delta(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| = \left| \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} \right|$ ist unabhängig von der Reihenfolge von z und w , stets ≥ 0 und genau dann $= 0$, wenn $z = w$ ist. Diese Eigenschaften vererben sich sofort auch auf $d_h(z, w)$.

Ist T ein Automorphismus von \mathbb{D} und sind $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$ beliebige Punkte, so gilt mit $w_1 := Tz_1$ und $w_2 := Tz_2$:

$F := T_{w_1} \circ T \circ T_{z_1}^{-1}$ ist auch ein Automorphismus von \mathbb{D} , jetzt aber mit $F(0) = 0$. Also ist F eine Drehung D_θ , und es folgt:

$$T_{w_1}(w_2) = T_{w_1} \circ T(z_1) = F \circ T_{z_1}(z_2) = D_\theta \circ T_{z_1}(z_2),$$

also $\delta(w_1, w_2) = |T_{w_1}(w_2)| = |T_{z_1}(z_2)| = \delta(z_1, z_2)$ und damit

$$d_h(Tz_1, Tz_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(w_1, w_2)}{1 - \delta(w_1, w_2)} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = d_h(z_1, z_2).$$

Insbesondere ist $d_h(z, w) = d_h(0, \delta(z, w))$.

Es bleibt die Dreiecks-Ungleichung zu zeigen. Wegen der Bewegungsinvarianz genügt es, den Fall $d_h(z, w) \leq d_h(z, 0) + d_h(0, w)$ zu betrachten. Ist $z = re^{i\tau}$ und $w = se^{i\sigma}$, sowie $\alpha := \sigma - \tau$, so gilt:

$$\begin{aligned} d_h(z, 0) + d_h(0, w) &= d_h(0, r) + d_h(0, s) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\log \frac{1+r}{1-r} + \log \frac{1+s}{1-s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{(1+rs) + (r+s)}{(1+rs) - (r+s)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1 + (r+s)/(1+rs)}{1 - (r+s)/(1+rs)} \end{aligned}$$

und

$$d_h(z, w) = d_h(r, se^{i\alpha}) = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+R}{1-R},$$

mit $R := \delta(r, se^{i\alpha}) = \left| \frac{r - se^{i\alpha}}{1 - rse^{-i\alpha}} \right|$. Wir setzen

$$g(\alpha) := R^2 = \left| \frac{r - se^{i\alpha}}{1 - rse^{-i\alpha}} \right|^2 = \frac{r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha}{1 + r^2s^2 - 2rs \cos \alpha}.$$

$g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und man rechnet leicht nach (siehe Nebenrechnung 1), dass genau dann $g'(\alpha) = 0$ ist, wenn $\sin \alpha = 0$ ist.

Nebenrechnung 1: Es ist $g(\alpha) = (a - c \cos \alpha)/(b - c \cos \alpha)$, mit $a := r^2 + s^2$, $b := 1 + r^2s^2$ und $c = 2rs$, also $b - a = (1 - r^2)(1 - s^2) > 0$. Nun gilt:

$$g'(\alpha) = \frac{c \sin \alpha (b - c \cos \alpha) - (a - c \cos \alpha) c \sin \alpha}{(b - c \cos \alpha)^2} = \frac{c \sin \alpha (b - a)}{(b - c \cos \alpha)^2}.$$

(Ende der Nebenrechnung 1).

Also gilt $g'(\alpha) = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ ist. Nun ist

$$g(0) = \left(\frac{r-s}{1-rs} \right)^2 \leq \left(\frac{r+s}{1+rs} \right)^2 = g(\pi).$$

Die Ungleichung in der Mitte zeigen wir in der folgenden

Nebenrechnung 2: Es ist $0 \leq r < 1$ und $0 \leq s < 1$, also $2r^2s \leq 2s$. Daraus folgt:

$$(r^2s - s) + r - rs^2 \leq (s - r^2s) + r - rs^2$$

und damit

$$(r-s)(1+rs) \leq (r+s)(1-rs). \quad (*)$$

Analog folgt aus $2rs^2 \leq 2r$ die Ungleichung

$$-(r+s)(1-rs) \leq (r-s)(1+rs). \quad (**)$$

Die Ungleichungen (*) und (**) ergeben zusammen:

$$-(r+s)(1-rs) \leq (r-s)(1+rs) \leq (r+s)(1-rs),$$

$$\text{d.h. } |r-s| \cdot (1+rs) \leq (r+s) \cdot (1-rs).$$

Quadrieren und Über-Kreuz-Dividieren ergibt die gewünschte Ungleichung.

