Kapitel 3

Das Parallelenproblem

3.1 Beweisversuche

Schon früh störte Euklids Postulat V die ihm nachfolgenden Mathematiker, vor allem aus ästhetischen Gründen. Man kam zu der Auffassung, das Postulat müsste beweisbar sein, nicht zuletzt auch deswegen, weil Euklid in seinem ersten Buch so lange zögerte, es anzuwenden, und weil er manche Sätze recht mühsam bewies, obwohl das mit dem Parallelenaxiom sehr viel einfacher ging.

Posidonius, Philosoph, Astronom, Historiker und Mathematiker (ca. 135 - 50 v.Chr.), war einer der ersten, von denen Beweisversuche bekannt sind. Er schlug vor, Definition 23 wie folgt zu ändern:

> **Parallel** sind gerade Linien, die in der selben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten.

Die Schwierigkeiten werden hier natürlich in die Definition verlagert. Zur besseren Unterscheidung nennen wir Geraden, die immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten, *äquidistant*, und das Wort *parallel* benutzen wir weiterhin für Geraden, die sich nicht treffen. (Dass man Geraden auch dann parallel nennen kann, wenn sie gleich sind, spielt hier keine Rolle)

Was sind äquidistante Geraden? Gemeint war wohl folgendes:

Definition:

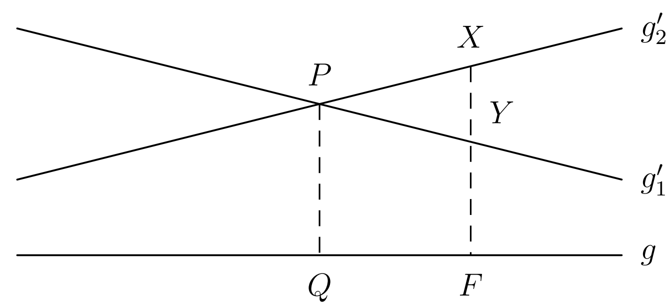
Zwei Geraden heißen *äquidistant*, wenn alle Lote, die man von einem Punkt auf einer der beiden Geraden auf die andere Gerade fällt, zueinander kongruent sind.

Offensichtlich sind äquidistante Geraden parallel. Der Plan des Posidonius sah nun folgendermaßen aus:

1.1 Satz P_1. *Durch einen gegebenen Punkt P, der nicht auf einer gegebenen Geraden g liegt, kann höchstens eine zu g äquidistante Gerade g' gehen.*

Beweis: Annahme, es gibt zwei verschiedene Geraden g'_1, g'_2 durch P, die beide äquidistant zu g sind. Dann zerfällt $g'_2 \setminus \{P\}$ in zwei kongruente Teile, die auf verschiedenen Seiten von g'_1 liegen. g liegt dagegen ganz auf einer Seite von g'_1. Es gibt also einen Punkt $X \in g'_2$, der auf einer anderen Seite von g'_1 liegt als die Gerade g.

Wir fällen nun das Lot von P auf g mit Fußpunkt Q, und das Lot von X auf g, mit Fußpunkt F.



Auf jeden Fall ist dann $Q \neq F$, und es muss einen Punkt $Y \in \overline{XF} \cap g'_1$ geben. Damit gilt:

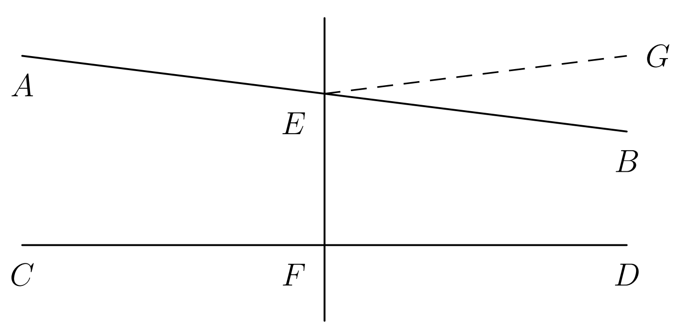
$$X - Y - F, \qquad \text{aber } \overline{YF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XF}.$$

Das ist ein Widerspruch. ∎

Dieser Satz kann irgendwo vor Euklids Proposition 29 stehen!

1.2 Satz P_2. *Wenn eine Gerade h zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten E und F trifft und dabei mit ihnen auf einer Seite von h Ergänzungswinkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so treffen sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h.*

Beweis: Sei $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$, sowie $A - E - B$ und $C - F - D$. Es sei $\angle BEF + \angle EFD < 180°$.



Da $\angle AEF + \angle FEB = 180°$ und $\angle CFE + \angle DFE = 180°$ ist, muss $\angle AEF + \angle EFC > 180°$ sein.

Wir tragen nun $\angle EFC$ bei E an EF an. Das ergibt einen Winkel $\angle FEG$. Nun gilt:

$$\angle GEF = \angle EFC = 180^\circ - \angle DFE > \angle BEF.$$

Also sind GE und $BE = g_1 = AB$ zwei verschiedene Geraden durch E. Wegen der Wechselwinkelbeziehung ist EG parallel zu CD.

Nun schließt Posidonius, dass EG auch äquidistant zu CD ist. Nach P_1 gibt es nur eine Gerade durch E, die äquidistant zu CD ist. Also kann AB es nicht sein. Und wieder benutzt Posidonius die versteckte Annahme, dass parallele Geraden äquidistant sind, und folgert, dass AB auch nicht parallel zu CD sein kann. Also müssen sich AB und CD treffen, und man kann sich leicht überlegen, dass das dann auf der Seite von h geschehen muss, auf der B und D liegen. ∎

Der Fehler, den Posidonius macht, besteht darin, dass er einen neuen Parallelitätsbegriff einführt, aber mit den Eigenschaften des alten arbeitet. In Wirklichkeit hat er das Axiom $E - P$ (Euklids Postulat V) durch ein anderes ersetzt:

P-P) Parallele Geraden sind äquidistant.

Bezeichnen wir die neutrale Geometrie mit (N), so folgt aus den (dann korrekten) Sätzen P_1 und P_2:

$$(N) \wedge (P - P) \quad \Longrightarrow \quad (E - P).$$

Hat sich damit etwas gebessert? Nein, denn es gilt auch:

1.3 Satz. $(N) \wedge (E - P) \implies (P - P)$.

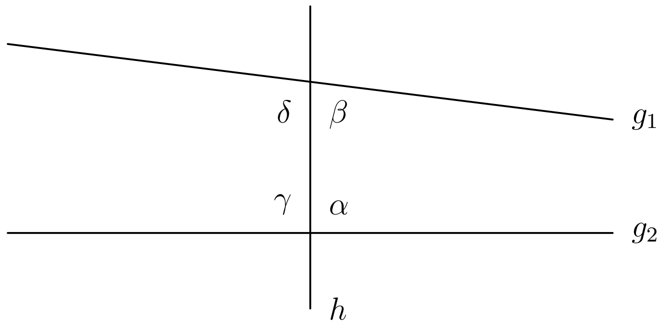
Das haben wir schon im vorigen Kapitel bewiesen.

Die korrigierte Version des Posidonius-Versuchs liefert also lediglich ein zu Postulat V äquivalentes Axiom. Und da ist Euklids Axiom vorzuziehen, denn seine Voraussetzungen sind überprüfbar. Ob zwei gegebene Geraden äquidistant sind, ist dagegen schwer zu sagen.

Der griechische Philosoph **Proklos Diadochos** (ca. 410 - 485 n.Chr.), Haupt der Schule des Neuplatonismus, hatte noch Zugang zu vielen Quellen, die für uns längst verloren sind, z.B. zur Großen Geschichte der Geometrie des Eudemus, eines Schülers des Aristoteles. In seinem Kommentar zum ersten Buch der Elemente gibt Proklos einen kurzen Überblick über das Werk des Eudemus, der selbst in seiner fragmentarischen Form für uns von unschätzbarem Wert ist.

In diesem Kommentar finden sich auch Hinweise auf frühere Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, insbesondere wird ein Versuch des berühmten ägyptischen Naturwissenschaftlers **Claudius Ptolemäus** (ca. 85 - 165 n.Chr.) beschrieben, der übrigens auch die Grundlagen der Trigonometrie geschaffen hat.

Ptolemäus soll folgendermaßen argumentiert haben:



Euklids Proposition 29 besagt: Sind g_1, g_2 parallel, so gelten die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z).

Daraus folgt – durch logische Kontraposition – sofort das Parallelenaxiom. Es genügt also, Proposition 29 zu beweisen, ohne (E-P) zu benutzen.

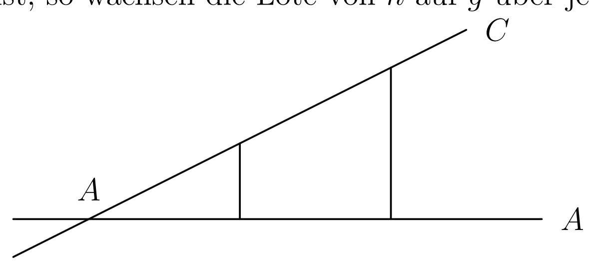
Ptolemäus nimmt nun an, dass g_1, g_2 parallel sind, dass aber $\alpha + \beta < 180°$ ist. Und dann folgert er sehr eigenartig: Da g_1 und g_2 auf der einen Seite von h genauso parallel wie auf der anderen sind, muss $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ sein. Aber dann ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 360°$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $\gamma + \alpha = 180°$ und $\delta + \beta = 180°$ ist.

Dieser „Beweis“ ist natürlich unsinnig, wie Proklos auch feststellte. In Wirklichkeit ist die benutzte Winkelbeziehung äquivalent zum Postulat V.

Proklos gibt nun selbst einen „Beweis“ an:

1.4 Satz Pr_1**.** *Wenn sich zwei verschiedene Geraden in einem Punkt schneiden, dann wird der Abstand zwischen ihnen beliebig groß.*

Es bleibt unklar, was mit „Abstand“ gemeint ist. Hier ist das aber noch leicht zu reparieren. Trifft die Gerade $g = AB$ auf die Gerade $h = AC$, so dass $\angle BAC$ ein spitzer Winkel ist, so wachsen die Lote von h auf g über jede Grenze.



Der Satz ist richtig und kann ohne Parallelenaxiom bewiesen werden. Allerdings führt Proklos den Beweis nicht aus, und wir werden ihn auch erst an späterer Stelle nachtragen können. Unter anderem wird das Archimedes-Axiom benutzt!

