Kapitel 4

Hyperbolische Geometrie

4.1 Raumgeometrie

Bei Euklid gibt es keine Axiome zur räumlichen Geometrie. Bei Hilbert finden wir zusätzliche Forderungen, die wir wie folgt in unser System einbauen:

Der ***Raum*** ist eine Menge von Punkten. Gewisse Teilmengen heißen ***Geraden***, gewisse Teilmengen heißen ***Ebenen***.

Das Axiom **(I-3)** müssen wir geringfügig umformulieren: Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Hinzu kommen:

(I-4) Jede Ebene enthält wenigstens einen Punkt.

(I-5) Je drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C liegen auf genau einer Ebene ABC.

(I-6) Liegen zwei verschiedene Punkte A, B in einer Ebene E, so liegt die ganze Gerade AB in E.

(I-7) Liegt ein Punkt A im Durchschnitt $E_1 \cap E_2$ zweier Ebenen, so enthält $E_1 \cap E_2$ noch einen weiteren Punkt $B \neq A$.

(I-8) Es gibt wenigstens vier Punkte im Raum, die nicht in einer Ebene liegen.

Zwei Ebenen heißen ***parallel***, wenn sie übereinstimmen oder keinen Punkt gemeinsam haben.

1.1 Satz. *Zwei Ebenen sind entweder parallel oder haben genau eine Gerade gemeinsam.*

Beweis: Sind E_1 und E_2 nicht parallel, so gibt es ein $A \in E_1 \cap E_2$, und es ist $E_1 \neq E_2$. Nach (I-7) gibt es noch einen Punkt $B \in E_1 \cap E_2$. Nach (I-6) liegt dann die ganze Gerade AB in $E_1 \cap E_2$. Gäbe es noch einen Punkt C in $E_1 \cap E_2$, der nicht in AB liegt, dann würden A, B, C eindeutig eine Ebene bestimmen, in der sie liegen, und es müsste $E_1 = E_2$ sein. ■

1.2 Satz. *Sei E eine Ebene und ℓ eine Gerade, die nicht in E enthalten ist. Dann ist entweder $E \cap \ell = \varnothing$ oder es gibt genau einen Punkt $P \in E \cap \ell$.*

BEWEIS: Gäbe es zwei Punkte P, Q in $E \cap \ell$, so wäre $\ell = PQ \subset E$. ∎

1.3 Satz. *Sei g eine Gerade und $P \notin g$ ein Punkt. Dann gibt es genau eine Ebene E, die g und P enthält*

BEWEIS: Seien $A \neq B$ zwei Punkte von g. Dann liegen A, B, P nicht auf einer Geraden, und nach (I-5) bestimmen sie genau eine Ebene E. Ist $E' \neq E$ eine weitere Ebene, die g enthält, so kann $E \cap E'$ nicht den Punkt P enthalten. ∎

1.4 Satz. *Sind g, h zwei Geraden mit $g \cap h = \{P\}$, so gibt es genau eine Ebene E, die g und h enthält.*

BEWEIS: Trivial! ∎

Die Anordnungsaxiome beziehen sich alle auf Punkte und Geraden in einer Ebene. Dem ist nichts hinzuzufügen. Wir können jetzt aber zeigen, dass jede Ebene den Raum in zwei disjunkte konvexe Teilmengen zerlegt.

Sei $\mathscr{R}$ der Raum und $E \subset \mathscr{R}$ eine Ebene. Für Punkte $A, B \in \mathscr{R} \setminus E$ führt man eine Äquivalenzrelation ein:

$$A \sim B \ :\Longleftrightarrow \ A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap E = \varnothing.$$

Sind A, B, C drei nicht-kolllineare Punkte mit $A \sim B$ und $B \sim C$, so liegen die drei Punkte in einer eindeutig bestimmten Ebene E'. Ist E' parallel zu E, so ist nichts weiter zu zeigen. Ist $E \cap E' = \ell$, so folgt in $E' \setminus \ell$, dass $\overline{AC} \cap \ell = \varnothing$ ist, also $A \sim C$.

Die Äquivalenzklassen sind die beiden Seiten von E. Liegen A, B auf verschiedenen Seiten von E, so ist $\overline{AB} \cap E \neq \varnothing$.

Winkel werden immer als ebene Winkel definiert.

Die Bewegungsaxiome muss man etwas variieren:

(B-1) Die ***Bewegungen*** sind bijektive Abbildungen des Raumes $\mathscr{R}$ auf sich. Sie bilden eine Gruppe.

(B-2) Bewegungen erhalten alle „Zwischen"-Beziehungen.

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden und Ebenen auf Ebenen ab.

(B-3) wird ergänzt durch **(B-3)'**: Es seien A, B, C, D und O, P, Q, R jeweils Punkte, die nicht in einer Ebene liegen. Dann gibt es genau eine Bewegung φ, die folgendes bewirkt:

- $\varphi(A) = O$.
- $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$.
- $\varphi(C)$ liegt in der Ebene OPQ auf der durch Q bestimmten Seite von OP.
- $\varphi(D)$ liegt auf der durch R bestimmten Seite von OPQ.

Axiom (B-3)' beruht auf der Vorstellung von ***Translationen*** im Raum, ***Spiegelungen*** an Ebenen und ***Drehungen*** um Geraden. Die Spiegelung an einer Ebene konstruiert man ähnlich wie in der ebenen Geometrie.

(B-4) und **(B-5)** bleiben wie gehabt.

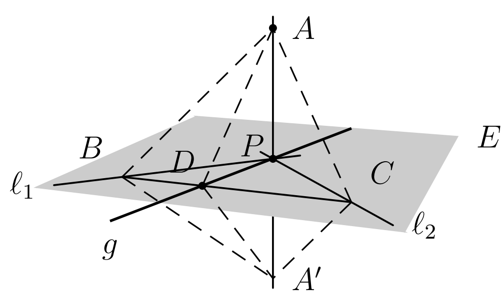
Definition:

Eine Gerade ℓ steht senkrecht auf der Ebene E (in Zeichen: $\ell \perp E$), falls es einen Punkt P gibt, so dass gilt:

1. $\ell \cap E = \{P\}$.
2. Ist $\ell' \subset E$ eine Gerade mit $P \in \ell'$, so steht ℓ senkrecht auf ℓ'.

1.5 Satz. *Seien $\ell_1, \ell_2 \subset E$ zwei verschiedene Geraden mit $\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$. Steht die Gerade ℓ auf ℓ_1 und auf ℓ_2 senkrecht, so steht sie auf E senkrecht.*

BEWEIS: Sei $g \subset E$ eine weitere Gerade mit $P \in g$, und A ein Punkt auf ℓ, so dass $\ell = AP$ ist.



Man kann Punkte $B \in \ell_1$ und $C \in \ell_2$ finden, so dass $\overline{BC}$ die Gerade g in einem Punkt D trifft. Außerdem werde $\overline{AP}$ über P hinaus zu $\overline{AA'}$ fortgesetzt, so dass $\overline{AP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'P}$ ist.

In der Ebene $AA'B$ ist ℓ_1 die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$, in der Ebene $AA'C$ ist ℓ_2 die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$. Also ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B}$ und $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C}$, und damit $ABC \mathrel{\widehat{=}} A'BC$ (SSS). Daraus folgt, dass $\angle ABD \mathrel{\widehat{=}} \angle A'BD$ ist.

Nun ist $ABD \mathrel{\hat{=}} A'BD$ und damit $\overline{AD} \mathrel{\hat{=}} \overline{A'D}$. Also liegt D auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AA'}$ in der Ebene $AA'D$. Das bedeutet, dass ℓ auf g senkrecht steht. ■

1.6 Satz. *Sei ℓ die Schnittgerade zweier Ebenen E_1 und E_2. Ein zugehöriger ebener Winkel besteht aus zwei Strahlen $\overrightarrow{PA} \subset E_1$ und $\overrightarrow{PB} \subset E_2$ mit $P \in \ell$, so dass PA und PB auf ℓ senkrecht stehen. Alle solche zugehörigen ebenen Winkel sind kongruent, sofern die sich entsprechenden Strahlen in der gleichen Halbebene von E_1 bzw. E_2 liegen.*

Beweis: Auf den technischen Beweis verzichten wir hier. ■

Zwei Halbebenen, deren zugehörige Ebenen sich längs einer Geraden treffen, bilden einen ***Raumwinkel***. Der Winkel ist ein ***Rechter***, falls alle zugehörigen ebenen Winkel rechte Winkel sind. Man sagt dann, dass die Ebenen aufeinander senkrecht stehen.

1.7 Satz. *Die Gerade ℓ stehe auf der Ebene E senkrecht. Dann steht auch jede Ebene F durch ℓ auf E senkrecht.*

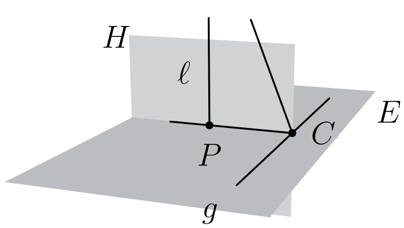
Beweis: Sei P der Schnittpunkt von ℓ und E. Ist F eine Ebene, die ℓ enthält, so ist $F \cap E = g$ eine Gerade. Dann sei $h \subset E$ die Senkrechte zu g in E. Weil ℓ auch auf h senkrecht steht, hat der von E und F gebildete Raumwinkel einen zugehörigen ebenen Winkel, der ein Rechter ist. Also ist der Raumwinkel ein Rechter. ■

Ähnlich beweist man:

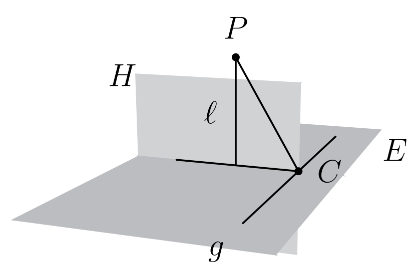
1.8 Satz. *Die Ebenen E und F stehen aufeinander senkrecht. Wenn eine Gerade $\ell \subset E$ auf der Schnittgeraden $E \cap F$ senkrecht steht, dann steht sie auf der ganzen Ebene F senkrecht.*

1.9 Satz. *Gegeben sei eine Ebene E und ein Punkt P. Dann gibt es genau eine Gerade ℓ durch P, die auf E senkrecht steht.*

Beweis:



1. Fall: $P \in E$



2. Fall: $P \notin E$

Sei g eine beliebige Gerade in E.

1. Fall ($P \in E$): Fälle in E das Lot von P auf g, mit Fußpunkt C. Sei $F \neq E$ eine Ebene durch g und h die Senkrechte zu g in C in der Ebene F. Dann spannen h

und PC eine Ebene H auf. Weil g auf h und auf PC senkrecht steht, steht g auch auf H senkrecht (Satz 1.5). Weil g in E enthalten ist, steht E auf H senkrecht (Satz 1.7). Nun errichte in H die Senkrechte ℓ zu PC im Punkt P. Nach Satz 1.8 steht sie auf E senkrecht.