(Ende der Nebenrechnung 2).

Also nimmt $g(\alpha)$ für $\alpha = \pi$ sein globales Maximum an. Damit ist

$$R = \sqrt{g(\alpha)} \leq \sqrt{g(\pi)} = \frac{r+s}{1+rs}.$$

Nebenrechnung 3: Die Funktion $y \mapsto \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} = \text{Artanh} y$ ist die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus $\tanh x := \sinh x / \cosh x$. Es ist

$$\tanh' x = \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0.$$

Das bedeutet, dass $\tanh x$ streng monoton wachsend ist, und das Gleiche gilt dann auch für die Umkehrfunktion.

(Ende der Nebenrechnung 3).

Weil $R \leq (r+s)/(1+rs)$ ist, folgt:

$$d_h(z, w) = \text{Artanh}(R) \leq \text{Artanh}\left(\frac{r+s}{1+rs}\right) = d_h(z, 0) + d_h(0, w). \quad \blacksquare$$

Die hyperbolische Metrik

$$d_h(z, w) := \text{Artanh} \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|$$

hat die Eigenschaft, dass der Rand des Einheitskreises von den inneren Punkten unendlichen Abstand hat. Das Poincaré-Modell ist also zwar konform, es gibt aber nicht die wahren metrischen Verhältnisse wieder.

In unserem Modell können wir nun alles berechnen, was wir wollen. Wir werden das am Beispiel des Parallelitätswinkels demonstrieren:

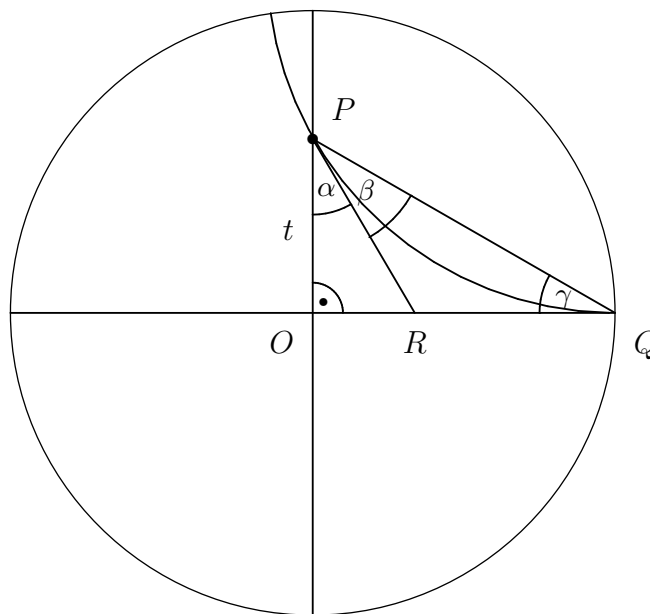
Jeder auf einem von 0 ausgehenden Strahl befindlichen Strecke mit der **euklidischen Länge** t ist auch ihre **hyperbolische Länge**

$$x = x(t) := \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

zugeordnet. Dann ist

$$e^{2 \cdot x(t)} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Wir betrachten nun folgende Situation:



Es sei O der Nullpunkt, $P := it$ und $\alpha := \Pi(x(t))$ der Parallelitätswinkel. $Q := 1$ ist für die nichteuklidische Geometrie auf \mathbb{D} ein „idealer Punkt“. Die hyperbolische Parallele zu \overrightarrow{OQ} durch P ist der Orthokreis, der die reelle Achse bei Q tangential berührt und die imaginäre Achse bei P unter dem Winkel α schneidet. Die (euklidische) Tangente an diesen Orthokreis in P möge die reelle Achse in R treffen.