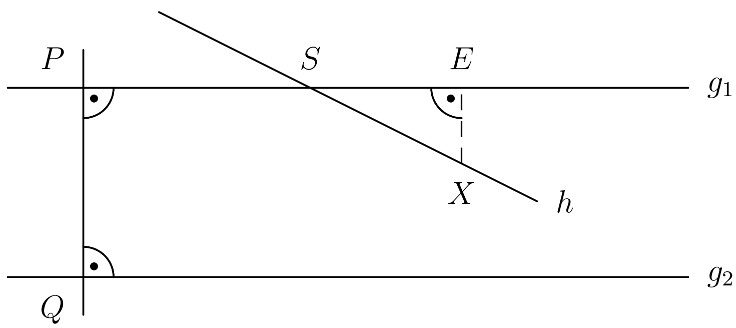
1.5 Satz Pr_2**.** *Der Abstand zwischen zwei Parallelen g_1, g_2, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, kann nicht über alle Grenzen wachsen.*

Auch dieser Satz wird von Proklos nicht bewiesen, und die Formulierung ist noch unklarer. Wir wollen ihn wie folgt verstehen: Es gibt eine Strecke $\overline{KL}$, so dass jedes Lot von einem Punkt von g_1 auf g_2 und jedes Lot von einem Punkt von g_2 auf g_1

größer als $\overline{KL}$ ist. Die Frage, ob der Satz beweisbar ist, stellen wir erst mal zurück.

1.6 Satz Pr_3**.** *Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, so muss sie auch die andere schneiden.*

Beweis:

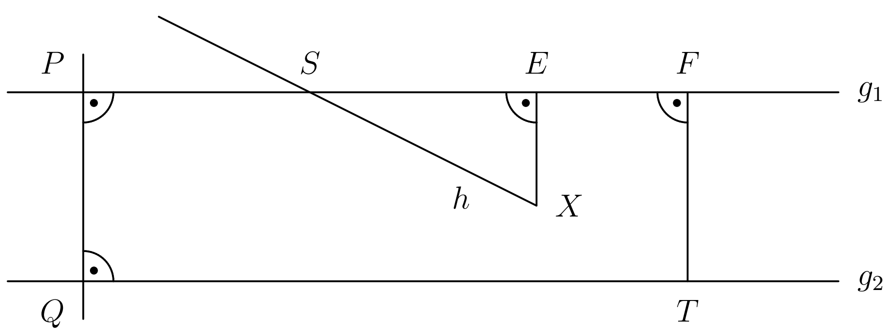


Proklos sagt: Nach Satz Pr_1 wird die Länge des Lotes $\overline{XE}$ beliebig groß. Nach Satz Pr_2 kann der Abstand von g_2 zu g_1 nicht über alle Grenzen wachsen. Das ist nur möglich, wenn h irgendwann Punkte auf der anderen Seite von g_2 erreicht, also insbesondere g_2 schneidet.

Das ist ein wenig knapp. Wir wollen überlegen, ob wir einen sauberen Beweis finden können.

1\. Schritt: Der Abstand zwischen g_1 und g_2 wachse nicht über d (man kann eine Längenfunktion einführen oder d als Vergleichsstrecke auffassen). Nach Pr_1 kann man X so wählen, dass $\overline{EX} > d$ ist.

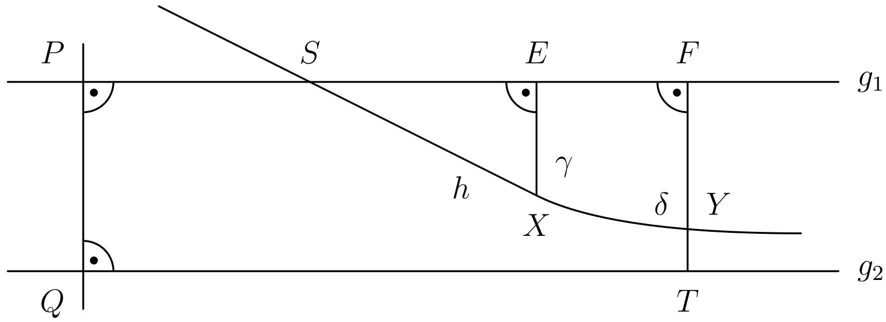
2\. Schritt: Auf der gleichen Seite von PQ wie X kann man ein T auf g_2 finden, so dass für den Fußpunkt F des Lotes von T auf g_1 gilt: $S - E - F$.



Beweis dafür: Sei $\overline{PT} = t > \overline{PE} + d$ (erhält man durch Kreis um P mit Radius t). Dann ist $\overline{PT} > \overline{PE} + \overline{TF}$ (weil jedes Lot $\leq d$ ist), also $\overline{PE} < \overline{PT} - \overline{TF}$. Nach der Dreiecksungleichung ist $\overline{PT} < \overline{PF} + \overline{TF}$, also $\overline{PE} < \overline{PF}$. Das bedeutet: $P - E - F$.

3\. Schritt: Liegen Q und T auf zwei verschiedenen Seiten von h, so treffen sich h und g_2, was zu zeigen war. Liegen Q und T auf der gleichen Seite von h, so trifft h die Strecke in einem Punkt Y mit $T - Y - F$.

Nehmen wir an, dass h die Gerade g_2 nicht trifft, so liegt folgende Situation vor:

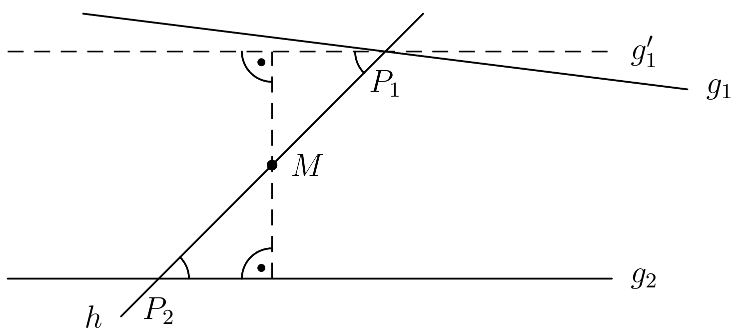


Dann ist $\gamma > R$ (Außenwinkel am rechtwinkligen Dreieck SXE) und $\delta < R$ (Innenwinkel im rechtwinkligen Dreieck SYF), also $\delta < \gamma$. Wäre $\overline{EX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{FY}$, so müsste $\gamma = \delta$ sein (wie wir später zeigen werden). Wäre $\overline{EX} > \overline{FY}$, so könnte man ein Z mit $E - Z - X$ und $\overline{EZ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{FY}$ finden. Dann wäre $\varphi := \angle EZY \mathrel{\widehat{=}} \angle FYZ$ (gleiche Argumentation wie eben). Weil φ Außenwinkel am Dreieck ZXY ist, muss $\varphi > \gamma$ und deshalb $\delta > \angle ZYF = \varphi > \gamma$ sein. Das ist ein Widerspruch.

Daraus folgt, dass $d < \overline{EX} < \overline{FY} < \overline{FT}$ ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Dieser Fall kann also gar nicht eintreten. ∎

1.7 Satz Pr_4**.** *Aus Satz* Pr_3 *folgt Postulat V.*

Beweis: Wir betrachten die Standard-Situation: Zwei Geraden g_1, g_2 werden von h in P_1 bzw. P_2 geschnitten und bilden Ergänzungswinkel $\alpha + \beta < 2R$.

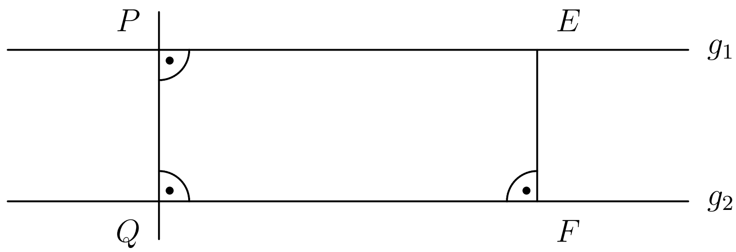


Sei α der Winkel bei P_2. Wir tragen den Winkel α bei P_1 an $\overline{P_1P_2}$ an und erhalten so eine neue Gerade g_1', die parallel zu g_2 ist und von g_1 geschnitten wird.

Vom Mittelpunkt M der Strecke $\overline{P_1P_2}$ fällen wir jeweils das Lot auf g_1' und g_2. Es entstehen zwei kongruente Dreiecke (WWS), und daraus kann man folgern, dass die Lote auf einer Geraden liegen. Also besitzen die Parallelen eine gemeinsame Senkrechte, und g_1 muss auch g_2 schneiden. ∎

Dieser „Beweis“ des Parallelenaxioms ist schon recht trickreich, aber sein Schwachpunkt ist natürlich der Satz Pr_2. Nennen wir die Aussage von Pr_2 das „Proklos-Axiom“ (**P-Pr**). Dann liefern Pr_3 und Pr_4 die Folgerung „(**P-Pr**) $\Longrightarrow$ (**E-P**)“. Aber es gilt auch die Umkehrung:

Beweis dazu: Es gelte das Parallelenaxiom, und es seien zwei Parallelen g_1, g_2 mit gemeinsamer Senkrechte PQ gegeben. Außerdem sei $E \neq P$ ein Punkt auf g_1 und F der Fußpunkt des Lotes von E auf g_2.



Aus dem Parallelenaxiom folgt der Satz über die Winkelsumme, also ist auch $\angle PEF$ ein Rechter. Nun folgt, dass im Viereck $QFEP$ gegenüberliegende Seiten parallel sind. Damit sind sie aber auch gleich lang, insbesondere ist $\overline{EF} \widehat{=} \overline{PQ}$. Weil E beliebig gewählt werden kann, ist damit (**P-Pr**) bewiesen. In Wirklichkeit ist also Pr_2 äquivalent zum Parallelenaxiom.

Über **Theon von Alexandria**, der eine der wichtigsten Euklid-Editionen herausgegeben hat, haben wir schon an früherer Stelle gesprochen. Wir sollten seine Tochter **Hypatia** (370 - 415 n.Chr.) erwähnen, eine der ersten bekannten Mathematikerinnen der Geschichte. Bezeichnend ist, dass sie in den Straßen von Alexandria von aufgebrachten christlichen Fanatikern regelrecht in Stücke gerissen wurde. Mit ihr starb auch die griechische Wissenschaft in Alexandria.