2. Fall ($P \notin E$):Sei F die Ebene durch g und P. Fälle in dieser Ebene das Lot von P auf g mit Fußpunkt C. In der Ebene E errichte man in C die Senkrechte h zu g. Dann spannen h und PC die auf g senkrecht stehende Ebene H mit $H \cap E = h$ auf. Es folgt, dass H auf E senkrecht steht (Satz 1.5). Sei ℓ das Lot von P auf h (in der Ebene H). Dann liegt P in ℓ, und weil ℓ auf h senkrecht steht, steht sie auch auf E senkrecht.

Sind ℓ_1, ℓ_2 zwei Geraden mit $P \in \ell_1 \cap \ell_2$, die auf E senkrecht stehen, so bestimmen sie eine Ebene F, die auf E senkrecht steht. In der Ebene F haben wir dann zwei Geraden durch P, die beide auf der Geraden $E \cap F$ senkrecht stehen. Das geht nur, wenn $\ell_1 = \ell_2$ ist. ∎

1.10 Satz. *Sei E eine Ebene und ℓ eine beliebige Gerade, die nicht in E liegt und **nicht** auf E senkrecht steht. Dann liegen alle Geraden, die ℓ treffen und auf E senkrecht stehen, in einer Ebene H, die ihrerseits auf E senkrecht steht.*

BEWEIS: Sei P ein Punkt auf ℓ, der nicht in E liegt, sowie g die eindeutig bestimmte Gerade durch P, die auf E senkrecht steht. Der Fußpunkt des Lotes sei P'. Dann ist $P' \neq P$, und es gibt genau eine Ebene H, die P' und ℓ enthält. Weil mit P und P' auch deren Verbindungsgerade zu H gehört, steht H auf E senkrecht (Satz 1.7).

Nun sei Q ein zweiter Punkt auf ℓ und h das Lot von Q auf $H \cap E$ in H, mit Fußpunkt Q'. Aus Satz 1.8 folgt, dass h auf E senkrecht steht. Also ist h die eindeutig bestimmte Gerade durch Q, die auf E senkrecht steht.

Wir haben gesehen, dass die Fußpunkte der betrachteten Senkrechten alle in $E \cap H$ liegen. Die Senkrechten selbst müssen demnach in H liegen. ∎

Definition:

Sei E eine Ebene und ℓ eine beliebige Gerade, die nicht in E liegt und **nicht** auf E senkrecht steht. Die Menge $\mathrm{pr}_E(\ell)$ der Fußpunkte von Geraden h, die ℓ treffen und auf E senkrecht stehen, nennt man die ***orthogonale Projektion*** von ℓ auf E.

Bemerkung. Im euklidischen Fall ist die orthogonale Projektion der Geraden ℓ die Gerade $E \cap H$, im nicht-euklidischen Fall ist sie eine echte Teilmenge von $E \cap H$, enthält aber wenigstens eine Strecke.

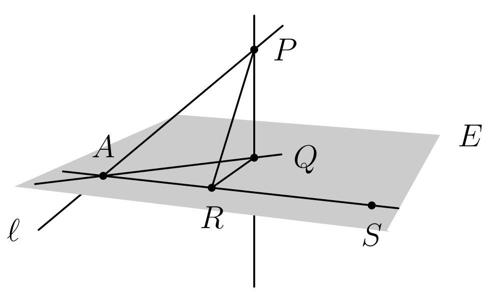
1.11 Satz. *Wenn ℓ in der obigen Situation die Ebene E in einem Punkt A schneidet, dann ist der Winkel zwischen ℓ und $\mathrm{pr}_E(\ell)$ der kleinste Winkel, der bei A zwischen ℓ und einer Geraden $g \subset E$ auftritt.*

Beweis: Sei $P \neq A$ ein beliebiger Punkt von ℓ. Dann gibt es genau eine Gerade durch P, die auf E in einem Punkt Q senkrecht steht. Da ℓ auf E nicht senkrecht steht, muss $PQ \neq \ell$ und $Q \neq A$ sein.

Die Gerade AQ enthält die Menge $\mathrm{pr}_E(\ell)$. Weil das Dreieck AQP bei Q rechtwinklig ist, ist $\angle PAQ < \pi/2$.

Sei $g = AS$ irgendeine Gerade in E, $AS \neq AQ$. Wir müssen zeigen, dass $\angle PAS > \angle PAQ$ ist. Ist $\angle PAS \geq \pi/2$, so ist nichts zu zeigen. Sei also auch $\angle PAS$ ein spitzer Winkel.

Dann kann man in der Ebene $F := ASP$ das Lot von P auf AS fällen, mit Fußpunkt R. Die Ebene $H := PRQ$ steht auf E senkrecht (Satz 1.7) und es ist $H \cap E = RQ$ und $H \cap F = PR$. Weil AS $(\subset F)$ auf PR senkrecht steht, steht AS auch auf der Geraden RQ $(\subset H)$ senkrecht (Satz 1.8).



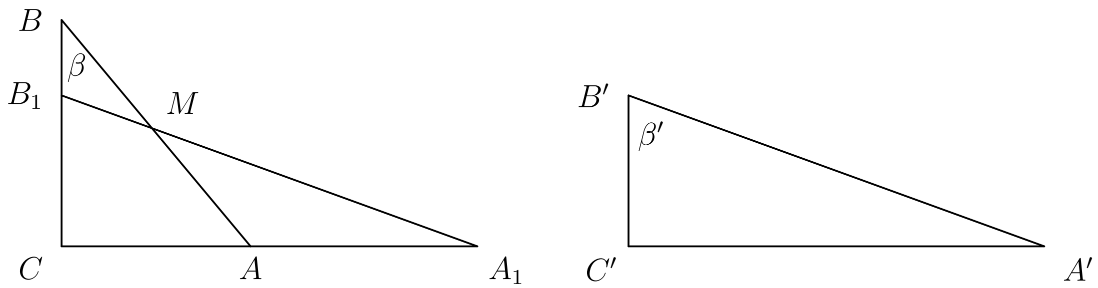
Im rechtwinkligen Dreieck PQR ist $\overline{PR} > \overline{PQ}$. Weiter gilt:

Das rechtwinlige Dreieck PAR hat die gleiche Hypotenuse wie das rechtwinklige Dreieck PAQ (nämlich $\overline{PA}$). Weil außerdem die Kathete $\overline{PQ}$ des Dreiecks PAQ kleiner als die Kathete $\overline{PR}$ des Dreiecks PAR ist, muss $\angle PAQ < \angle PAR$ sein. Das ergibt sich aus dem nachfolgenden Lemma.

Also ist der Winkel zwischen ℓ und $\mathrm{pr}_E(\ell)$ kleiner als der Winkel zwischen ℓ und der beliebig gewählten Gerade $g = AS \subset E$. ∎

1.12 Lemma. *ABC und $A'B'C'$ seien zwei (bei C bzw. C') rechtwinklige Dreiecke mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ und $\overline{AC} < \overline{A'C'}$. Dann ist $\beta = \angle ABC < \angle A'B'C' = \beta'$.*

Beweis: Beim Dreieck ABC verlängere man $\overline{CA}$ über A hinaus zu $\overline{CA_1}$ mit $\overline{A_1C} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'} > \overline{AC}$. Weil $A'B'C'$ bei C' rechtwinklig ist, ist $\overline{B'A'} > \overline{C'A'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CA_1}$. Wir zeichnen den Kreis um A_1 mit Radius $\overline{B'A'}$. Da C im Innern des Kreises liegt, trifft der Kreis die Gerade BC auf der Seite von C, auf der auch B liegt, in einem Punkt B_1. Dann ist $A_1B_1C \mathrel{\widehat{=}} A'B'C'$ (SSW) und $\angle CB_1A_1 \mathrel{\widehat{=}} \angle C'B'A' = \beta'$.



Es muss noch gezeigt werden, dass $C - B_1 - B$ gilt: Würde $C - B - B_1$ gelten, so wäre in dem bei B stumpfwinkligen Dreieck B_1BA_1 die Seite $\overline{A_1B_1}$ größer als die Seite $\overline{A_1B}$. Und weil AA_1B bei A stumpfwinklig ist, ist $\overline{A_1B}$ größer als $\overline{AB}$. Das ist nun ein Widerspruch dazu, dass $\overline{A_1B_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$ ist. Die Anordnung $C - B_1 - B$ stimmt also.

Weil A_1 und C auf verschiedenen Seiten von AB liegen, während B_1 und C auf der gleichen Seite von AB liegen, muss $\overline{B_1A_1}$ die Gerade AB in einem Punkt M treffen. Dann ist $\beta' \mathrel{\widehat{=}} \angle CB_1A_1$ Außenwinkel am Dreieck BB_1M und deshalb größer als der nicht-anliegende Innenwinkel $\beta = \angle B_1BM$. Das war zu zeigen. ∎

Satz 1.11 motiviert die folgende Definition: Als ***Winkel zwischen einer Geraden ℓ und einer Ebene*** E bezeichnet man entweder den rechten Winkel (falls ℓ auf E senkrecht steht) oder den Winkel zwischen ℓ und $\mathrm{pr}_E(\ell)$ (falls ℓ nicht auf E senkrecht steht).

1.13 Satz. *Steht eine Ebene E auf zwei verschiedenen sich schneidenden Ebenen F und G senkrecht, so auch auf der Gerade $\ell = F \cap G$.*

Beweis: Treffen sich ℓ und E nicht, so wähle man $P \in \ell$ beliebig. Andernfalls wähle man einen Punkt $P \in \ell \cap E$. In beiden Fällen errichte man in der Ebene F die Senkrechte durch P zu $F \cap E$. $Q \neq P$ sei ein Punkt auf dieser Senkrechten (in F). Dann steht PQ auf E senkrecht (Satz 1.8).