Von nun an können wir rein euklidisch argumentieren! Die beiden Tangenten PR und QR treffen sich auf der Mittelsenkrechten zu \overline{PQ} . Also ist das Dreieck QPR gleichschenkelig, und die Basiswinkel $\beta := \angle QPR$ und $\gamma := \angle PQR$ sind gleich. Im rechtwinkligen Dreieck QPO gilt daher:

$$\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) + \beta = \pi, \quad \text{also } \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Da $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ und allgemein $\tan(\varphi - \psi) = \frac{\tan \varphi - \tan \psi}{1 + \tan \varphi \tan \psi}$ ist, folgt:

$$\tan(\beta) = \frac{1 - \tan(\alpha/2)}{1 + \tan(\alpha/2)}.$$

Da außerdem die Kathete \overline{OQ} des Dreiecks QPO die Länge 1 hat, gilt die Gleichung $t : 1 = \tan \gamma$, und damit für die hyperbolische Länge $x = x(t)$:

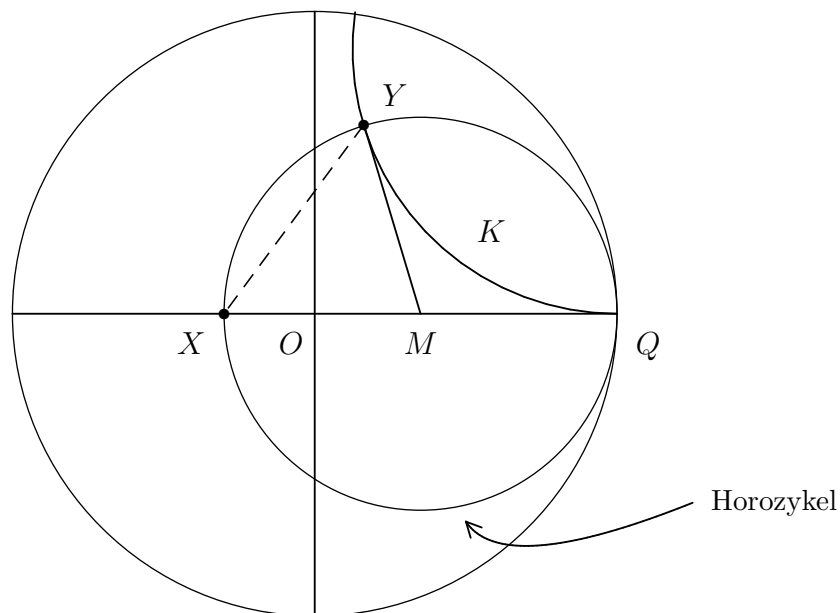
$$e^{2x} = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1 + (1 - \tan(\alpha/2))/(1 + \tan(\alpha/2))}{1 - (1 - \tan(\alpha/2))/(1 + \tan(\alpha/2))} = \frac{1}{\tan(\alpha/2)},$$

also

$$\boxed{\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-2x}.}$$

So einfach ist die berühmte Formel für den Parallelitätswinkel im Poincaré-Modell herzuleiten!

Zum Schluss wollen wir uns noch einen Horozykel ansehen:



Sei K ein Orthokreis durch Q , der eine zu \overrightarrow{OQ} asymptotisch parallele hyperbolische Gerade darstellt. Seien $X \in \overrightarrow{OQ}$ und $Y \in K$ korrespondierende Punkte. Dann ist $\angle YXQ \cong \angle XYQ$, und zwar im hyperbolischen Sinne. Die hyperbolische Verbindungsstrecke zwischen X und Y ist ein Orthokreis-Bogen, dessen Sehne die euklidische Verbindungsstrecke von X und Y ist. Aber dann muss auch $\angle YXM \cong \angle XYM$ sein, im euklidischen Sinne, wenn M der Schnittpunkt der Tangente an K in Y mit der reellen Achse ist. Nun können wir wieder rein euklidisch arbeiten. Es ist $\overline{MQ} = \overline{MY}$, und da das Dreieck YXM gleichschenkelig ist, ist auch $\overline{XM} = \overline{YM}$.

Das bedeutet, dass X, Y und Q auf dem euklidischen Kreis um M durch Q liegen. In der hyperbolischen Geometrie ist dieser Kreis ein Horozykel.

Wie sehen Kreise in der hyperbolischen Ebene aus?