Im Jahre 622 floh Mohammed von Mekka nach Medina und begründete die Religion des Islam. Bereits 641 eroberten die Araber Alexandria. Angeblich hat der Kalif Omar damals befohlen, die Reste der Bibliothek zu vernichten. Er soll gesagt haben: Entweder enthalten die dort gelagerten Schriften dasselbe wie der Koran, dann sind sie überflüssig. Oder sie enthalten etwas, das im Widerspruch zum Koran steht, dann sind sie schädlich. Es ist nicht auszuschließen, dass diese Geschichte von den Christen erfunden wurde, die ja selbst viel zur Zerstörung der Bibliothek beigetragen haben.

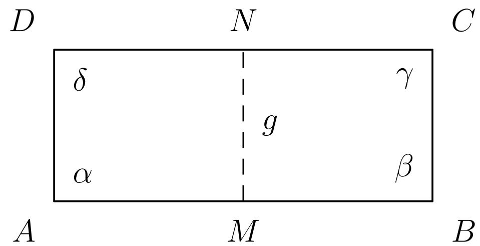
Zwischen 750 und 850 n.Chr. beginnt die Geschichte der Mathematik bei den Arabern. Bagdad und Damaskus wurden zu Zentren der Wissenschaft, Wörter wie „Algebra" oder „Algorithmus" fanden ihren Weg in die Mathematik.

Viele arabische Wissenschaftler beschäftigten sich mit dem Parallelenproblem. Wir wollen hier nur über die zwei bedeutendsten sprechen:

Omar al-Hayyam (auch Khayyam oder Chajjam geschrieben, ca. 1050 – 1130) war ein persischer Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter. Noch mehr als durch seine wissenschaftlichen Untersuchungen wurde er durch seine Lyrik bekannt. Bei Untersuchungen des Parallelenproblems ging er sorgfältiger als seine Vorgänger vor.

1.8 Omar Khayyams Theorem. *Betrachtet wird ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:*

Bei A und B liegen jeweils rechte Winkel vor, und es ist $\overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$.



*Die Strecke $\overline{AB}$ wird **Basis** genannt, die Strecke $\overline{DC}$ **Gipfellinie**. Die Winkel γ und δ heißen **Gipfelwinkel**. Nun gilt:*

1. *Die Gipfelwinkel sind kongruent.*
2. *Errichtet man im Mittelpunkt M der Basis eine Senkrechte, so trifft diese die Gipfellinie in ihrem Mittelpunkt N und bildet mit ihr einen rechten Winkel.*

Beweis:

1) haben wir schon gezeigt (in Teil (b) im Beweis von Satz 5.5).

2) Sei g die Senkrechte zu AB in M. Nach Proposition 28 (Satz über Winkel an Parallelen) ist g sowohl zu AD als auch zu BC parallel. Da A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen, muss das auch für D und C gelten. Also trifft g die Gipfellinie $\overline{DC}$ in einem inneren Punkt N.

Da $AMD \mathrel{\widehat{=}} MBC$ ist (SWS), ist $\overline{DM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MC}$ und $\angle ADM \mathrel{\widehat{=}} \angle MCB$. Weil aber die Gipfelwinkel kongruent sind, muss auch $\angle MDN \mathrel{\widehat{=}} \angle MCN$ sein. Und schließlich ist

$$\angle DMN = R - \angle AMD \mathrel{\widehat{=}} R - \angle BMC = \angle CMN.$$

Also ist $DMN \mathrel{\widehat{=}} MCN$ und insbesondere $\overline{DN} \mathrel{\widehat{=}} \overline{NC}$. Und da $\angle DNM \mathrel{\widehat{=}} \angle CNM$ ist, trifft g senkrecht auf die Gipfellinie. ∎

In der Euklidischen Geometrie würde nun sehr schnell (etwa mit den Sätzen über Winkelsummen) folgen, dass die Gipfelwinkel ebenfalls rechte Winkel sind. Wenn das Parallelenaxiom nicht zur Verfügung steht, kann man zunächst nicht ausschließen, dass die Gipfelwinkel spitze oder stumpfe Winkel sind. Wenn wir solchen „verallgemeinerten Rechtecken" einen Namen geben wollen, sollten wir sie eigentlich *Khayyam-Vierecke* nennen. Aus Gründen, die im nächsten Paragraphen klar werden, heißen sie jedoch ***Saccheri-Vierecke***, nach dem italienischen Wissenschaftler Saccheri.

Mit Hilfe eines sogenannten „philosophischen Prinzips", das angeblich auf Aristoteles zurückgeht und nicht mathematisch begründet werden kann, schließt Omar Khayyam dann, dass zwei Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten äquidistant sind. Diese Hypothese ist sogar stärker als der Satz Pr_2 von Proklos, und es ist klar, dass daraus das Parallelenpostulat folgt. Allerdings benutzt Khayyam beim Beweis die Saccheri-Vierecke. Ich gebe seine Überlegungen hier in modernisierter Form wieder:

1.9 Satz. *Im Viereck $ABCD$ mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sei $\alpha = \beta = R$. Dann gilt:*

1. $\overline{AD} > \overline{BC} \iff \delta < \gamma$.
2. $\overline{AD} = \overline{BC} \iff \delta = \gamma$.
3. $\overline{AD} < \overline{BC} \iff \delta > \gamma$.

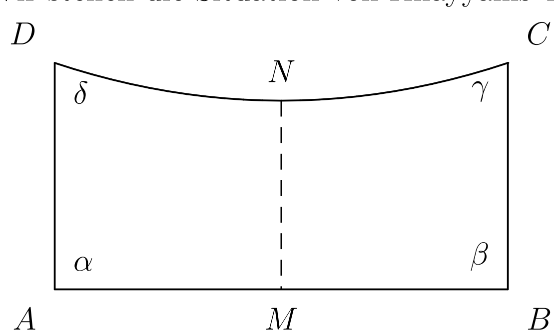
Beweis: Nach Khayyams Theorem gilt: $\overline{AD} = \overline{BC} \implies \delta = \gamma$.

Einen Beweis der restlichen Aussage haben wir in einer analogen Situation im Beweis von Pr_3 schon geführt. ∎

1.10 Satz von den drei Hypothesen. *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dann gilt:*

1. *Ist $\delta < R$, so ist $\overline{DC} > \overline{AB}$.*
2. *Ist $\delta = R$, so ist $\overline{DC} = \overline{AB}$.*
3. *Ist $\delta > R$, so ist $\overline{DC} < \overline{AB}$.*

Beweis: Wir stellen die Situation von Khayyams Theorem her:



Da die Winkel bei M und N Rechte sind, ist $MNDA$ ein Viereck, das die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt. Da auch α ein rechter Winkel ist, folgt aus diesem Satz:

Ist $\delta < R$, so ist $\overline{DN} > \overline{AM}$, usw.

Da $\delta = \gamma$ ist, führt die Betrachtung des rechten Teil-Vierecks zu den gleichen Ergebnissen, und man erhält die Behauptung. ∎

Nun schließt Khayyam folgendermaßen weiter:

Da die Geraden AD und BC eine gemeinsame Senkrechte besitzen, nämlich AB, müssen sie äquidistant sein. Das bedeutet aber, dass die beiden Hypothesen $\delta < R$ und $\delta > R$ auszuschließen sind. Jedes Saccheri-Viereck ist schon ein Rechteck.

Nach diesem nebulösen Schlenkerer kann er wieder korrekt weiterarbeiten, und mit ähnlichen Schlüssen, wie wir sie schon bei Proklos gesehen haben, folgert er schließlich:

> *Wenn die Gipfelwinkel in jedem Saccheri-Viereck Rechte sind, dann folgt das Postulat V.*

Damit hat Khayyam eine weitere zu Postulat V äquivalente Bedingung gefunden (denn die Umkehrung gilt natürlich auch). Sein Fehler liegt im mystischen Beweis der Hypothese von den rechten Gipfelwinkeln.

Nasir ad-Din at-Tusi (auch Nasir al-Din al-Tusi oder Nasir Eddin geschrieben, 1201 – 1274) war zunächst Astrologe bei den Assasinen im Iran, kam dann aber als Hofastronom des Bruders des Mongolenherrschers Kublai Khan in die Gegend von Bagdad. Bekannt wurde er durch seine Forschungen auf dem Gebiet der Trigonometrie. Beim Parallelenproblem knüpfte er an die Ergebnisse von Khayyam an. Da seine Arbeiten später ins Lateinische übersetzt wurden, wurden so die arabischen Forschungen im Abendland bekannt.

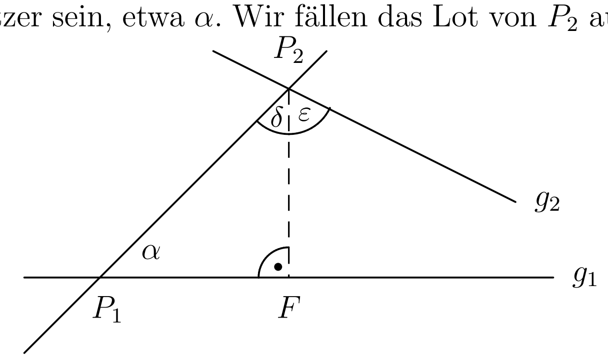
Er kommt auf anderem, aber genauso suspektem Wege zu der Aussage: Die Gipfelwinkel in einem Saccheri-Viereck sind immer rechte Winkel. Daraus folgert er schließlich, dass die Winkelsumme in *jedem* Dreieck 180° beträgt.

Nasir ad-Dins letzter Schritt besteht aus dem folgenden (korrekten) Satz:

1.11 Satz.

Wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist, dann gilt Euklids fünftes Postulat.

Beweis: Die Gerade h werde von den beiden Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 getroffen und bilde dabei die Ergänzungswinkel α (bei P_1) und β (bei P_2). Es sei $\alpha + \beta < 180°$. Dann muss wenigstens einer der beiden Winkel ein spitzer sein, etwa α. Wir fällen das Lot von P_2 auf g_1, mit Fußpunkt F.