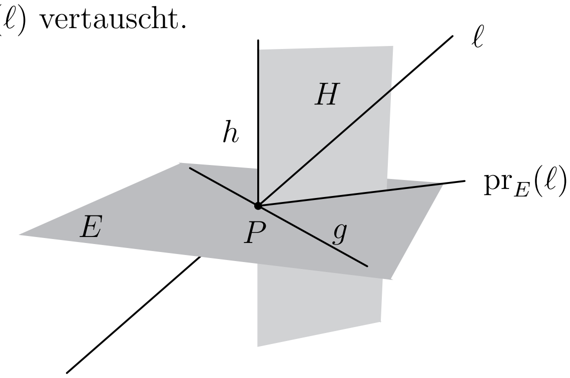
Analog steht auch die Senkrechte PR durch P zu $G \cap E$ (in G) auf E senkrecht. Wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten auf E durch P muss $PQ = PR$ sein. Das bedeutet, dass diese Gerade in $F \cap G$ liegt, also mit ℓ übereinstimmt. ∎

1.14 Satz. *Sei E eine Ebene und ℓ eine Gerade, die E nicht-orthogonal in P schneidet, sowie $g \subset E$ eine andere Gerade durch P. Dann gilt:*

$$g \perp \ell \iff g \perp \mathrm{pr}_E(\ell).$$

Beweis: Sei H die eindeutig bestimmte Ebene, die ℓ und $\mathrm{pr}_E(\ell)$ enthält. Sie steht auf E senkrecht. Sei $h \subset H$ die Senkrechte zu $\mathrm{pr}_E(\ell)$ in P. Dann steht h auf E und damit auch auf g senkrecht (nach Definition des „Senkrechtstehens“ einer Geraden auf einer Ebene).

Steht ℓ auf g senkrecht, so steht auch H (als Ebene, die ℓ und h enthält) senkrecht auf g (nach Satz 1.5), und damit auch alle in H gelegenen Geraden, insbesondere die, die $\mathrm{pr}_E(\ell)$ enthält. Die Folgerung bleibt richtig, wenn man die Rollen von ℓ und $\mathrm{pr}_E(\ell)$ vertauscht.



■

4.2 Der Parallelitätswinkel

In diesem Paragraphen sollen – in aller Kürze – die Anfangsgründe der Geometrie dargestellt werden, die von Gauß, Bolyai und Lobatschewski gefunden wurde.

1. Die absolute Theorie der Parallelen:

Folgendes ist uns von den Untersuchungen von Euklid, Saccheri und Lambert her bekannt:

- Wenn man das fünfte Postulat nicht benutzen will, kann man nicht zeigen, dass die Parallelität transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist.
- Es kann vorkommen, dass Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden und dabei innere Winkel bilden, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.
- Man muss eventuell zwischen asymptotischen Parallelen und solchen unterscheiden, die mit der gegebenen Geraden eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

Und bei all diesen Untersuchungen kann man sich auf das Verhalten der beteiligten Geraden in einer bestimmten Richtung beschränken.

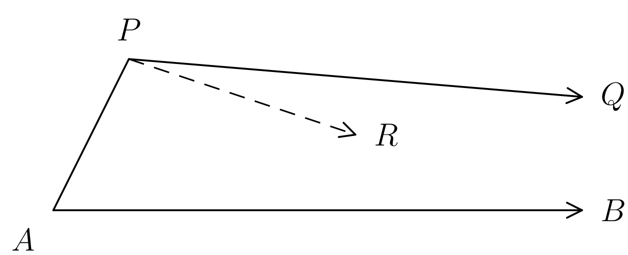
Die erste neue Idee, die anscheinend alle zugleich hatten, bestand darin, an Stelle von Geraden nur Strahlen zu betrachten.

Definition:

Der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ heißt ***asymptotisch parallel*** zu dem Strahl $\overrightarrow{AB}$, falls gilt:

1. $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB}$ schneiden sich nicht.
2. Jeder Strahl $\overrightarrow{PR}$ innerhalb des Winkels $\angle APQ$ trifft $\overrightarrow{AB}$.

In Zeichen schreibt man dafür: $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$.



2.1 Satz. *Ist $\overrightarrow{AB}$ gegeben, so gibt es zu jedem Punkt $P \notin AB$* ***genau einen*** *Strahl $\overrightarrow{PQ}$, der asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist, und es ist dann*

$$\angle PAB + \angle APQ \leq \pi.$$

Diesen Satz haben wir im Grunde schon bewiesen, wenn auch nur unter der Hypothese des spitzen Winkels. Jetzt setzen wir die Neutrale Geometrie voraus, und die Tatsache, dass die Hypothese vom stumpfen Winkel ausgeschlossen werden kann. Man betrachtet alle Strahlen $\overrightarrow{PQ}$, die von P ausgehen, und unter denjenigen, für die $\angle QPA \leq \pi$ ist, unterscheidet man zwischen schneidenden und nicht schneidenden Strahlen. In gewohnter Weise schließt man mit Hilfe des Dedekind-Axioms auf die Existenz eines Grenzstrahls, der dann asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ sein muss.

Es kommt nicht auf den Anfangspunkt der Strahlen an:

Definition:

Zwei Strahlen heißen ***äquivalent***, wenn sie auf der gleichen Geraden liegen und in die gleiche Richtung weisen.

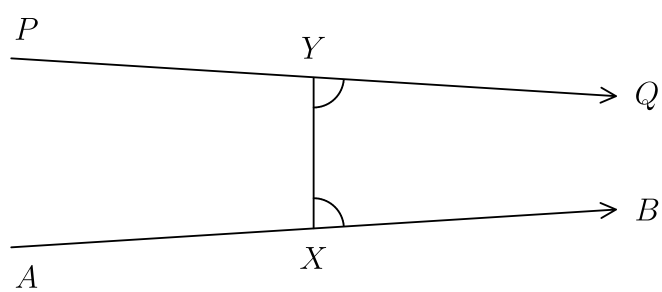
2.2 Satz. *Ob der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ asymptotisch parallel zum Strahl $\overrightarrow{AB}$ ist, hängt nur von den Äquivalenzklassen der Strahlen ab.*

Der Beweis ist ein bisschen technisches Hantieren mit dem Pasch-Axiom und soll hier nicht ausgeführt werden.

Definition:

Sei $\overrightarrow{PQ} ||| \overrightarrow{AB}$, $X \in \overrightarrow{AB}$ und $Y \in \overrightarrow{PQ}$ (oder jeweils aus einem äquivalenten Strahl).

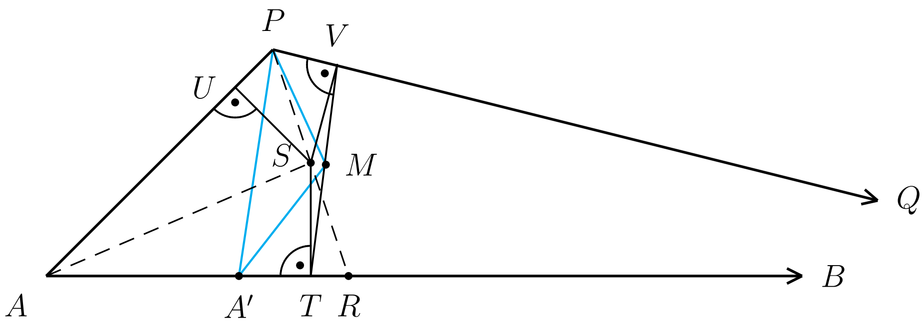
X und Y heißen ***korrespondierende Punkte***, falls $\angle XYQ = \angle YXB$ ist. In Zeichen schreibt man dann: $X \simeq Y$.



2.3 Satz. *Sei $\overrightarrow{PQ} ||| \overrightarrow{AB}$. Dann gibt es einen Punkt A' auf AB, so dass A' und P korrespondierende Punkte sind.*

Zum Beweis: Ist $\overrightarrow{PR}$ die Winkelhalbierende zu $\angle APQ$, so schneidet sie – nach Definition der asymptotischen Parallelität – den Strahl $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R.

Und nach Pasch trifft die Winkelhalbierende zu $\angle BAP$ den Strahl $\overrightarrow{PR}$ in einem Punkt S. Die Fußpunkte der Lote von S auf AP, PQ und AB seien jeweils mit U, V und T bezeichnet.



Jetzt ist es nicht schwer zu zeigen, dass T und V korrespondierende Punkte sind: Zunächst ist $ASU \,\widehat{=}\, AST$ (SWW). Aber es ist auch $SPU \,\widehat{=}\, SPV$, und daher TVS gleichschenklig.

Wählt man A' auf AB, auf der gleichen Seite von VT wie P und mit $\overline{A'T} \,\widehat{=}\, \overline{PV}$, so sind P und A' korrespondierend. Um das zu zeigen, führt man noch den Mittelpunkt M von $\overline{TV}$ ein. Dann ist $PMV \,\widehat{=}\, MA'T$ (SWS) und daher $A'PM$ gleichschenklig. Es folgt, dass $\angle A'PQ \,\widehat{=}\, \angle PA'B$ ist. ■

2.4 Folgerung. *Ist $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$, so ist auch $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{PQ}$.*

Beweis: Da die Parallelität nicht vom Anfangspunkt abhängt, kann man o.B.d.A. annehmen, dass P und A korrespondierende Punkte sind. Aber dann ist die ganze Situation symmetrisch zur Mittelachse (= Mittelsenkrechte zu $\overline{AP}$). ■

Für asymptotisch parallele Strahlen kann man nun die Transitivität beweisen:

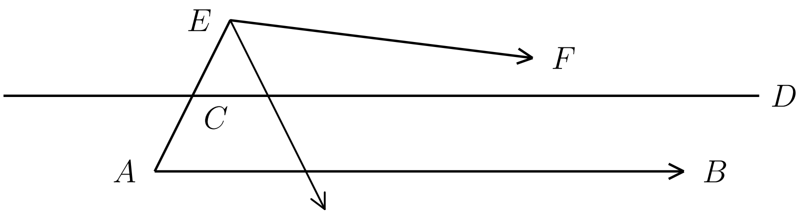
2.5 Satz. *Sei $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{EF}$.*

Dann ist entweder $AB = EF$ oder $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{EF}$.

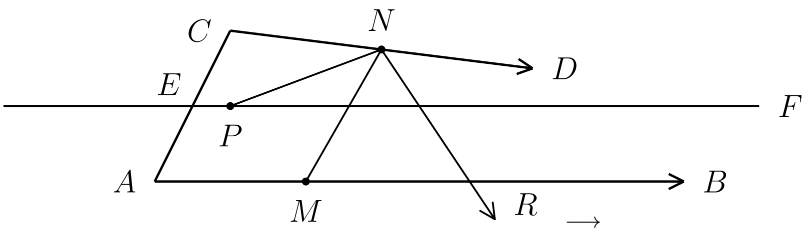
Beweis: Bolyai beweist diesen Satz durch Übergang zur dritten Dimension. Es geht aber auch in der Ebene:

Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ liegen auf verschiedenen Seiten von CD. Dann schneidet $\overline{AE}$ die Gerade CD in einem Punkt, o.B.d.A. können wir annehmen, dass das der Punkt C ist. Jeder Strahl im Innern von $\angle FEA$ schneidet dann $\overrightarrow{CD}$ und in der Folge dann auch $\overrightarrow{AB}$.



2. Fall: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ liegen auf der gleichen Seite von CD. Die Geraden AB und EF tun das dann auch, und sie können sich nicht schneiden, weil sonst durch einen Punkt zwei asymptotische Parallelen zu CD gehen würden.