4.3 Satz. *Jeder Kreis in \mathcal{H} mit Mittelpunkt 0 und Radius r ist der euklidische Kreis um 0 mit Radius $\tanh(r)$.*

BEWEIS: Es ist $\{z \in \mathbb{D} : d_h(0, z) = r\} = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Artanh}(|z|) = r\} = \{z \in \mathbb{D} : |z| = \tanh r\}$. ■

Allgemeiner gilt:

4.4 Satz. *Jeder Kreis in \mathcal{H} ist auch ein euklidischer Kreis.*

BEWEIS: Sei C ein hyperbolischer Kreis um $m \neq 0$ in \mathbb{D} . Der Strahl $\overrightarrow{0m}$ gehört zu einer hyperbolischen Geraden und trifft C in zwei Punkten a und b mit $a - m - b$.

Nun sei $T(z) := (z - m)/(1 - \bar{m}z)$. Dann ist $T(m) = 0$. Außerdem sei $a' := T(a)$ und $b' := T(b)$. $C' := T(C)$ ist ein hyperbolischer Kreis um 0 , und $T(ab) = a'b'$ ist eine Gerade durch 0 . Deshalb ist $\overline{a'b'}$ ein Durchmesser von C' . Wegen Satz 4.3 ist C' auch ein euklidischer Kreis.

Sei K der euklidische Kreis mit Durchmesser \overline{ab} , p der Mittelpunkt dieses Kreises (mit $a - p - b$). Dann ist $K' := T(K)$ ein euklidischer Kreis, der $a'b'$ unter einem rechten Winkel trifft. Weil damit C' und K' den gleichen Durchmesser besitzen, ist $C' = K'$. Aber dann ist auch $C = K$. ■

Man findet den Mittelpunkt m des hyperbolischen Kreises C als „hyperbolischen“ Mittelpunkt der Strecke \overline{ab} (d.h. $d_h(a, m) = d_h(m, b) = d_h(a, b)/2$).

4.5 Satz. *Die hyperbolische Metrik d_h induziert die Standard-Topologie auf \mathbb{D} , und der metrische Raum (\mathbb{D}, d_h) ist vollständig.*

BEWEIS: Nach Satz 4.4 stimmen Umgebungen in beiden Topologien überein. Also sind die Topologien gleich.

Sei nun (z_n) eine Cauchyfolge bezüglich der hyperbolischen Metrik. Dann gibt es ein r mit $0 < r < 1$, so daß alle z_n in

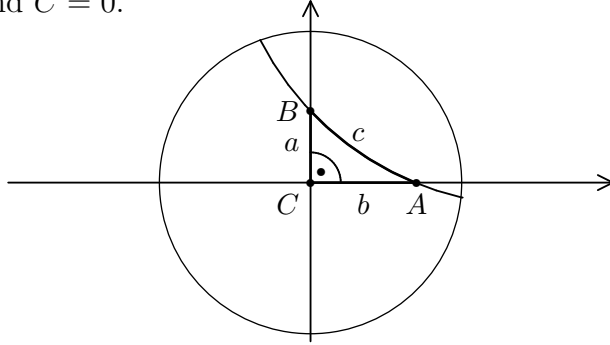
$$\overline{D_r^{(h)}(0)} = \{z \in \mathbb{D} : d_h(0, z) \leq r\}$$

liegen (denn $\partial\mathbb{D}$ ist vom Nullpunkt unendlich weit entfernt). Aber dann konvergiert eine Teilfolge (in der gewöhnlichen Metrik) gegen ein z_0 in dieser abgeschlossenen Kreisscheibe. Weil die Topologien übereinstimmen, konvergiert diese Teilfolge auch in der hyperbolischen Metrik, und weil (z_n) eine Cauchyfolge ist, konvergiert sogar die ursprüngliche Folge gegen z_0 . ■

4.6 Hyperbolischer Pythagoras. Sei ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck in \mathcal{H} mit den (hyperbolischen) Seiten a, b, c . Dann gilt:

$$\cosh(2c) = \cosh(2a) \cdot \cosh(2b).$$

BEWEIS: O.B.d.A. sei $A = a'$ reell und > 0 , $B = ib'$ (mit einer positiven reellen Zahl b') und $C = 0$.



Dann ist

$$a := d_h(C, B) = d_h(0, ib') = d_h(0, b') = \operatorname{Artanh}(b')$$

und $b := d_h(C, A) = d_h(0, a') = \operatorname{Artanh}(a')$.