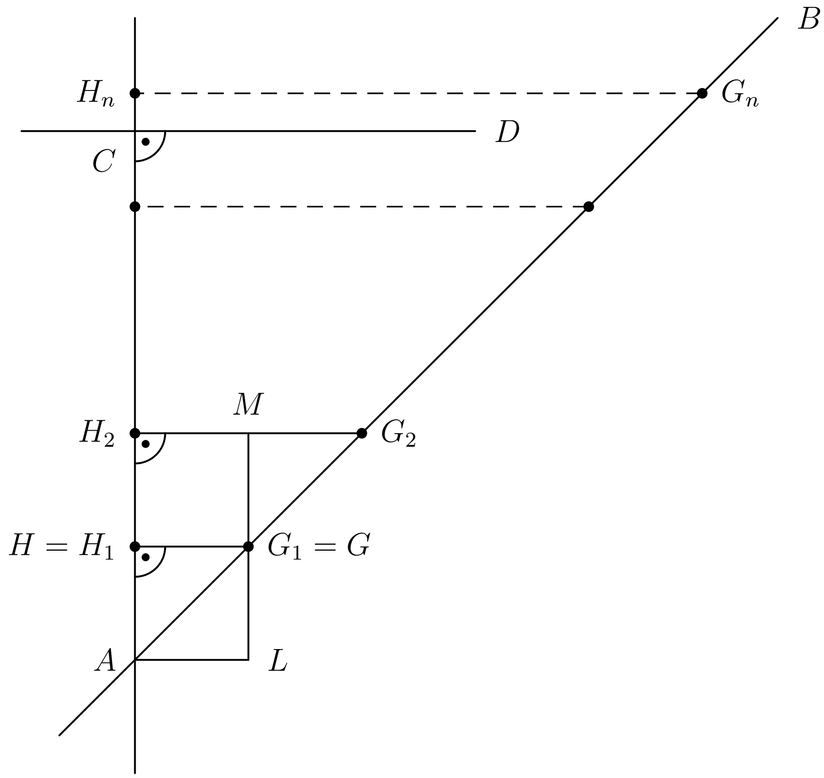


Da in dem Dreieck P_1FP_2 nicht zwei Winkel $\geq 90°$ vorkommen können, muss F auf der gleichen Seite von h liegen wie die Winkel α und β.

Nun sei $\delta := \angle P_1P_2F$. Offensichtlich ist $\delta < 90°$. Ist $\beta < \delta$, so ist der Winkel $\varepsilon := \delta - \beta$ zwischen P_2F und g_2 erst recht ein spitzer Winkel.

Sei nun $\beta \geq \delta$. Ist $\beta = \delta$, so ist $g_2 = FP_2$, und g_1 und g_2 schneiden sich. Wir können also annehmen, dass $\beta > \delta$ ist. Weil nach der Voraussetzung über die Winkelsumme $\delta = 90° - \alpha$ ist, ist $\varepsilon := \beta - \delta = \beta - (90° - \alpha) = (\alpha + \beta) - 90° < 90°$. Damit ist gezeigt, dass g_1 und g_2 mit P_2F auf einer geeigneten Seite einen rechten und einen spitzen Winkel als Ergänzungswinkel bilden.

Wir brauchen uns nur noch mit diesem Spezialfall zu befassen: Die Gerade AC werde von AB unter einem spitzen und von CD unter einem rechten Winkel getroffen.



Gezeigt werden soll, dass sich CD und AB schneiden.

Wir wählen einen Punkt G mit $A - G - B$ und fällen das Lot von G auf AC mit Fußpunkt H. Dann ist klar, dass H auf der gleichen Seite von A liegt wie der Punkt C.

Ist $H = C$, so stimmt das Lot mit CD überein, und wir sind fertig. Gilt $A{-}C{-}H$, so muss CD nach Pasch außer $\overline{AH}$ noch eine weitere Seite des Dreiecks AGH treffen. Dies kann nicht $\overline{HG}$ sein (Parallelität), also trifft CD die Gerade $AG = AB$.

Es bleibt der Fall $A - H - C$ zu untersuchen.

Wir konstruieren Punkte $G_1 := G, G_2, G_3, \ldots$ auf AB mit $\overline{AG_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1G_2} \mathrel{\widehat{=}} \ldots$.

Sei H_2 der Fußpunkt des Lots von G_2 auf AC. Wir behaupten, dass $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HH_2}$ ist.

Zu diesem Zwecke errichten wir in A die Senkrechte AL zu AC (mit $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HG_1}$). Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist $\angle LAG_1 \mathrel{\widehat{=}} 90° - \angle G_1AH \mathrel{\widehat{=}} \angle AG_1H$. Daher ist $AG_1H \mathrel{\widehat{=}} G_1AL$ (SWS), und damit $\angle ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} \angle AHG_1 = 90°$, sowie $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LG_1}$. Dann ist aber auch

$$\angle HG_1L = \angle HG_1A + \angle AG_1L = \angle LAG_1 + (90° - \angle LAG_1) = 90°.$$

Wählt man noch $M \in H_2G_2$ mit $\overline{H_2M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HG_1}$, so ist H_2HG_1M ein Saccheri-Viereck, und es folgt, dass $\angle H_2MG_1 = \angle HG_1M$ ist. Wegen des Satzes von der Winkelsumme muss dann $\angle H_2MG_1 = \angle HG_1M = 90°$ und daher $\overline{MG_1} = \overline{H_2H}$ sein.

Da sich $\angle HG_1L$ und $\angle HG_1M$ zu $180°$ ergänzen, sind M, G_1 und L kollinear. Aber dann sind $\angle AG_1L$ und $\angle MG_1G_2$ Scheitelwinkel, also kongruent. Und da $\angle G_1AL = \angle G_1G_2M$ ist (Winkelsumme im Dreieck), ist $ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} G_1G_2M$ (WSW), und daher $\overline{LG_1} = \overline{G_1M}$. So folgt:

$$\overline{HH_2} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1L} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AH}.$$

Genauso folgt allgemein für den Fußpunkt H_i des Lotes von G_i auf AC, dass $\overline{AH_i} \mathrel{\widehat{=}} n \cdot \overline{AH}$ ist. Nach Archimedes gibt es aber ein n, so dass $n \cdot \overline{AH} > \overline{AC}$ ist. Dann gilt $A - C - H_n$, und wir sind fertig. ■

1.12 Folgerung. *Postulat V gilt genau dann, wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck* $180°$ *beträgt.*

1482 erschien die erste gedruckte Version der „Elemente“ in Europa. Der aus Bamberg kommende Christoph Schlüssel, genannt **Christopher Clavius** (1537 – 1612), der in Rom an der Ausarbeitung des Gregorianischen Kalenders beteiligt war, veröffentlichte 1574 eine Euklid-Ausgabe, in der er alles damals Bekannte zusammenfasste. Auch er versuchte (vergeblich) einen Beweis des Parallelenaxioms, indem er anschaulich begründete, warum die Menge der zu einer gegebenen Geraden äquidistanten Punkte wieder eine Gerade ist.

Giordano Vitale (1633 – 1711) veröffentlichte im Rahmen einer überarbeiteten Euklid-Ausgabe einen Beweis, in dem er etwas ähnliches versuchte. Immerhin konnte er zeigen: Wenn zwei Geraden an drei verschiedenen Stellen den gleichen Abstand voneinander haben, sind sie äquidistant.

In England machte 1621 **Sir Henry Savile** in Vorlesungen über Euklid auf zwei angebliche Makel in den „Elementen“ aufmerksam: Die Theorie der Parallellinien und die Lehre von den Proportionen.

Er stiftete daraufhin einen mathematischen Lehrstuhl an der Universität Oxford mit der Auflage, dass der jeweilige Inhaber Vorlesungen über Euklid zu halten habe.

Einer der ersten „Professores Saviliani“ war **John Wallis** (1616 – 1703). Er kannte und kritisierte die Probleme seiner Vorgänger mit den äquidistanten Linien und versuchte es auf anderem Wege:

Zwei Dreiecke werden ***ähnlich*** genannt, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen. Wallis stellte nun folgendes Postulat auf:

W-P) Zu jedem Dreieck ABC kann man (bei vorgegebener Seite $\overline{A'B'}$ ein ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruieren.

Ob dieses Postulat einsichtiger als Euklids Parallelenpostulat ist, sei erst einmal dahingestellt. Wallis zeigt nun (1663):

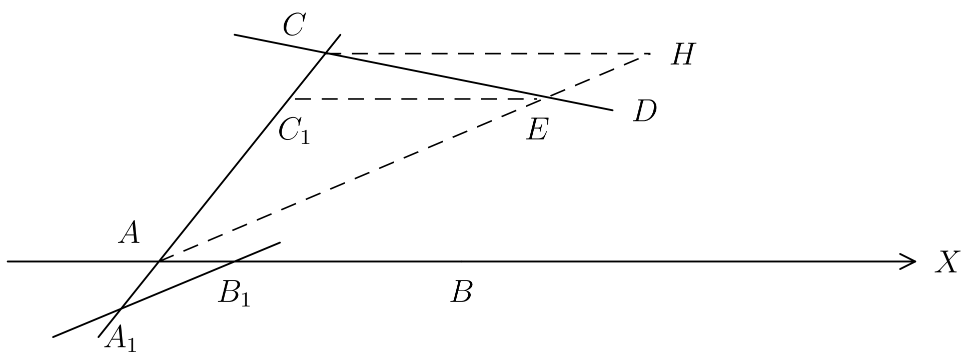
1.13 Satz.

$$(\mathrm{W}-\mathrm{P}) \quad \Longrightarrow \quad (\mathrm{E}-\mathrm{P})$$

Beweis: AC werde von den Geraden AB und CD getroffen und bilde mit ihnen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner als 180° sind.

Wir wählen A_1 mit $C-A-A_1$ und B_1 mit $A-B_1-B$ willkürlich und konstruieren das zu A_1B_1A ähnliche Dreieck AHC. Dann ist CH parallel zu AB.

CD tritt ins Innere des Winkels $\angle ACH$ ein, muss also die gegenüberliegende Seite $\overline{AH}$ des Dreiecks AHC treffen, etwa in E. Nun konstruiert man das zu A_1B_1A ähnliche Dreieck AEC_1. Offensichtlich muss C_1 auf AC liegen, und C_1E ist parallel zu AB.