O.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $\overrightarrow{EF}$ zwischen AB und CD liegt (Pasch!), aber daraus folgt noch nicht selbstverständlich, dass AB und CD auf verschiedenen Seiten von EF liegen. In der vorliegenden speziellen Situation lässt sich das jedoch zeigen: Dazu wähle man beliebige Punkte $M \in \overrightarrow{AB}$, $N \in \overrightarrow{CD}$ und $P \in \overrightarrow{EF}$. Von den beiden Winkeln $\angle DNP$ und $\angle DNM$ suchen wir den kleineren. Ein Strahl im Innern dieses Winkels trifft wegen der vorausgesetzten Parallelität $\overrightarrow{EF}$ in einem Punkt Q und $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R. Dann liegen N und R auf verschiedenen Seiten von EF, und daraus folgt, dass auch die Strahlen $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{AB}$ auf verschiedenen Seiten von EF liegen. Also trifft $\overline{MN}$ die Gerade EF.

Wegen der Symmetrie der Parallelität ist auch $\overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{AB}$. Ein Strahl im Innern von $\angle BMN$ trifft $\overrightarrow{CD}$, und auf dem Weg dahin muss er auch $\overrightarrow{EF}$ treffen. Also ist $\overrightarrow{EF}|||\overrightarrow{AB}$. ■

Definition:

Zwei Geraden heißen ***asymptotisch parallel***, falls sie Strahlen enthalten, die asymptotisch parallel sind.

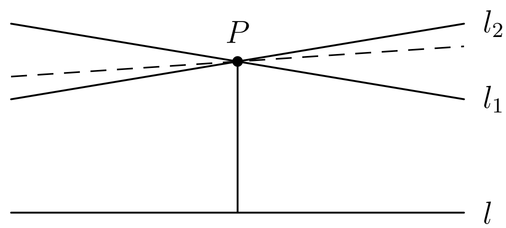
Zwei Geraden heißen ***überparallel*** oder ***divergent***, wenn sie parallel, aber nicht asymptotisch parallel sind.

Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$, sowie zwei verschiedene zu g parallele Geraden g_1, g_2 durch P. Man kann einen Punkt $A \in g$ und Punkte $Q \in g_1$, $R \in g_2$ wählen, so dass Q und R auf der gleichen Seite von AP liegen. Wir sagen, dass eine Gerade g' durch P *zwischen* g_1 und g_2 liegt, wenn ihr Schnittwinkel mit AP (auf der Seite von AP, auf der Q und R liegen) zwischen $\angle QPA$ und $\angle RPA$ liegt.

2.6 Satz. *Es sei eine Gerade l und ein Punkt $P \notin l$ gegeben. Dann gibt es höchstens 2 asymptotische Parallelen l_1, l_2 zu l durch P.*

Gilt Postulat V, so stimmen l_1 und l_2 überein, und es gibt keine Gerade, die überparallel zu l ist.

Sind l_1 und l_2 verschieden, so sind alle dazwischen liegenden Geraden überparallel zu l. Insbesondere gilt dann Postulat V nicht.



Beweis: In jede der beiden möglichen Richtungen weist von P aus genau ein zu l asymptotisch paralleler Strahl. Gilt Postulat V, so kann man sofort über Winkelbeziehungen ablesen, dass die beiden Strahlen zusammen eine Gerade bilden, die eindeutig bestimmte Parallele zu l durch P, und jede andere Gerade muss l schneiden.

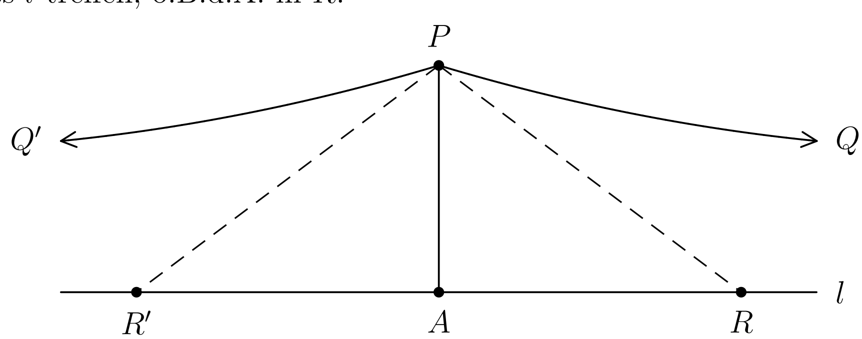
Gehören die beiden Strahlen zu verschiedenen Geraden l_1, l_2, so sind offensichtlich alle Geraden dazwischen auch parallel zu l, und da sich schneidende Geraden einen beliebig großen Abstand annehmen, können sie nicht asymptotisch parallel sein. ∎

2. Der Parallelitätswinkel:

2.7 Satz. *Sei l eine Gerade, $P \notin l$, A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Außerdem seien $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PQ'}$ die beiden asymptotisch parallelen Strahlen, die von P ausgehen.*

Dann ist $\angle APQ = \angle APQ'$.

Beweis: Wir nehmen an, es sei $\angle APQ' < \angle APQ$. Dann gibt es einen Strahl $\overrightarrow{PR}$ im Winkelraum $I(\angle APQ)$, so dass $\angle APR = \angle APQ'$ ist. Aber der Strahl $\overrightarrow{PR}$ muss l treffen, o.B.d.A. in R.



Nun wählen wir einen Punkt $R' \in l$ mit $R' - A - R$ und $\overline{R'A} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AR}$. Dann ist $R'AP \mathrel{\widehat{=}} ARP$ (SWS). Daraus folgt, dass $\angle APR' \mathrel{\widehat{=}} \angle APR$ ist, während andererseits $\angle APR' < \angle APQ' = \angle APR$ ist. Widerspruch! ∎

In der Situation des obigen Satzes setzen wir

$$\varphi(P,l) := \angle APQ = \angle APQ'.$$

2.8 Folgerung.

1. *$\varphi(P,l) \leq \pi/2$.*
2. *$\varphi(P,l) < \pi/2 \iff \exists \geq 2$ Parallelen zu l durch P.*

Der Beweis ist eine triviale Übungsaufgabe.

2.9 Satz.

$\varphi(P,l)$ hängt nur von der Länge des Lotes von P auf l ab.

Beweis:

Sei A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Wir betrachten die Menge

$$K(P,l) := \{r \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Strahl } \overrightarrow{PC} \text{ mit } \overrightarrow{PC} \cap l \neq \varnothing \text{ und } r = \angle APC\}.$$

Da $\varphi(P,l) = \sup K(P,l)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $K(P,l)$ nur von der Kongruenzklasse von $\overline{AP}$ abhängt.

Dazu sei l' eine weitere Gerade, $P' \notin l'$, A' der Fußpunkt des Lots von P' auf l', sowie $\overline{AP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'P'}$. Es ist dann zu zeigen, dass $K(P,l) = K(P',l')$ ist, und aus Symmetriegründen reicht es sogar z.z., dass $K(P,l) \subset K(P',l')$ ist.

Seien $\overrightarrow{PQ}$ bzw. $\overrightarrow{P'Q'}$ die asymptotisch parallelen Strahlen (wir brauchen wegen des vorangegangenen Satzes nur eine Seite zu betrachten). Ist $s \in K(P,l)$, so gibt es ein $C \in l$ (in der gleichen Richtung wie Q) mit $\angle APC = s$. Wir wählen dann einen Punkt $C' \in l'$ (in der gleichen Richtung wie Q') mit $\overline{A'C'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AC}$. Dann ist $ACP \mathrel{\widehat{=}} A'C'P'$ (SWS) und daher $s = \angle APC = \angle A'P'C'$. Aber das bedeutet, dass auch $s \in K(P',l')$ ist. ∎

Führt man noch eine Längenfunktion λ ein, so erhält man eine Funktion

$$\Pi : \{t \mid t > 0\} \to (0, \frac{\pi}{2}]$$

mit $\Pi(\lambda(\overline{PA})) := \varphi(P,l)$.

Definition:

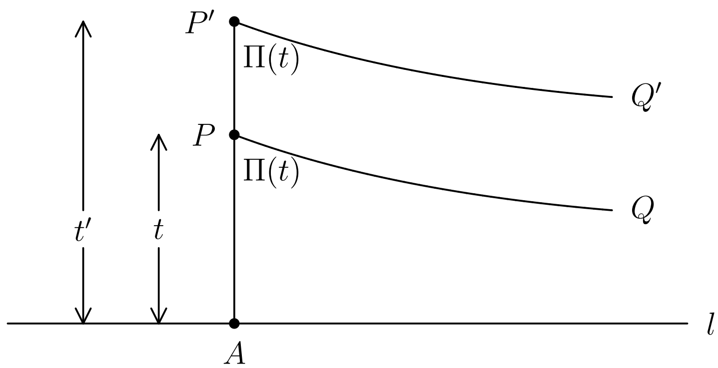
$\Pi(t)$ heißt der (durch t bestimmte) ***Parallelitätswinkel***.

Die Bezeichnung stammt von Lobatschewski.

2.10 Satz. $\Pi(t)$ *ist schwach monoton fallend.*

Beweis: Sei $t' > t$. Man kann eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$ finden, so dass – mit dem Fußpunkt A des Lots von P auf l – gilt:

t ist die Länge von $\overline{AP}$, und es gibt einen Punkt P' mit $A - P - P'$, so dass t' die Länge von $\overline{AP'}$ ist.



Trägt man $\Pi(t)$ bei P' an AP' an, so erhält man eine Parallele $\overrightarrow{P'Q'}$ zu $\overrightarrow{PQ}$ (F-Winkel). Aber das bedeutet, dass $\Pi(t') \leq \Pi(t)$ sein muss. ■

2.11 Satz.

Gilt Postulat V, so ist $\Pi(t) \equiv \frac{\pi}{2}$.

Gilt Postulat V nicht, so ist $\Pi(t) < \frac{\pi}{2}$ *für alle* t.

Beweis: Wenn Postulat V nicht gilt, dann gilt die Hypothese vom spitzen Winkel, und es gibt „unterhalb“ der Parallelen, die in P senkrecht auf AP steht, eine asymptotische Parallele. Ist t die Länge von $\overline{AP}$, so ist $\Pi(t) < \frac{\pi}{2}$. ■

Die logische Verneinung des Euklidischen Parallelenaxioms (in der Formulierung von Playfair) sieht folgendermaßen aus:

Hyperbolisches Parallelenaxiom:

(H-P) Es gibt eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$, so dass durch P mindestens zwei Parallelen zu l gehen.

2.12 Satz. *Setzt man (H-P) voraus, so gilt:*

1. *Die Hypothese vom spitzen Winkel ist erfüllt.*

2. Die Funktion $t \mapsto \Pi(t)$ *ist streng monoton fallend.*

3. $\forall \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\exists! t$ *mit* $\Pi(t) = \varphi$.