Ist $T(z) := \frac{z - a'}{1 - a'z}$, so ist $T(A) = 0$, $T(B) = b'' := \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'}$ und $T(C) = -a'$.

Im Weiteren verwenden wir die Formel $\cosh(2t) = \frac{1 + \tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t}$ (siehe NR 1).

Damit ist $\cosh(2a) = \frac{1 + (b')^2}{1 - (b')^2}$ und $\cosh(2b) = \frac{1 + (a')^2}{1 - (a')^2}$.

Weiter ist $c := d_h(A, B) = d_h(a', b') = d_h(0, b'') = d_h(0, |b''|) = \operatorname{Artanh}|b''|$, also

$$\begin{aligned} \cosh(2c) &= \frac{1 + |b''|^2}{1 - |b''|^2} \\ &= \frac{1 + ((a')^2 + (b')^2) / (1 + (a')^2(b')^2)}{1 - ((a')^2 + (b')^2) / (1 + (a')^2(b')^2)} \quad (\text{siehe Nebenrechnung 2}) \\ &= \frac{(1 + (b')^2)(1 + (a')^2)}{(1 - (b')^2)(1 - (a')^2)} = \cosh(2a) \cdot \cosh(2b). \end{aligned}$$

■

Nebenrechnung 1:

$$\frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x} = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh(2x).$$

Nebenrechnung 2: Es ist

$$|b''|^2 = \frac{(-a' + ib')(-a' - ib')}{(1 - ia'b')(1 + ia'b')} = \frac{(a')^2 + (b')^2}{1 + (a')^2(b')^2}.$$

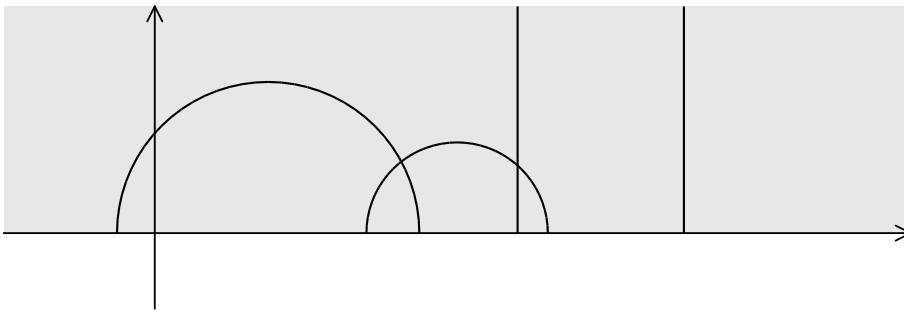
(Ende der Nebenrechnungen).

Zum Schluss soll noch mal an die Cayley-Abbildung $C : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ erinnert werden:

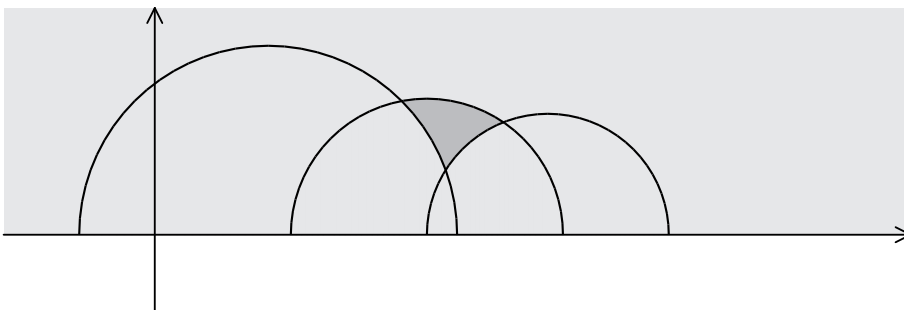
$$C(z) := i \cdot \frac{1+z}{1-z} \quad (\text{mit } C^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}).$$

Mit ihrer Hilfe kann man die hyperbolische Geometrie von \mathbb{D} nach \mathbb{H} übertragen. Da Möbius-Transformationen Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbilden und zudem konform sind, werden aus den h -Geraden Kreise und Geraden in der oberen Halbebene, die den Rand von \mathbb{H} , also die reelle Achse, orthogonal treffen.