Schließlich konstruiere man das zu C_1EC ähnliche Dreieck AXC. Da $AX = AB$ und $CX = CD$ sein muss, ist X der gesuchte Schnittpunkt von AB und CD. ∎

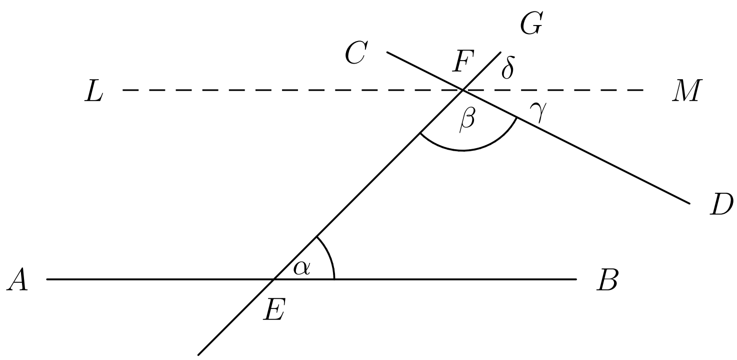
Der Beweis ist korrekt, hinterlässt aber Unbehagen, weil die postulierte Konstruierbarkeit von ähnlichen Dreiecken ein sehr starkes Werkzeug ist. In Wirklichkeit folgt fast trivial, dass das Postulat von Wallis äquivalent zum Parallelenaxiom ist.

John Playfair (1748 – 1819), Professor für Mathematik und Physik an der Universität Edinburgh, schrieb 1796 ein Buch mit dem Titel „Elements of Geometry“. Darin formulierte er das Parallelenaxiom in der heute üblichen Form:

PA) Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so geht durch P genau eine Parallele zu g.

1.14 Satz. (PA) $\iff$ (E – P)

Beweis: a) Sei zunächst (PA) vorausgesetzt.



EF werde von AB in E und von CD in F geschnitten. G liege auf der Verlängerung von EF über F hinaus. Wir konstruieren die Gerade LM durch F so, dass $\delta := \angle MFG = \angle BEF =: \alpha$ ist. Dann ist LM parallel zu AB.

Setzt man $\beta := \angle EFD$ und $\gamma := \angle DFM$, so ist

$$\beta + \gamma + \delta = 180°, \text{ also } \gamma = 180° - (\beta + \alpha) > 0.$$

Also ist $LM \neq CD$, und nach (PA) kann CD nicht parallel zu AB sein. AB und CD müssen sich schneiden.

b) Umgekehrt sei nun (E-P) vorausgesetzt. Die Existenz einer Parallelen g' zu g durch $P \notin g$ haben wir schon an früherer Stelle bewiesen:

Man fälle das Lot h von P auf g und wähle für g' die Senkrechte zu dem Lot in P.

Ist g'' eine weitere Gerade durch P, also $g'' \neq g'$, so müssen g'' und g auf einer Seite von h zusammen innere Winkel $< 180°$ bilden. Nach (E-P) schneiden sich g'' und g, d.h., g'' ist keine Parallele. ∎

Zusammengefasst haben wir jetzt folgende äquivalente Formulierungen für das Parallelenaxiom gefunden:

1. Euklids Postulat V.

2. Playfairs Postulat: Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so gibt es genau eine Parallele zu g durch P.

3. Die Winkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180°.

4. Jedes Saccheri-Viereck ist ein Rechteck.

5. Werden zwei Geraden g_1, g_2 von einer dritten geschnitten, so sind sie genau dann parallel, wenn die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z) gelten.

6. Parallele Geraden sind äquidistant.

7. Zu jedem Dreieck gibt es ähnliche Dreiecke beliebiger Größe.

8. Sind g_1, g_2 parallel, so bleibt die Länge der Lote von der einen Geraden auf die andere stets beschränkt.

3.2 Die Hypothese vom spitzen Winkel

Girolamo Saccheri wurde am 5. September 1667 in San Remo in der Republik Genua geboren. 1685 wurde er in den Jesuitenorden aufgenommen. Als Lehrer für Grammatik wirkte er in Mailand und lernte dort bei dem Mathematiker Tommaso Ceva die Euklidische Geometrie kennen. 1694 wurde er in Como zum Priester geweiht. Nach einem Aufenthalt in Turin kam er 1697 nach Pavia, wo er am Jesuitenkollegium und an der Universität Vorlesungen hielt. Er soll ein großes Rechengenie und ein guter Schachspieler gewesen sein.

Wie der Engländer Savile war auch Saccheri der Meinung, dass es zwei Makel in Euklids Werk gäbe. Sein Hauptwerk trägt daher den Titel:

Euclides ab omni naevo vindicatus
sive Conatus Geometricus quo stabiliuntur
Prima ipsa universae Geometriae Principia.

Der von jedem Makel befreite Euklid
oder
Ein geometrischer Versuch zur Begründung
der Grundsätze der ganzen Geometrie.

Von dem 2-bändigen Werk interessiert nur der 1. Teil über die Parallelen. Saccheri gewinnt diesem Problem eine völlig neue Seite ab. Alle bisherigen Versuche beruhten auf dem Grundgedanken, dass man das fünfte Postulat unmittelbar aus der neutralen Geometrie herleiten könne. Bei allen wurde jedoch – mehr oder weniger offen – ein neues Axiom an Stelle des alten eingeführt.

Saccheri hatte nun bei Untersuchungen über Logik besonderen Gefallen an der Methode der „reductio ad absurdum“ gefunden. Er kannte die Untersuchungen der Araber und führte erneut die von diesen betrachteten Vierecke ein, die wir im Vorgriff schon als „Saccheri-Vierecke“ bezeichnet haben. Einige seiner Sätze kennen wir schon von Khayyam und Nadir ad-Din, darauf brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Saccheri unterscheidet nun – wie schon Khayyam, aber mit größerer Deutlichkeit – drei Hypothesen, je nach Art der Gipfelwinkel im Saccheri-Viereck:

Die Hypothese des rechten Winkels, die Hypothese des stumpfen Winkels und die Hypothese des spitzen Winkels.

Er zeigt dann, dass diese Hypothesen, wenn sie nur für ein Saccheri-Viereck gelten, dann auch zugleich für alle. Sie schließen sich also gegenseitig aus, und da die Hypothese vom rechten Winkel äquivalent zum Parallelenaxiom ist, gilt es nur, die beiden anderen Hypothesen nach dem Widerspruchsprinzip auszuschließen.

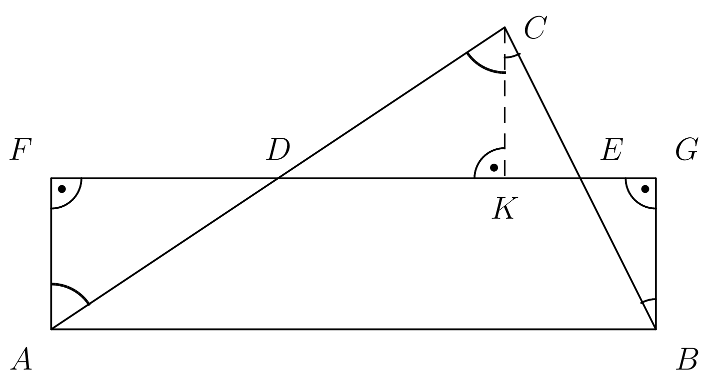
Ein Teil der Ergebnisse von Saccheri wurde später wiederentdeckt und auf andere Weise, zum Teil einfacher, bewiesen. Besonders tat sich dabei der französische Mathematiker Legendre hervor.

2.1 Erster Satz von Saccheri-Legendre.

1. *Die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel ist genau dann erfüllt, wenn es ein Dreieck mit Winkelsumme* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$ *gibt.*

2. *Ist die Winkelsumme in einem Dreieck* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$, *so ist sie das auch in jedem anderen Dreieck.*

Beweis: 1) Sei ABC ein beliebiges Dreieck, D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Fällt man noch das Lot von A auf DE mit Fußpunkt F und das Lot von B auf DE mit Fußpunkt G, so erhält man folgende Figur:



Dann gilt:

1. $GFAB$ ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{GF}$.

2. Die Summe der beiden Gipfelwinkel $\angle FAB$ und $\angle GBA$ stimmt mit der Summe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC überein.

Zum Beweis dieser Aussagen:

Fällt man noch das Lot von C auf DE mit Fußpunkt K, so sieht man:

$$ADF \mathrel{\widehat{=}} DKC \quad \text{und } BGE \mathrel{\widehat{=}} KEC.$$

Also ist $\angle FAD \mathrel{\widehat{=}} \angle DCK$ und $\angle GBE \mathrel{\widehat{=}} \angle ECK$ und damit $\angle FAB + \angle GBA = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$. Die Winkelsumme des beliebig ausgewählten Dreiecks ABC ist also gleich der Summe der Gipfelwinkel eines Saccheri-Vierecks. Daraus folgt die Behauptung.

2) Da das Dreieck beliebig gewählt werden konnte, die Winkel-Hypothesen aber jeweils für alle Saccheri-Vierecke gleichzeitig gelten, stimmt das Kriterium mit der Winkelsumme für alle Dreiecke, wenn es nur für eins gilt. ∎

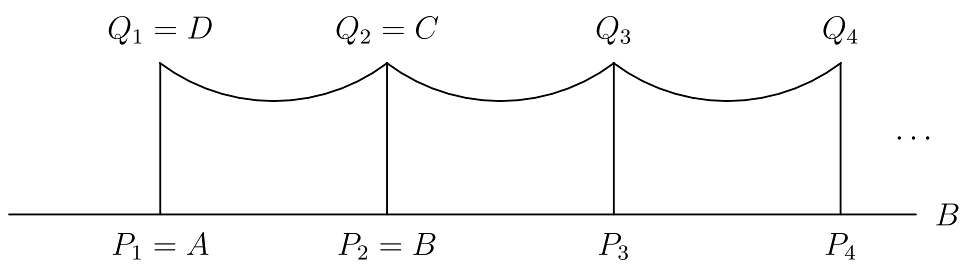
2.2 Zweiter Satz von Saccheri-Legendre.

1. *In jedem Saccheri-Viereck* $ABCD$ *ist* $\overline{DC} \geq \overline{AB}$.
2. *In jedem Dreieck ist die Winkelsumme* $\leq 180°$.

BEWEIS: 2) folgt aus (1): Ist in einem Saccheri-Viereck die Gipfellinie nicht kleiner als die Grundlinie, so müssen nach dem Satz von den 3 Hypothesen die Gipfelwinkel in diesem Viereck $\leq 90°$ sein. Nach dem 1. Satz von Saccheri-Legendre folgt dann die Behauptung über die Winkelsumme im Dreieck.