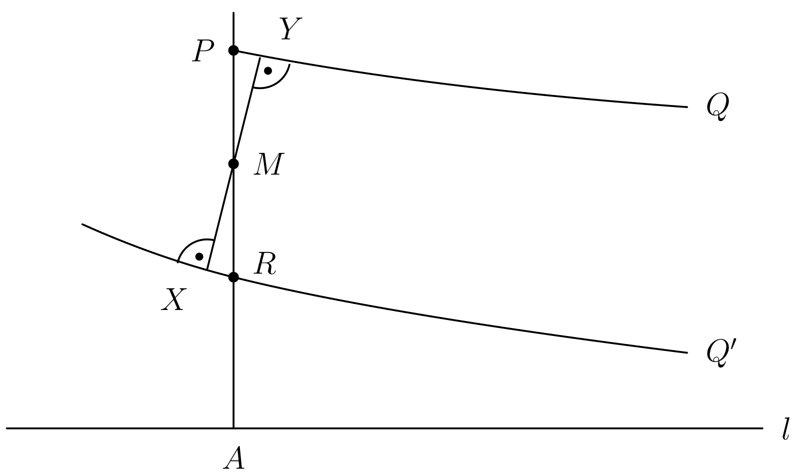
Beweis: 1) ist klar!

2) Zur Vereinfachung der Notationen nehmen wir an, es sei eine Längenfunktion gegeben, und setzen $\Pi(XY) := \Pi(\lambda(\overline{XY})$.

Seien P, R zwei Punkte auf der Senkrechten zur Geraden l in A, und es sei $\overline{AP} > \overline{AR}$. Dann ist $\Pi(AP) \leq \Pi(AR)$.

Annahme, $\Pi(AP) = \Pi(AR)$. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PR}$, X der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{RQ'}$ und Y der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{PQ}$. Dann ist $XRM \mathrel{\widehat{=}} MYP$ (SWW). Also ist $\angle XMR \mathrel{\widehat{=}} \angle PMY$, d.h. $X - M - Y$.

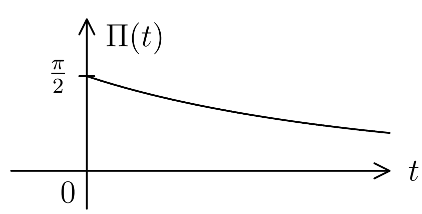
Das bedeutet, dass PQ und RQ' eine gemeinsame Senkrechte besitzen. Sie sind dann überparallel, aber nicht asymptotisch parallel. Das ist ein Widerspruch zur Transitivität der Relation „|||“.



3) Ist φ ein gegebener spitzer Winkel, so haben wir schon an früherer Stelle gezeigt, dass es eine Senkrechte zu einem der Schenkel von φ gibt, die asymptotisch parallel zum anderen Schenkel ist. ∎

2.13 Folgerung. $\Pi : (0, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2})$ *ist bijektiv und stetig, und es ist*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \Pi(t) = \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \lim_{t \to \infty} \Pi(t) = 0.$$



Die Stetigkeit folgt aus der strengen Monotonie und der Surjektivität.

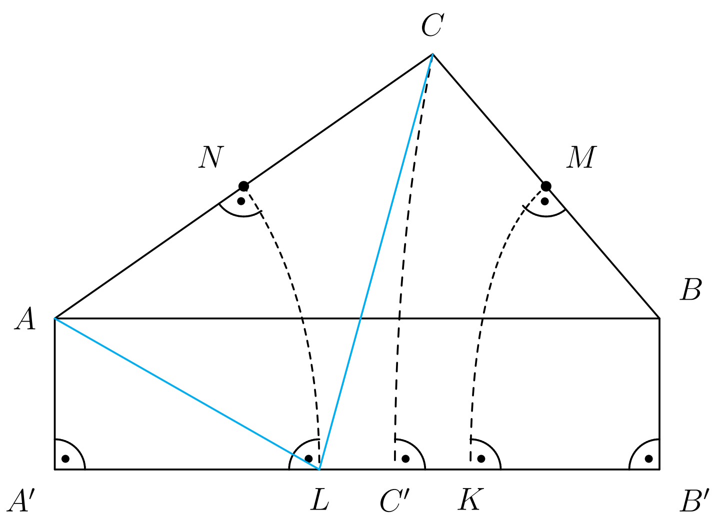
3. Horozykel:

2.14 Satz. *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich entweder in einem Punkt, oder sie sind alle zueinander in der gleichen Richtung asymptotisch parallel oder sie sind überparallel und besitzen alle drei eine gemeinsame Senkrechte.*

Beweis: 1) Wenn sich schon zwei der Mittelsenkrechten in einem Punkt treffen, dann haben alle drei Ecken von diesem Punkt den gleichen Abstand, und dann muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen.

2) Sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Die Mittelsenkrechten durch M und N seien zueinander überparallel, mit einer gemeinsamen Senkrechten h. K und L seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten durch M und N mit h.

Wir fällen das Lot von A, B und C jeweils auf h, mit Fußpunkten A', B' und C'.



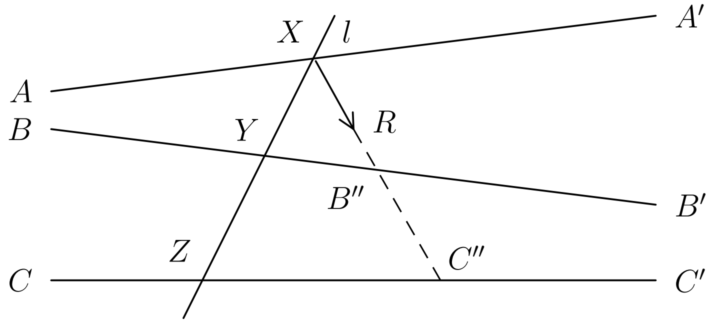
Es ist $ALN \mathrel{\widehat{=}} CLN$ (SWS), und daher $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LC}$ und $\angle ALA' \mathrel{\widehat{=}} \angle CLC'$. Daraus folgt wiederum, dass $AA'L \mathrel{\widehat{=}} LC'C$ (SWW) und insbesondere $\overline{AA'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CC'}$ ist. Genauso folgt, dass $\overline{BB'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CC'}$ ist. Also ist $A'B'BA$ ein Saccheri-Viereck. Aber dann ist die Mittelsenkrechte zu AB zugleich die Mittellinie des Saccheri-Vierecks, und die steht senkrecht auf $A'B' = h$.

3) Wenn zwei der Mittelsenkrechten asymptotisch parallel sind, so müssen sie es auch zur dritten sein, denn sonst läge ja einer der beiden ersten Fälle vor. Es bleibt nur zu zeigen, dass sie alle in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind.

Man überzeugt sich recht leicht davon, dass alle drei Mittelsenkrechten die Seite des Dreiecks treffen, die dem größten Winkel gegenüberliegt. Aber dann kann man den folgenden Hilfssatz anwenden. ∎

2.15 Hilfssatz. *Wenn drei verschiedene Geraden paarweise asymptotisch parallel sind und alle von einer vierten Geraden getroffen werden, so sind sie in der gleichen Richtung asymptotisch parallel.*

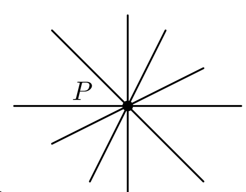
Beweis: Seien AA', BB' und CC' die paarweise asymptotisch parallelen Geraden, sowie l die gemeinsame Transversale. O.B.d.A. gibt es dann Punkte X, Y und Z auf l mit $A - X - A'$, $B - Y - B'$ und $C - Z - C'$.



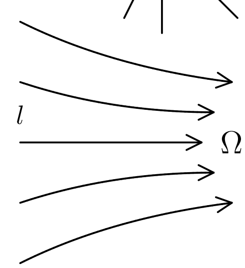
O.B.d.A. sei $\overrightarrow{XA'} ||| \overrightarrow{ZC'}$. Nun sei $\overrightarrow{XR}$ ein Strahl ins Innere des Winkels $\angle YXA'$. Er muss $\overrightarrow{ZC'}$ treffen, etwa in C''. Die Gerade BB' trifft die Seite $\overline{ZX}$ des Dreiecks $ZC''X$, geht aber weder durch X noch durch $\overline{ZC''}$. Nach Pasch muss sie dann $\overline{XC''}$ in einem inneren Punkt B'' treffen, der auf der gleichen Seite von XZ liegt, wie A', B' und C'. Also ist $\overrightarrow{XA'} ||| \overrightarrow{YB'}$. ■

Wir verallgemeinern nun die Definition der „korrespondierenden Punkte“. Und zwar betrachten wir drei Sorten von Geradenbüscheln:

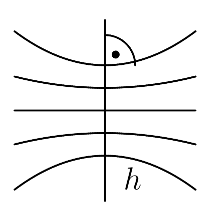
- Das Büschel Σ_P aller Geraden durch einen gegebenen Punkt P. Es ist durch den Punkt P festgelegt.



- Das Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ aller Geraden, die zu einer gegebenen Geraden l in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind. Ein solches Büschel ist durch eine der Geraden und die Richtung, die hier symbolisch mit Ω bezeichnet wird, festgelegt. Man nennt Ω auch einen ***idealen Punkt***.



- Das Büschel $\Sigma_h^\perp$ aller Geraden, die auf einer gegebenen Geraden h senkrecht stehen. Es ist natürlich durch h festgelegt.



Oben wurde gezeigt, dass die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks immer zu einer dieser drei Sorten von Büscheln gehören.

Definition:

Sei Σ ein Büschel von Geraden. Zwei Punkte A, B heißen ***korrespondierend*** bzgl. Σ, falls sie gleich sind oder die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ zu Σ gehört (in Zeichen $A \simeq B$).

Sei A ein fester Punkt.

1. $A \simeq B$ bezüglich Σ_P gilt genau dann, wenn A und B den gleichen Abstand von P haben.

2. $A \simeq B$ bezüglich $\Sigma(l, \Omega)$ bedeutet, dass A und B auf Geraden a, b liegen, die beide zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ asymptotisch parallel sind, und dass sie im bisherigen Sinne korrespondierende Punkte sind.

3. $A \simeq B$ bezüglich $\Sigma_h^\perp$ gilt genau dann, wenn A und B auf der gleichen Seite von h liegen und den gleichen Abstand von h haben.