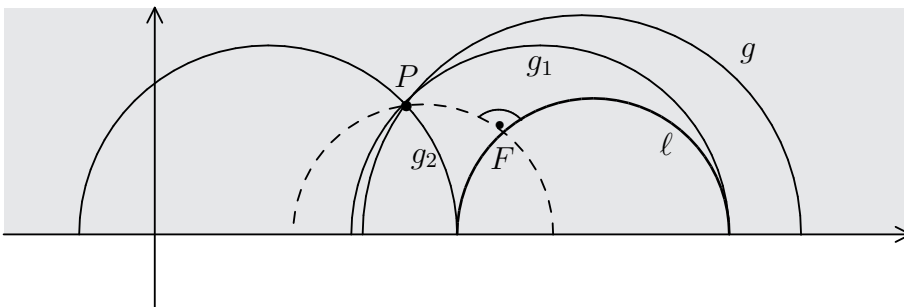
Hier sind ein paar Beispiele von hyperbolischen Geraden in \mathbb{H} :



Hier ein typisches Dreieck mit Winkelsumme $< \pi$.



Im folgenden Bild ist eine hyperbolische Gerade ℓ zu sehen, ein Punkt $P \notin \ell$, das Lot von P auf ℓ mit Fußpunkt F , die beiden asymptotischen Parallelen g_1 und g_2 zu ℓ durch P , sowie eine Gerade g durch P , die überparallel zu ℓ ist.



Noch offen ist die Frage der äquidistanten Linien. Wir betrachten den Spezialfall der Geraden $\ell = AB$ durch die Punkte -1 und 1 . Es wird sich zeigen: Ist K ein Kreis durch A und B (mit Mittelpunkt außerhalb von \mathbb{D}), so ist $g := K \cap \mathbb{D}$ eine zu ℓ äquidistante Linie.

Sei $p \in g$ ein beliebiger Punkt, $m \in \mathbb{R}$ der Fußpunkt des Lotes von p auf ℓ . Die Transformation

$$T(z) := \frac{z - m}{1 - mz}$$

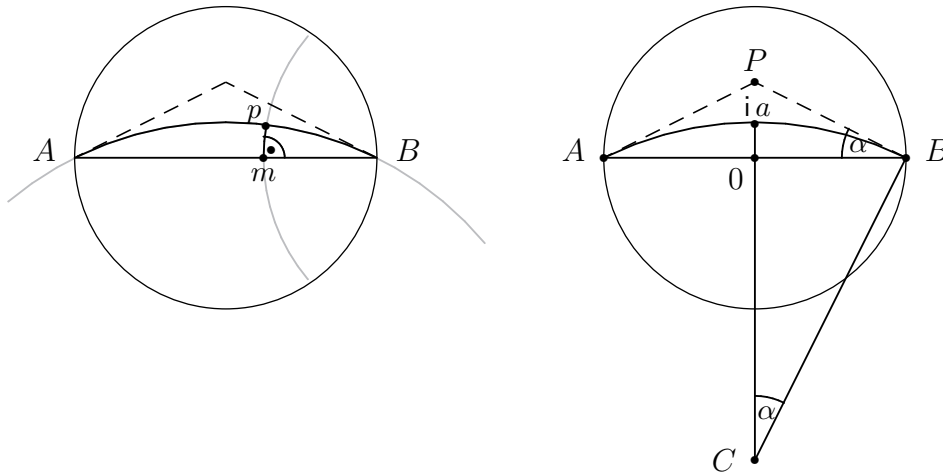
bildet ℓ auf sich, m auf den Nullpunkt und p auf einen Punkt $p' = ia$ ab. Also ist $d_h(p, m) = d_h(0, ia) = d_h(0, a) = \text{Artanh}(a) =: \delta$.

Sei C der Mittelpunkt und R der Radius des Kreises K . Weil $\angle CBP = \pi/2$ ist, ist $\angle PCB = \angle OBP =: \alpha$, und \overline{OC} hat die Länge $R - a$. Nun gilt:

$$\sin \alpha = 1 : R \quad \text{und} \quad \cos \alpha = (R - a) : R,$$

also

$$a = R - R \cos \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{siehe Formelsammlung}).$$



Daraus folgt:

$$d_h(p, m) = d_h(0, a) = \text{Artanh}(a) = \text{Artanh}\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)}.$$

Dieser Abstand ist unabhängig von der Wahl des Punktes p .