Nun zum Beweis von (1):

Auf der Geraden AB konstruieren wir Punkte $P_1 = A$, $P_2 = B$, $P_3, \ldots$ mit $\overline{P_iP_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$, und wir errichten Senkrechte $\overline{P_iQ_i}$ zu AB in P_i mit $\overline{P_iQ_i} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ für alle i.



Wir erhalten so eine Folge von kongruenten Saccheri-Vierecken $P_iP_{i+1}Q_{i+1}Q_i$, insbesondere ist also $\overline{Q_iQ_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{DC}$ für alle i.

Aus der Dreiecksgleichung folgt:

$$\overline{Q_1Q_{n+1}} \leq \overline{Q_1Q_2} + \cdots + \overline{Q_nQ_{n+1}} = n \cdot \overline{DC}.$$

Und ebenso folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\overline{P_1P_{n+1}} \leq \overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1Q_{n+1}} + \overline{Q_{n+1}P_{n+1}} \leq 2\overline{AD} + n \cdot \overline{DC}.$$

Da $\overline{P_1P_{n+1}} = n \cdot \overline{AB}$ ist, erhalten wir insgesamt:

$$n \cdot \overline{AB} \leq n \cdot \overline{DC} + 2 \cdot \overline{AD}.$$

Annahme: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

Dann ist $\overline{AB} - \overline{DC} > 0$, also eine echte Strecke, aber $n \cdot (\overline{AB} - \overline{DC}) \leq 2 \cdot \overline{AD}$ für alle n. Das widerspricht dem Archimedes-Axiom! Also war die Annahme falsch, es ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$. ∎

2.3 Folgerung (Satz von Saccheri).

Die Hypothese vom stumpfen Winkel kann nicht gelten.

BEWEIS: Trivial! Würde die Hypothese vom stumpfen Winkel gelten, so müsste in jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ gelten: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

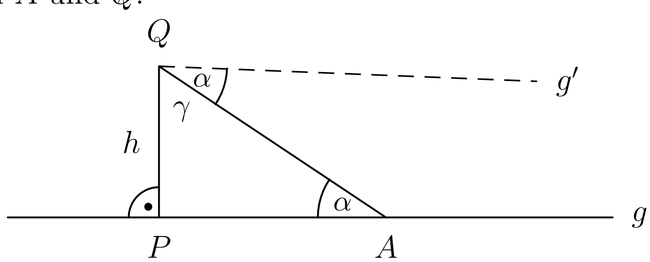
Und Saccheri verkündet an dieser Stelle stolz: *Die Hypothese des stumpfen Winkels ist ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört!* ∎

Der Originalbeweis von Saccheri verläuft etwas anders, er benutzt die Methode, die Nasir ad-Din schon bei der Behandlung der Hypothese vom rechten Winkel verwendet hatte. Es wird oft kritisiert, dass Saccheri dabei den Außenwinkelsatz benutzt, der unter der Hypothese des stumpfen Winkels gar nicht gelten kann, aber da er schließlich zu einem Widerspruch gelangt, ist das kein wirklicher Mangel. Man muss sich vorstellen, welche Gefühle Saccheri bewegt haben mögen, als er – fast 2000 Jahre nach Euklid – diesen ersten nennenswerten Fortschritt beim Parallelenproblem erzielt hatte. Um das fünfte Postulat zu beweisen, musste er nur noch die Hypothese des spitzen Winkels zum Widerspruch führen. Und er stürzte sich in eine regelrechte Schlacht.

Ab jetzt sei die Hypothese vom spitzen Winkel vorausgesetzt.

2.4 Satz. *Gegeben sei eine Gerade g und dazu eine Senkrechte h. Dann gibt es eine Gerade g', die h mit spitzem Winkel schneidet und parallel zu g ist.*

BEWEIS: Sei $P \in g$ und $h = PQ$ die Senkrechte. Weiter sei $A \neq P$ ein anderer Punkt auf g. Das Dreieck PAQ hat einen rechten Winkel bei P und zwei spitze Winkel bei A und Q.



Trägt man $\alpha := \angle PAQ$ bei Q an QA an, so erhält man eine Gerade g', die wegen der Z-Winkel-Beziehung parallel zu g ist. Da die Winkelsumme im Dreieck PAQ kleiner als zwei Rechte sein muss, ist $\alpha + \gamma < 90°$, also schneidet g' h in einem spitzen Winkel. ∎

Als nächstes greifen wir der Entwicklung nach Saccheri vor und führen den ***Defekt eines (konvexen) n-Ecks*** $A_1A_2 \ldots A_n$ ein, als

$$\delta(A_1A_2 \ldots A_n) := (n-2) \cdot \pi - \mathrm{WS}(A_1A_2 \ldots A_n),$$

wobei WS(...) die Winkelsumme bezeichnet.[1]

[1]Nur bei **konvexen** Polygonen ist der Begriff der Winkelsumme unproblematisch!

Wie man sieht, gehen wir hier bei den Winkeln vom Gradmaß zum Bogenmaß über.

Unter der Hypothese des spitzen Winkels ist der Defekt eines Dreiecks

$$\delta(ABC) = \pi - \mathrm{WS}(ABC)$$

eine positive Zahl $< \pi$, der Defekt eines konvexen Vierecks

$$\delta(ABCD) = 2\pi - \mathrm{WS}(ABCD)$$

eine positive Zahl $< 2\pi$. Weiter gilt:

2.5 Hilfssatz. *Kann das n-Eck $\mathcal{P}_n$ durch einen Streckenzug, der $\mathcal{P}_n$ außer an den Endpunkten nirgends berührt, in ein r-Eck $\mathcal{Q}_r$ und ein s-Eck $\mathcal{R}_s$ zerlegt werden, so ist $\delta(\mathcal{P}_n) = \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s)$.*

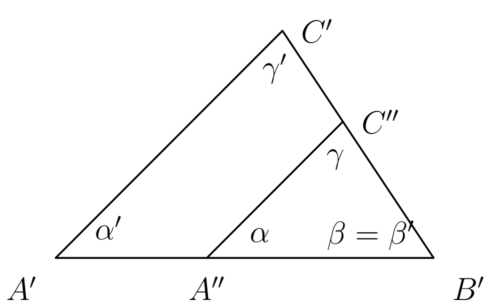
Beweis: Es müssen mehrere Fälle untersucht werden. Wir beschränken uns darauf, dass die Zerlegung durch eine einzige Strecke vonstatten geht, die zwei Ecken von $\mathcal{P}_n$ miteinander verbindet. Dann ist $r + s = n + 2$ und $\mathrm{WS}(\mathcal{P}_n) = \mathrm{WS}(\mathcal{Q}_r) + \mathrm{WS}(\mathcal{R}_s)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{P}_n) &= (n-2)\cdot\pi - \mathrm{WS}(\mathcal{P}_n) \\ &= (r-2)\cdot\pi - \mathrm{WS}(\mathcal{Q}_r) + (s-2)\cdot\pi - \mathrm{WS}(\mathcal{R}_s) \\ &= \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s). \end{aligned}$$

Die anderen Fälle sind ähnlich leicht zu behandeln. ∎

2.6 Satz. *Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ existieren, die in allen 3 Winkeln übereinstimmen, aber nicht kongruent sind, dann gilt das Euklidische Parallelenaxiom.*

Beweis: Wir bezeichnen die Winkel in den Dreiecken jeweils mit α, β und γ bzw. α', β' und γ'. Wenn die Dreiecke nicht kongruent sind, muss $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ sein. Wir nehmen an, es sei $\overline{A'B'} > \overline{AB}$.



Dann gibt es einen Punkt A'' mit $A' - A'' - B'$ und $\overline{A''B'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$. Trägt man α bei A'' an, so trifft der freie Schenkel $B'C'$ in einem Punkt C''.

Nach Konstruktion ist $A''B'C'' \widehat{=} ABC$. Also ist

$$WS(A'A''C''C') = \alpha' + (\pi - \alpha) + (\pi - \gamma) + \gamma' = 2\pi.$$

Aber dann gilt das Parallelenaxiom. ∎

Bemerkenswert ist die Umkehrung des gerade gewonnenen Ergebnisses:

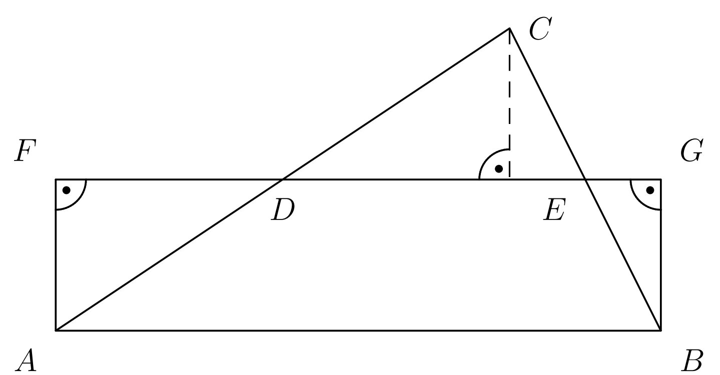
2.7 Folgerung (WWW-Kongruenz). *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt: Ähnliche Dreiecke sind kongruent.*

Daraus folgt: Ist μ eine Flächenfunktion, so hängt $\mu(ABC)$ unter der Hypothese des spitzen Winkels nur von den Winkeln des Dreiecks ab. Diese schon erstaunliche Tatsache kann man weiter verschärfen:

2.8 Satz. *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt: Ist μ eine Flächenfunktion, und sind ABC, $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit gleichem Defekt, so ist $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.*

Beweis: a) Wir untersuchen zunächst den Fall $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Wie beim 1. Satz von Saccheri-Legendre konstruieren wir zu ABC ein Saccheri-Viereck $GFAB$ mit Basis $\overline{GF}$, so dass die Summe der Gipfelwinkel (bei A und B) gleich der Winkelsumme von ABC ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass ABC und $GFAB$ zerlegungsgleich sind. Da kongruente Dreiecke auch den gleichen Defekt aufweisen und der Defekt sich additiv verhält, bedeutet das insbesondere, dass $\delta(GFAB) = \delta(ABC)$ ist.