2.16 Satz. *„Korrespondierend bezüglich eines Geradenbüschels" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Reflexivität und Symmetrie folgen ganz einfach, die Transitivität gewinnt man aus dem Satz 4.14 über die Mittelsenkrechten im Dreieck. ■

Im Falle des Büschels Σ_P ergibt die Menge der zu einem festen Punkt A korrespondierenden Punkte einen **Kreis um** P. Im Falle von $\Sigma_h^\perp$ kommt die Kurve der zu h äquidistanten Punkte heraus. Im Falle eines Büschels vom Typ $\Sigma(l, \Omega)$ erhält man eine neue interessante Kurve:

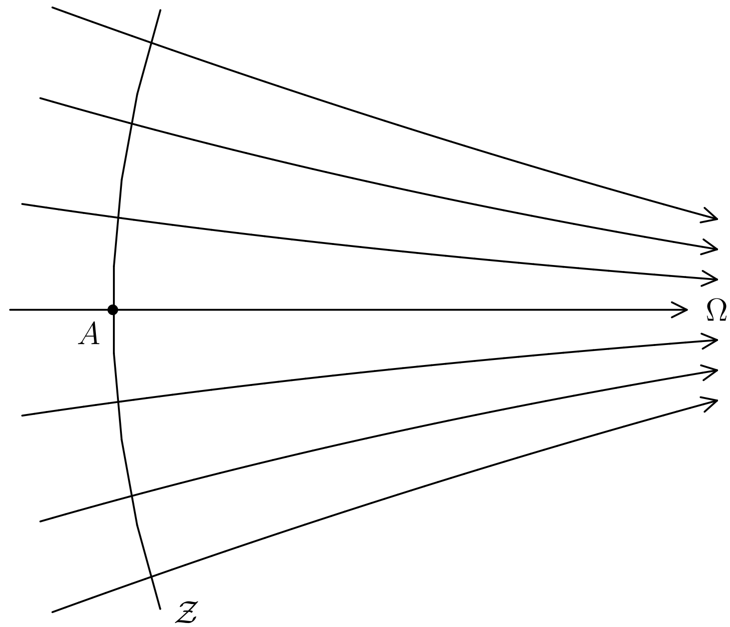
Definition:

Es sei ein Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ und ein Punkt A gegeben. Die Menge

$$\mathcal{Z} := \{B \mid A \simeq B \text{ bezüglich } \Sigma(l, \Omega)\}$$

heißt ein ***Horozykel***.

Gauß nannte die Horozykel ***Parazykel*** oder ***Kreislinien von unendlichem Radius***, Lobatschewski sprach von ***Grenzkreisen***.



2.17 Satz. *Je drei paarweise verschiedene Punkte auf einem Horozykel können nicht auf einer Geraden liegen.*

Beweis: Gilt etwa $A - B - C$, so sind die Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ zueinander überparallel, gehören also nicht zu einem Büschel $\Sigma(l, \Omega)$. ■

Zu jedem Punkt P und jedem idealen Punkt Ω gibt es genau einen Strahl $\overrightarrow{P\Omega}$ durch P in Richtung Ω. Man nennt einen solchen Strahl auch eine ***Achse*** oder einen ***Radius*** des durch P und Ω bestimmten Horozykels, und Ω das ***Zentrum***. Zwei Horozykeln mit gleichem Zentrum nennt man ***konzentrisch***.

Ist $\mathcal{Z}$ ein Horozykel mit Zentrum Ω, $P \in \mathcal{Z}$ und g eine Gerade durch P, so kann g den Horozykel nach dem obigen Satz in höchstens zwei Punkten treffen. Es gibt nun drei Möglichkeiten:

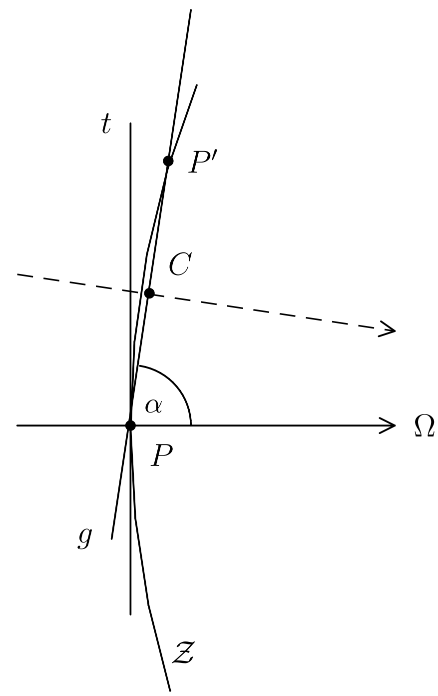
1. g ist der Radius $\overrightarrow{P\Omega}$ (und trifft natürlich nur einmal!)

2. g steht in P auf $\overrightarrow{P\Omega}$ senkrecht. Man nennt g dann eine ***Tangente*** an $\mathcal{Z}$. Würde g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen, so hätte man zwei Radien mit einer gemeinsamen Senkrechten, aber das ist unmöglich.

   Die Tangente berührt $\mathcal{Z}$ vom Zentrum Ω aus gesehen von außen, wie man leicht an den Winkeln erkennen kann.

3. Ist g weder ein Radius noch eine Tangente, so muss g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen.

BEWEIS FÜR DIE 3. AUSSAGE:

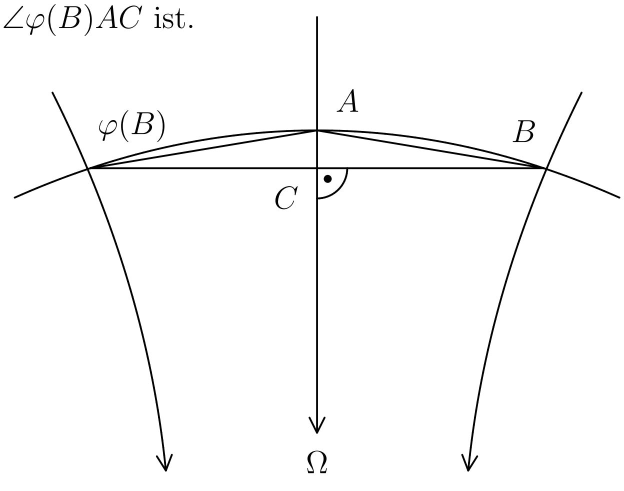


Sei t die Tangente in P, α der Winkel, den g mit dem Radius einschließt. Man kann dann auf der Seite von t, auf der $\mathcal{Z}$ liegt, einen Punkt C auf g wählen, so dass $\Pi(PC) = \alpha$ ist. Dann ist die Senkrechte zu g in C asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{P\Omega}$. Die Spiegelung an dieser Senkrechten bildet P auf einen weiteren Punkt $P' \in g \cap \mathcal{Z}$ ab. Man nennt g daher eine ***Sekante*** von $\mathcal{Z}$ und $\overline{PP'}$ eine ***Sehne***.

Horozykel sind sehr symmetrisch:

2.18 Satz. *Sei $\mathcal{Z}$ ein Horozykel, $A \in \mathcal{Z}$ und $B \neq A$ ein weiterer Punkt auf $\mathcal{Z}$. Ist φ die Spiegelung an der Achse $\overrightarrow{A\Omega}$, so liegt auch $\varphi(B)$ auf $\mathcal{Z}$.*

BEWEIS: Die Spiegelung des Strahls $\overrightarrow{B\Omega}$ ergibt einen ebenfalls zu $\overrightarrow{A\Omega}$ asymptotisch parallelen Strahl $\overrightarrow{\varphi(B)\Omega}$. Sei C der Schnittpunkt von $\overline{B\varphi(B)}$ mit $\overrightarrow{A\Omega}$. Dann ist $ACB \mathrel{\widehat{=}} AC\varphi(B)$, und die Winkel bei C sind rechte Winkel. Es folgt, dass auch $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle\varphi(B)AC$ ist.



Da $A \frown B$ ist, ist $\angle CAB \mathrel{\widehat{=}} \angle AB\Omega$. Und dann ist natürlich auch $\angle CA\varphi(B) \mathrel{\widehat{=}} \angle A\varphi(B)\Omega$.

Durch Winkelsubtraktion folgt, dass $\angle CB\Omega \mathrel{\widehat{=}} \angle C\varphi(B)\Omega$ ist. Also sind B und $\varphi(B)$ korrespondierende Punkte bezüglich Ω, und $\varphi(B)$ liegt auf $\mathcal{Z}$. ∎

Man kann von drei Punkten A, B, C auf einem Horozykel eindeutig sagen, wann einer von ihnen (z.B. C) zwischen den beiden anderen liegt (nämlich genau dann, wenn $\overrightarrow{A\Omega}$ und $\overrightarrow{B\Omega}$ auf verschiedenen Seiten von $\overrightarrow{C\Omega}$ liegen). Deshalb kann man auch einen ***Horozykel-Bogen*** $\widehat{AB}$ (auf $\mathcal{Z}$) als Menge aller $C \in \mathcal{Z}$ definieren, die zwischen A und B liegen oder gleich einem dieser beiden Punkte sind.

2.19 Folgerung 1. *Wenn A, B und C auf dem Horozykel $\mathcal{Z}$ liegen, B sich zwischen A und C befindet und φ die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ ist, so gilt:*

$$\widehat{AB} \mathrel{\widehat{=}} \widehat{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

Der Beweis ist sehr einfach.

2.20 Folgerung 2. *Die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Horozykel. Wenn die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kongruent sind, so auch die Bögen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$.*

Zum Beweis nehme man o.B.d.A. an, dass die Punkte alle hintereinander liegen. Dann zeigt man leicht, dass die Kongruenz der Strecken durch die Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$ hergestellt wird. Der Rest ergibt sich aus Folgerung 1.

2.21 Folgerung 3. *Sind A, B und A' Punkte auf einem Horozykel $\mathcal{Z}$, so gibt es einen Punkt $B' \in \mathcal{Z}$, so dass $\widehat{AB} \mathrel{\widehat{=}} \widehat{A'B'}$ ist.*

Beweis: Sei Ω das Zentrum von $\mathcal{Z}$, $\overrightarrow{C\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$, φ_1 die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ und φ_2 die Spiegelung an $\overrightarrow{A'\Omega}$, sowie $B' := \varphi_2 \circ \varphi_1(B)$. Dann ist offensichtlich $\widehat{AB} \mathrel{\widehat{=}} \widehat{A'B'}$ (denn $\varphi_2 \circ \varphi_1(A) = A'$). ∎

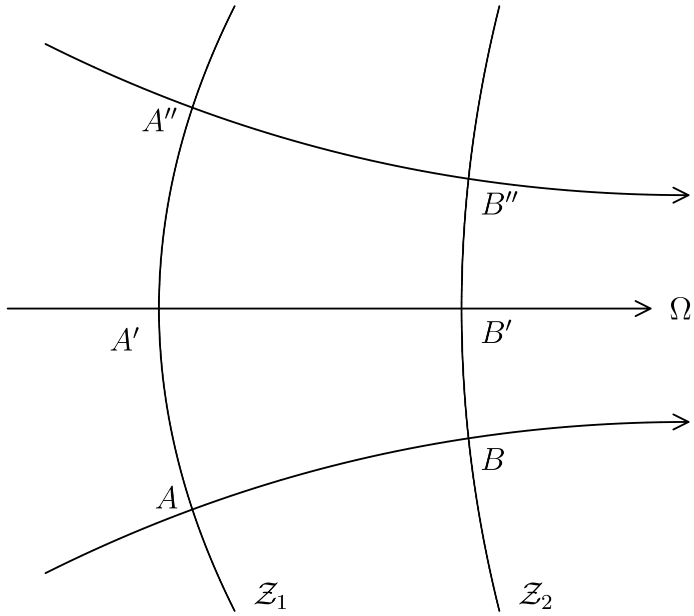
Ein Bogenstück auf einem Horozykel ist also frei verschiebbar, wie eine Strecke auf einer Geraden. Und zwei Bogenstücke sind genau dann kongruent, wenn die darunter liegenden Sehnen kongruent sind.