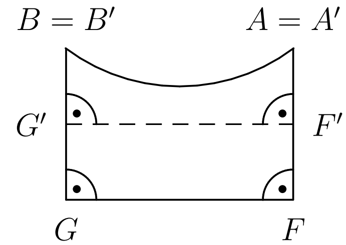


Bezeichnet ε einen der Gipfelwinkel, so ist

$$\delta(ABC) = \delta(GFAB) = 2\pi - (\pi + 2\varepsilon) = 2(\frac{\pi}{2} - \varepsilon).$$

Ist nun $G'F'A'B'$ das analog zu $A'B'C'$ konstruierte Saccheri-Viereck mit Gipfelwinkeln ε', so folgt aus der Bedingung $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$, dass $\varepsilon = \varepsilon'$ ist.

Da auch die Gipfellinien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ kongruent sind, müssen die beiden Saccheri-Vierecke überhaupt kongruent sein, denn andernfalls könnte man das kleinere so in das größere einpassen, dass ein Rechteck übrig bleibt.



Damit ist gezeigt, dass ABC und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind, und es ist $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

b) Im 2. Teil des Beweises setzen wir voraus, dass die Dreiecke keine zwei gleichen Seiten haben. Es sei etwa $\overline{A'C'} > \overline{AC}$.

Ist D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, so ist sicher $\overline{AD} > \overline{AF}$, also $\overline{A'C'} > \overline{AC} > 2 \cdot \overline{AF}$. Man kann nun folgendermaßen ein Dreieck ABC_1 konstruieren, das ebenfalls zerlegungsgleich zu $GFAB$ ist, aber mit $\overline{AC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$:

F liegt im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ um A mit Radius $r := \dfrac{1}{2} \cdot \overline{A'C'}$, also muss $\mathcal{K}$ die Gerade FG „rechts“ von F in einem Punkt D_1 treffen. Verlängert man $\overline{AD_1}$ über D_1 hinaus bis zu einem Punkt C_1 mit $\overline{AD_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{D_1C_1}$, so erhält man das gewünschte Dreieck.

Nun ist $\delta(ABC_1) = \delta(GFAB) = \delta(ABC) = \delta(A'B'C')$. Wegen $\overline{AC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ kann man die Ergebnisse des 1. Teils des Beweises auf die Dreiecke ABC_1 und $A'B'C'$ anwenden. Wir benutzen die Tatsache, dass ABC_1 und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind. Daraus folgt, dass auch ABC und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind, und daraus die Behauptung. ∎

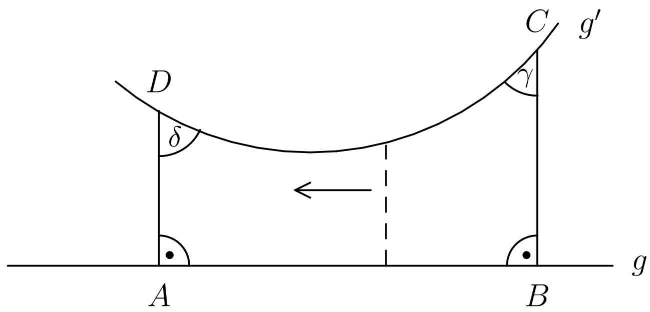
Jetzt kehren wir zu Saccheri zurück, und wie er untersuchen wir das Verhalten paralleler Geraden unter der Hypotheses des spitzen Winkels genauer:

Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt $D \notin g$, sowie DA das Lot von D auf g mit Fußpunkt A. Die Senkrechte zu DA in D ist eine Parallele zu g. Wie Saccheri gezeigt hat, gibt es durch D eine weiter Parallele $g' = DC$, so dass $\angle ADC$ spitz ist. Gibt es auch zu g und g' eine gemeinsame Senkrechte?

Wir fällen das Lot von C auf g, mit Fußpunkt B. Es sei $\delta := \angle ADC$ und $\gamma := \angle DCB$. Wir unterscheiden nun 3 Möglichkeiten:

1. Fall: γ ist ebenfalls ein spitzer Winkel.

Dann ist der Nebenwinkel zu γ stumpf. Saccheri argumentiert nun folgendermaßen: Verschiebt man die Senkrechte zu g von B nach A, so ändert sich der Winkel auf der rechten Seite der Senkrechten stetig von einem stumpfen zu einem spitzen Winkel. Irgendwann dazwischen muss er den Wert $\pi/2$ annehmen.



Dieses Argument können wir nur nachvollziehen, wenn wir ein geeignetes Stetigkeits-Axiom zulassen. Wieweit man das umgehen kann, werden wir vielleicht noch an späterer Stelle erörtern. Im Augenblick halten wir fest:

Ab sofort benutzen wir das Dedekind-Axiom! Das Kreisaxiom und das Archimedes-Axiom gelten dann automatisch auch, sowie auch das Intervallschachtelungs-Axiom. Tatsächlich können wir eine binäre Intervallschachtelung benutzen, um die gesuchte gemeinsame Senkrechte zu finden.

Damit ist das Saccherische Argument in Ordnung, und wir sehen, dass g und g' eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

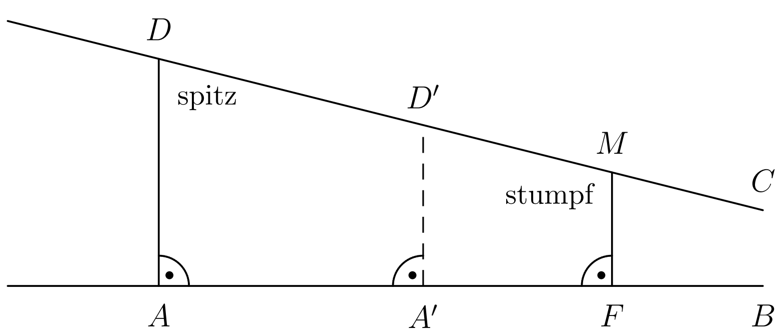
2. Fall: γ ist ein rechter Winkel, oder γ ist stumpf, und rechts von C gibt es noch eine gemeinsame Senkrechte von g und g'.

3. Fall: γ ist stumpf, und rechts von C gibt es keine gemeinsame Senkrechte von g und g'.

Es soll gezeigt werden, dass sich g und g' in diesem Falle asymptotisch nähern!

Der Beweis erfordert einige Vorbereitungen. Wir gehen von folgender Situation aus: AD schneide AB in A senkrecht und DC in D unter einem spitzen Winkel. Die Geraden AB und CD seien parallel. Für jedes Lot von einem Punkt $M \in DC$ auf AB sei der Winkel bei M auf der Seite von D stumpf.

2.9 Hilfssatz. *Ist $A - A' - B$, so schneidet die Senkrechte zu AB in A' die Gerade DC in einem Punkt D' auf der gleichen Seite von AD.*



Beweis: Wähle M auf DC, so dass $\overline{DM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}$ ist und fälle das Lot auf AB mit Fußpunkt F.

Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{DM} < \overline{DA} + \overline{AF} + \overline{FM}$. Und weil $\angle FMD > \angle ADM$ ist, ist $\overline{FM} < \overline{AD}$. Damit folgt:

$$\overline{AF} > (\overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}) - \overline{AD} - \overline{AD} = \overline{AA'}.$$

Die Senkrechte in A' kann weder AD noch FM treffen (sonst würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen), muss nach Pasch also DC treffen, und zwar zwischen D und M. ∎

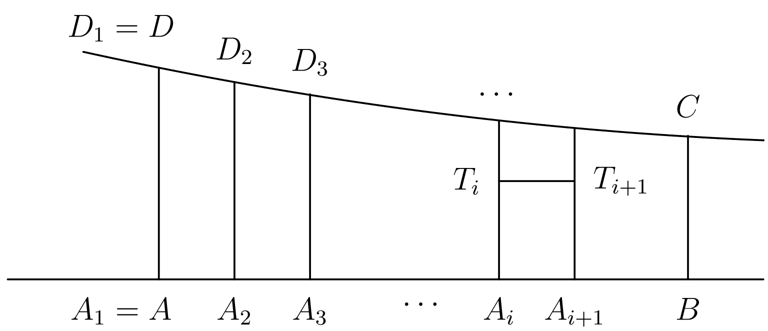
Jetzt können wir beweisen, dass g und g' asymptotisch aufeinander zulaufen, sich also beliebig nahe kommen.

Dazu nehmen wir an, das wäre nicht der Fall! Dann gibt es eine Größe $r > 0$, so dass der Abstand zwischen AB und DC immer größer als r bleibt. Wir wählen Punkte A_i auf AB mit $A_1 := A$ und $\overline{A_iA_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_1A_2} > r$. In jedem A_i errichten wir eine Senkrechte A_iD_i auf AB, die DC (in D_i) trifft. Dann entstehen Vierecke $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$, und für den Defekt dieser Vierecke gilt:

$$\delta(A_1A_2D_2D_1) + \cdots + \delta(A_nA_{n+1}D_{n+1}D_n) = \delta(A_1A_{n+1}D_{n+1}D_1) < 2\pi.$$

Es muss also zu jedem n ein $i = i(n)$ geben, so dass $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) < \dfrac{2\pi}{n}$ ist.

Andererseits enthält jedes Viereck $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$ ein Saccheri-Viereck $A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i$, dessen Seiten die Länge r haben, und alle diese Vierecke sind kongruent! Insbesondere haben sie alle den gleichen Defekt δ_0.



Nun wählen wir n so groß, dass $\dfrac{2\pi}{n} < \delta_0$ ist, und zu diesem n das passende $i = i(n)$.

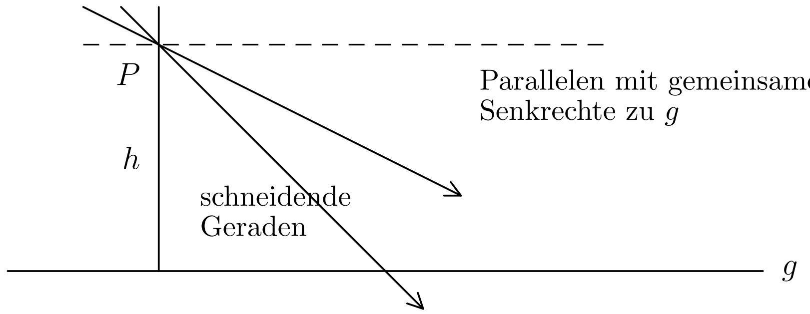
Da $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) = \delta(A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i) + \delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i)$ ist, folgt:

$$\delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i) < \frac{2\pi}{n} - \delta_0 < 0.$$

Das ist absurd!