Mit Hilfe des engen Zusammenhangs zwischen Bögen und den darunterliegenden Sehnen kann man nun auch die Länge eines Horozykel-Bogens definieren (ähnlich wie bei den Strecken durch Intervallschachtelung). Man braucht allerdings eine ***Standard-Einheit***. Dafür bietet sich die Länge des Bogens an, dessen Sehne die Länge $2x$ hat, mit $\Pi(x) = \frac{\pi}{4}$. Die Bogenlänge wird dann mit $2S$ bezeichnet.

2.22 Satz. *Seien $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ zwei konzentrische Horozykel mit Zentrum Ω. Die Radien $\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{s}'$ und $\overrightarrow{s}''$ mögen die Horozykel in den Punkten A, A' und A'' bzw. B, B' und B'' treffen. Dann gilt:*

$$\widehat{AA'}/\widehat{BB'} = \widehat{AA''}/\widehat{BB''}.$$

Zum Beweis: Ist etwa $\widehat{AA'} \mathrel{\widehat{=}} \widehat{A'A''}$, so ist $\overrightarrow{A'\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA''}$, und B'' erhält man durch Spiegeln des Punktes B an dieser Mittelsenkrechten. Die Aussage des Satzes ist dann sicher richtig.



Ähnlich einfach ist es, wenn das Verhältnis ganzzahlig ist. Und schließlich bekommt man die Aussage auch für rationale Verhältnisse.

Bei einem beliebigen inkommensurablen Verhältnis muss man durch rationale Zahlen approximieren. Dafür braucht man die folgende Aussage:

> Wenn die Punkte A_n und B_n auf einem Horozykel liegen und gegen A bzw. B konvergieren, so konvergieren auch die Bogenlängen von $\widehat{A_nB_n}$ gegen $\widehat{AB}$.

Aber das ist ziemlich klar, auf Grund der Konstruktion der Bogenlänge. ∎

Wir bleiben bei der obigen Situation. M sei der Mittelpunkt von $\overline{AA'}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BB'}$. Dann ist $ANM \mathrel{\widehat{=}} A'MN$, also auch $ABN \mathrel{\widehat{=}} A'NB'$. Aber das bedeutet, dass $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ ist. Die konzentrischen Horozykel-Bögen sind äquidistant! Man kann daher eine Funktion f wie folgt definieren:

Ist x der Abstand zwischen den Horozykel-Bögen, so setzen wir

$$f(x) := \widehat{AA'}/\widehat{BB'}.$$

Aus dem obigen Satz folgt, dass f wohldefiniert ist.

Es sei nun noch ein dritter Horozykel $\mathcal{Z}_3$ gegeben, der von den Radien in den Punkten C, C' und C'' geschnitten wird. Ist y der Abstand von $\mathcal{Z}_2$ und $\mathcal{Z}_3$, sowie $z = x + y$ der Abstand von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$, so gilt:

$$f(x+y) = f(z) = \widehat{AA'}/\widehat{CC'} = \widehat{AA'}/\widehat{BB'} \cdot \widehat{BB'}/\widehat{CC'} = f(x) \cdot f(y).$$

Setzen wir schließlich noch $F(x) := \ln f(x)$, so ist $F(x+y) = F(x) + F(y)$. Man kann dann schließen, dass F linear ist:

Offensichtlich ist $F(nx) = n \cdot F(x)$ (für $n \in \mathbb{N}$) und dann auch $F(x/n) = F(x)/n$, also $F(qx) = q \cdot F(x)$ für (positive) rationale Zahlen q.

Liegen A, A' und B, B' auf konzentrischen Horozykeln, so ist $\angle AA'B'$ spitz und $\angle BB'A'$ stumpf. Verbindet man die Mittelpunkte M von $\overline{AA'}$ und N von $\overline{BB'}$, so entsteht ein Viereck $MNB'A'$ mit rechten Winkeln bei M bzw. N, und es ist klar, dass $\overline{MA'} > \overline{NB'}$ ist. Dann ist auch $\overset{\frown}{AA'} > \overset{\frown}{BB'}$, also $f(x) > 1$ und damit $F(x) > 0$. Da das für jedes positive x gilt, ist F streng monoton wachsend. Ist $x_1 < x_2$, so ist $F(x_1) < F(x_2)$. Dann ist $F(x_1 + (x_2 - x_1)/2) = F(x_1) + (F(x_2) - F(x_1))/2$. Das zeigt, dass die Werte von F dicht liegen. F kann also keine Sprungstellen besitzen und muss stetig sein. Daraus folgt, dass F von der Form $F(x) = c \cdot x$ ist, mit einer Konstanten $c > 0$. Daraus folgt: $f(x) = e^{cx}$. Traditionsgemäß schreibt man $c = \frac{1}{k}$ und erhält:

2.23 Satz. *Das Verhältnis $\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}$ zweier sich entsprechender Bogenstücke auf konzentrischen Horozykeln im Abstand x erfüllt die Formel*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = e^{x/k}, \qquad \textit{mit einer universellen Konstanten } k.$$

Die Konstante k beschreibt die Distanz zwischen zwei konzentrischen Horozykel-Bögen, deren Längenverhältnis $= e = 2.71828\ldots$ ist, hat also die Dimension einer Länge. Üblicherweise wählt man in der Flächenfunktion $\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC)$ die gleiche Konstante.

Bolyai und Lobatschewski ist es schließlich gelungen, eine Formel für den Parallelitätswinkel aufstellen:

$$\boxed{\tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.}$$

Wir wollen den Beweis dieser Formel (nach Bolyai) zumindest andeutungsweise vorführen.

Definition:

Zwei Geraden im Raum heißen ***parallel*** (bzw. ***asymptotisch parallel***), wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und dort parallel (bzw. asymptotisch parallel) sind.

Mit dieser Definition bleiben die bekannten Sätze der neutralen Geometrie erhalten.

Definition:

Eine Gerade heißt zu einer Ebene ***asymptotisch parallel***, wenn sie zu irgend einer Geraden dieser Ebene asymptotisch parallel ist.

Man zeigt dann leicht, dass die Gerade zu ihrer orthogonalen Projektion asymptotisch parallel ist. Bemerkenswert ist nun der folgende Satz:

2.24 Satz. *Durch eine zu einer gegebenen Ebene $\mathcal{E}$ asymptotisch parallelen Gerade g gibt es genau eine Ebene $\mathcal{E}'$, die $\mathcal{E}$ nicht schneidet.*

Der Beweise sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Man beachte aber die formale Ähnlichkeit des Satzes mit dem Playfair-Axiom! Dabei befinden wir uns in der Neutralen Geometrie!

Ab jetzt setzen wir wieder das hyperbolische Parallelenaxiom voraus.

Die (asymptotische) Parallelität in Richtung eines idealen Punktes Ω und die Relation „korrespondierend" kann man auch im Raum erklären.

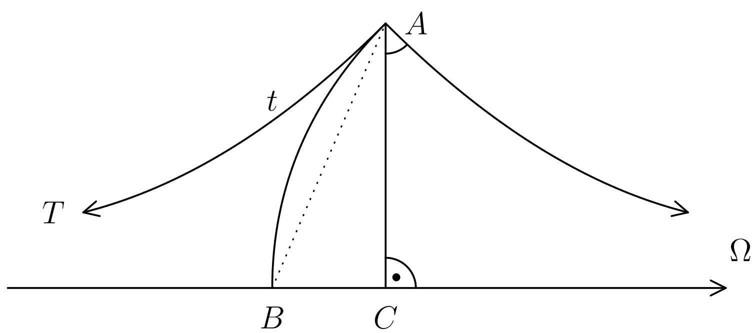
Definition:

Die Menge $\mathcal{S}$ aller Punkte X, die (bezüglich einer Richtung Ω) zu einem festen Punkt P korrespondierend sind, bezeichnet man als ***Grenzfläche*** oder ***Horosphäre***. Der ideale Punkt Ω wird wieder als ***Zentrum*** bezeichnet, die Geraden oder Strahlen in Richtung Ω als ***Achsen*** oder ***Radien***. Eine Ebene, die einen Radius von $\mathcal{S}$ enthält, nennt man eine ***diametrale Ebene***.

Offensichtlich schneidet jede diametrale Ebene die Horosphäre in einem Horozykel. Und nun passiert etwas ganz Erstaunliches: Wählt man die Horosphäre als Ebene und die auf ihr gelegenen Horozykeln als Geraden, so erhält man ein Modell für die ebene Geometrie. Und wegen Satz 2.24 ist diese Geometrie euklidisch! Für Bolyai war das wohl das entscheidende Indiz dafür, dass er auf der richtigen Spur war.

2.25 Lemma. *$\widehat{AB}$ sei ein Bogen auf einem Horozykel mit Zentrum Ω. t sei die Tangente an $\widehat{AB}$ in A, $T \in t$ ein Punkt auf der gleichen Seite von $\overrightarrow{A\Omega}$ wie B und C der Fußpunkt des Lotes von A auf den Radius durch B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Die Länge des Bogens $\widehat{AB}$ ist die Einheitslänge S.
(2) $\Pi(AC) = \pi/4$.
(3) $\overrightarrow{AT} \,|||\, \overrightarrow{CB}$.



Beweis: Zunächst eine Vorbemerkung: Der Winkel $\angle AB\Omega$ ist kleiner als $\pi/2$ (denn A und B sind korrespondierende Punkte), sein Nebenwinkel also $> \pi/2$. Da das Dreieck ABC eine Winkelsumme $< \pi$ haben muss, ist klar, dass C von B aus gesehen in Richtung Ω liegen muss. Das angegebene Bild stimmt also! Man beachte außerdem, dass AT und $A\Omega$ Geraden sind, nicht aber der Horozykelbogen $\overset{\frown}{AB}$!

Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar, auf Grund der Definition von S.

Da die Tangente stets auf dem Radius senkrecht steht, ist $\angle TA\Omega = \pi/2$, also

$$\angle CAT + \angle CA\Omega = \frac{\pi}{2}.$$

Daher gilt:

$$\overrightarrow{AT} ||| \overrightarrow{CB} \iff \angle CAT = \Pi(AC) = \angle CA\Omega \iff \Pi(AC) = \frac{\pi}{4}.$$

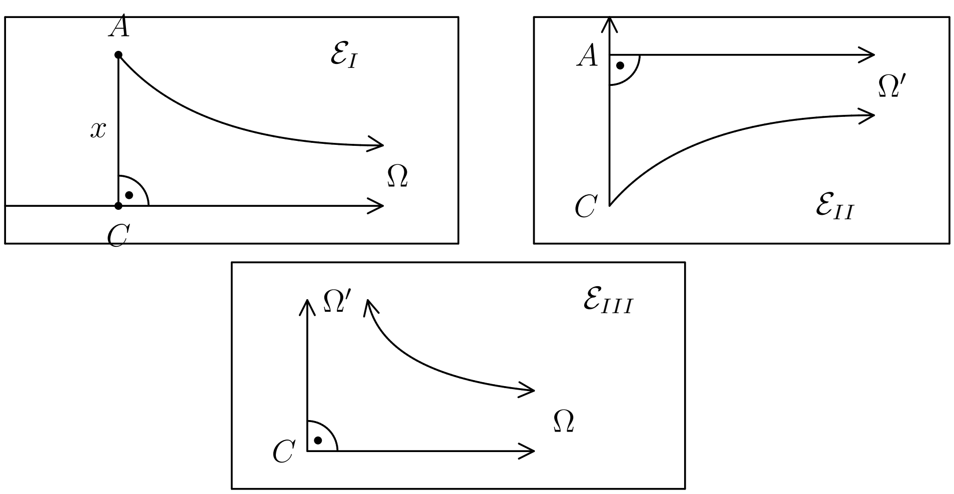
Damit ist alles gezeigt. ∎

2.26 Die Formel für den Parallelitätswinkel. $\tan \dfrac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}$.

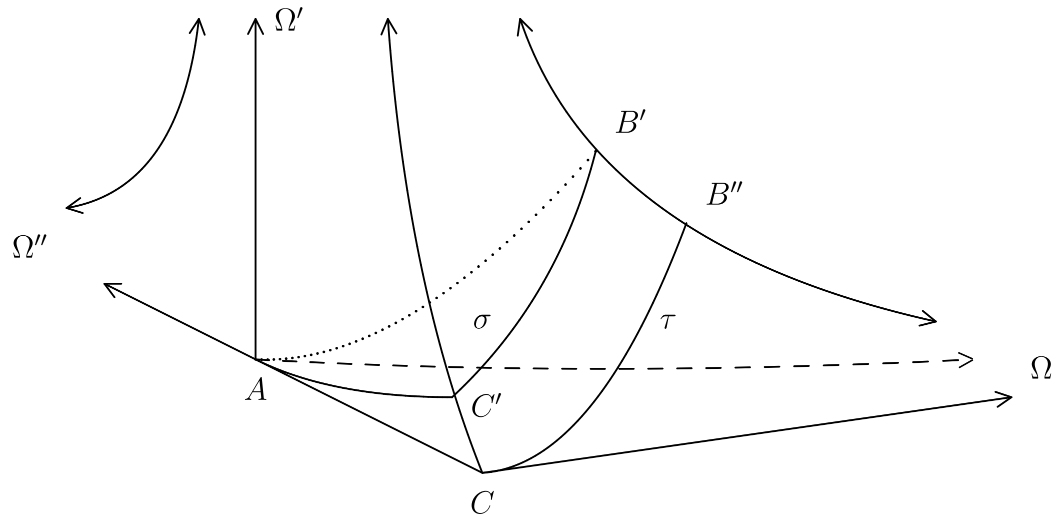
Beweis: Sei $\overline{AC}$ eine Strecke der Länge x, $\alpha := \Pi(x)$. In einer Ebene $\mathcal{E}_I$, in der A und C liegen, werde in C die Senkrechte $\overrightarrow{C\Omega}$ errichtet und bei A die Parallele $\overrightarrow{A\Omega}$ angetragen. Dann ist $\angle CA\Omega = \alpha$.

$\mathcal{E}_{II}$ sei die zu $\mathcal{E}_I$ orthogonale Ebene durch AC. In der werde die Senkrechte $\overrightarrow{A\Omega'}$ zu AC errichtet und bei C die Parallele $\overrightarrow{C\Omega'}$ dazu angetragen.

Schließlich sei $\mathcal{E}_{III}$ die durch $\overrightarrow{C\Omega}$ und $\overrightarrow{C\Omega'}$ bestimmte Ebene. Sie enthält die zu $\overrightarrow{C\Omega}$ und $\overrightarrow{C\Omega'}$ parallele Gerade $\Omega\Omega'$.



Alles zusammen ergibt folgendes Bild:



Durch A geht die Horosphäre σ mit dem Zentrum Ω'. Die trifft $\overrightarrow{C\Omega'}$ in einem Punkt C' und $\Omega\Omega'$ in einem Punkt B'. So entsteht auf σ das euklidische Dreieck $AC'B'$.

Weil $\overrightarrow{C\Omega}$ auf $\mathcal{E}_{II}$ senkrecht steht, ist $\angle\Omega C\Omega'$ ein rechter Winkel, und $\mathcal{E}_{III}$ steht senkrecht auf $\mathcal{E}_{II}$. Und weil die Tangenten an $\overset{\frown}{AC'}$ und $\overset{\frown}{C'B'}$ in C' jeweils auf der Schnittgeraden $C\Omega'$ der beiden Ebenen senkrecht stehen, ist auch der euklidische Winkel $\angle AC'B'$ ein Rechter. Der Winkel $\angle C'AB'$ stimmt dagegen mit α überein, wie man leicht an den Tangenten in A erkennt.

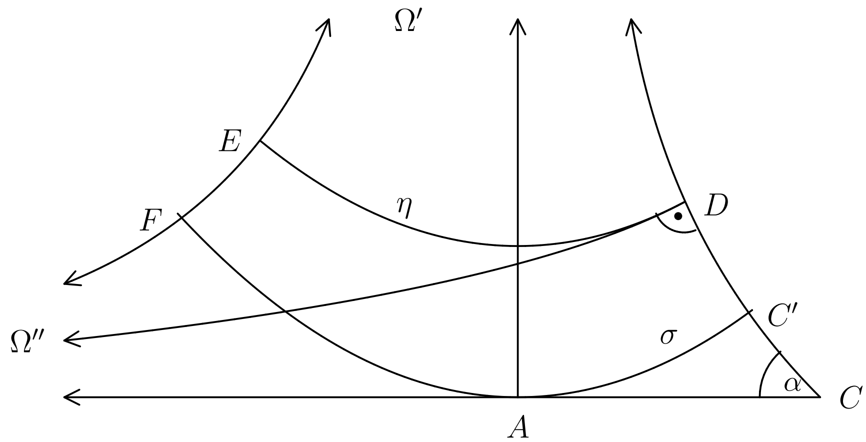
In der euklidischen Geometrie auf σ kann man natürlich auch mit Winkelfunktionen und euklidischer Trigonometrie arbeiten. Die Hypotenuse AB' des Dreiecks $AC'B'$ hat aber nach Lemma 2.25 die Länge S, da die Tangente $\overrightarrow{A\Omega}$ an $\overset{\frown}{AB'}$ in A zu dem Radius durch B' parallel ist (in der von A und $\Omega\Omega'$ aufgespannten Ebene $\mathcal{E}_{IV}$). Also gilt:

$$\overset{\frown}{B'C'} = S \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad \overset{\frown}{AC'} = S \cdot \cos\alpha.$$

Nun sei τ die zu σ konzentrische Horosphäre durch C. Sie trifft $\Omega\Omega'$ in einem Punkt B''. Weil Ω' das Zentrum von τ ist, sind $\overrightarrow{C\Omega'}$ und $\overrightarrow{B''\Omega'}$ Radien von τ. Weil $\overrightarrow{C\Omega}$ auf $\overrightarrow{C\Omega'}$ senkrecht steht, ist $\overrightarrow{C\Omega}$ Tangente an τ. Dann folgt wieder mit Lemma 2.25, dass $\overset{\frown}{B''C}$ die Länge S hat. Führt man noch eine Längenfunktion λ für die hyperbolischen Geraden ein, so ist

$$\overset{\frown}{B''C}/\overset{\frown}{B'C'} = e^{\lambda(CC')/k}, \quad \text{also } e^{\lambda(CC')/k} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Für den Rest des Beweises brauchen wir nur noch die Situation in Ebene $\mathcal{E}_{II}$ zu betrachten.



Wir wählen einen Punkt D auf $\overrightarrow{C\Omega'}$ mit $\overline{CD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AC}$. Die Senkrechte zu $\overrightarrow{C\Omega'}$ in D ist dann automatisch parallel zu $\overrightarrow{C\Omega''}$. Die Horosphäre σ trifft $\Omega'\Omega''$ in einem Punkt F, und die zu σ konzentrische Horosphäre η durch D trifft $\Omega'\Omega''$ in einem Punkt E. Da $\overrightarrow{D\Omega''}$ die Tangente an η in D ist, folgt wieder mit Lemma 4.25, dass $\widehat{DE}$ die Länge S hat, und das gleiche trifft auf $\widehat{AF}$ zu. Also ist

$$e^{\lambda(C'D)/k} = \widehat{C'F}/\widehat{DE} = \frac{S \cdot \cos\alpha + S}{S} = \cos\alpha + 1.$$

Zusammen mit dem obigen Resultat und $\overline{CC'} + \overline{C'D} = x$ ergibt das:

$$\begin{aligned} e^{x/k} &= e^{\lambda(CC')/k} \cdot e^{\lambda(C'D)/k} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha} \cdot (\cos\alpha + 1) \\ &= \frac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Das liefert die gewünschte Formel. ∎

Nun ist man tatsächlich in der Lage, alles auszurechnen. Hier ist ein Beispiel:

2.27 Folgerung.

$$\textit{Ist } \Pi(x) = \frac{\pi}{4}, \textit{ so ist } x = k \cdot \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Beweis: Sei $\alpha := \Pi(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Dann ist

$$1 = \tan(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} = \frac{2y}{1 - y^2}, \text{ mit } y := \tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.$$

Nun folgt:

$$1 = \frac{2y}{1-y^2} \iff y^2 + 2y - 1 = 0$$
$$\iff y = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Da $y > 0$ ist, ist $e^{-x/k} = y = -1 + \sqrt{2}$, also

$$e^{x/k} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logarithmieren ergibt die gewünschte Formel. ∎