Damit ist gezeigt, dass Parallelen, die in einer Richtung keine gemeinsame Senkrechte besitzen, in dieser Richtung asymptotisch aufeinander zulaufen. Ob es solche Parallelen geben kann, ist damit noch nicht geklärt.

Als nächstes macht sich Saccheri daran, unter der Hypothese des spitzen Winkels die Existenz asymptotischer Parallelen zu zeigen.



Betrachten wir das Büschel aller Geraden durch $P \notin g$. Neben dem Lot h von P auf g gibt es noch viele weitere Geraden durch P, die g schneiden.

Es sei Σ die Menge aller Geraden, die „rechts“ von h mit h einen spitzen Winkel einschließen.

Und es gibt wenigstens eine Parallele zu g durch P, die mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzt, nämlich die Senkrechte g' zu h durch P.

Es sei Γ die Menge aller Geraden, die „rechts“ von h mit h einen Winkel $\leq \pi/2$ einschließen und mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

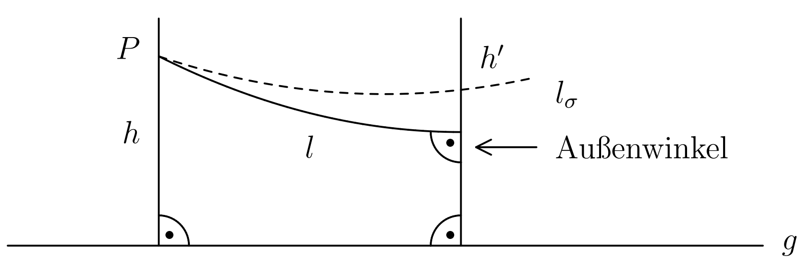
Für jeden Winkel γ mit $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ sei l_γ die Gerade durch P, die h im Winkel γ schneidet. Für jede solche Gerade l sei umgekehrt $\gamma(l)$ der Schnittwinkel zu h.

2.10 Satz.

1. *Ist $l \in \Sigma$ und $\tau < \gamma(l)$, so ist auch $l_\tau \in \Sigma$.*
2. *Ist $l \in \Gamma$ und $\sigma > \gamma(l)$ nicht zu groß, so ist auch $l_\sigma \in \Gamma$.*
3. *$\{\gamma : l_\gamma \in \Sigma\}$ besitzt kein Maximum.*
4. *$\{\gamma : l_\gamma \in \Gamma\}$ besitzt kein Minimum.*

Beweis: Teil (1) ist trivial, nach Pasch. Und auch (3) ist offensichtlich.

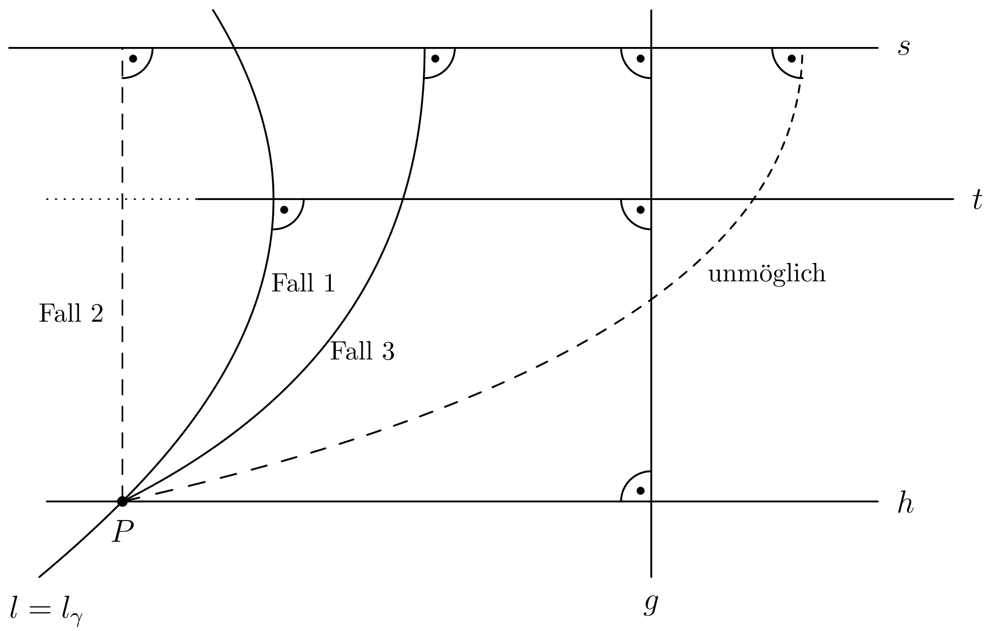
(2) Sei $l \in \Gamma$, h' die gemeinsame Senkrechte, $\sigma > \gamma(l)$. Verlängert man h' über den Schnittpunkt mit l hinaus, so trifft sie dort l_σ



(Fällt man von h' ein Lot auf h, so dass der Fußpunkt oberhalb von P liegt, so liefert Pasch den Schnittpunkt von h' und l_σ). Nach dem Außenwinkelsatz müssen sich h' und l_σ unter einem spitzen Winkel treffen. Aber für den Fall wurde schon mit Hilfe des Stetigkeitsaxioms gezeigt, dass g und l_σ eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

Zum Beweis von (4) sei $\gamma \in \Gamma$, $l = l_\gamma$ und t die gemeinsame Senkrechte von g und l. Wir errichten in weiterer Entfernung von h eine Senkrechte s zu g und fällen das Lot l' von P auf s. Dieses Lot kann g nicht treffen, weil dann ein Dreieck mit 2 rechten Winkeln entstehen würde. Also ist l' eine Parallele zu g.

Um zu zeigen, dass $\gamma(l') \in \Gamma$ und $\gamma(l') < \gamma$ ist, muss man einige Fälle unterscheiden.



1. Fall: $l' = l$ ist nicht möglich, weil dann ein Viereck mit 4 rechten Winkeln entsteht.

2. Fall: l' verläuft „oberhalb“ von l.
Dann trifft die Verlängerung von t die Gerade l' unter einem spitzen Winkel (Außenwinkelsatz), und indem man zum Nebenwinkel übergeht, erhält man ein Viereck, in dem die Winkelsumme $> 2\pi$ ist. Das kann nicht sein.

3. Fall: l' verläuft zwischen l und g. Das ist die einzige Option, die übrig bleibt. Dann ist l' eine Parallele zu g mit gemeinsamer Senkrechten, und es ist $\gamma(l') < \gamma$. ∎

Jetzt kommen wir zum entscheidenden Punkt!

Sei $\gamma_1 := \sup\{\gamma \mid l_\gamma \in \Sigma\}$ und $\gamma_2 := \inf\{\gamma \mid l_\gamma \in \Gamma\}$. Beides muss existieren, und es muss $\gamma_1 \le \gamma_2$ sein. Außerdem ist $\gamma_1 \notin \Sigma$ und $\gamma_2 \notin \Gamma$.

Sei $g_1 := l_{\gamma_1}$ und $g_2 := l_{\gamma_2}$. Dann ist g_1 eine Gerade, die g nicht mehr schneidet, also zu g parallel ist, und g_2 ist eine Parallele zu g, die keine gemeinsame Senkrechte mit g hat. Sie muss asymptotisch auf g zulaufen

Wäre $g_1 \neq g_2$, so würde der Abstand zwischen ihnen beliebig groß. Aber da g_2 asymptotisch auf g zuläuft und g_1 immer zwischen g und g_2 bleibt, kann das nicht sein! Damit haben wir erhalten:

> *Die Geraden durch P, die g schneiden, werden durch eine asymptotische Parallele von denjenigen Parallelen zu g getrennt, die eine gemeinsame Senkrechte mit g besitzen.*

Insbesondere ist – unter der Hypothese des spitzen Winkels – die Existenz von asymptotischen Parallelen gesichert.

An dieser Stelle glaubte nun Saccheri, er sei so gut wie am Ziel. Er verstrickte sich in immer kompliziertere und immer unklarere Beweise, um zu zeigen, dass die Existenz asymptotischer Parallelen der Natur der Geraden widerspricht. Im Grunde argumentierte er wie folgt:

Eine Gerade g und eine dazu asymptotische Gerade g' treffen sich in ∞ und haben dort eine gemeinsame Senkrechte, weil sich ihre Richtungen dort nicht mehr unterscheiden. Aber wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten in einem Punkt kann das nicht sein.

Weil Saccheri selbst dem Frieden nicht so recht traute, gab er noch einen weiteren Beweis an, in dem er zwar interessante Eigenschaften von Parallelen unter der Hypothese des spitzen Winkels herleitete, schließlich aber auch nur durch unerlaubte Verquickung von Aussagen im Endlichen und im Unendlichen den endgültigen Widerspruch herbeiführte.

Am 13. Juli 1733 erhielt er die Druckerlaubnis der Inquisition, am 16. August 1733 die des Provinzials der Gesellschaft Jesu, und am 25. Oktober 1733 starb er nach längerer Krankheit. Es ist fraglich, ob er das Erscheinen seiner Arbeit noch erlebt hat.

Saccheris Schrift muss im 18. Jahrhundert unter den Fachleuten recht bekannt gewesen sein, später geriet sie jedoch in Vergessenheit.

Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800), ab 1756 Professor für Mathematik und Physik in Göttingen und ab 1763 Leiter der dortigen Sternwarte, schrieb zahlreiche Lehrbücher und besaß eine riesige Sammlung von Schriften, die nahezu alles umfasste, was bis etwa 1770 über das Parallelenproblem bekannt war. Von Gauß und Lichtenberg bekam Kästner die wenig schmeichelhafte Charakterisierung, er sei der größte Mathematiker unter den Dichtern und der größte Dichter unter den Mathematikern.

Unter seiner Anleitung entstand die Dissertation von **Georg Simon Klügel**, in der dieser die Geschichte des Parallelenproblems beschrieb und in recht scharfsinniger Weise eine große Zahl bisheriger Beweisversuche kritisierte. In einem Nachwort schrieb Kästner u.a. sinngemäß: „Niemand, der bei gesunden Sinnen ist, wird Euklids fünftes Postulat je bestreiten wollen.“

Auf dem Weg über Klügels Dissertation hat wohl auch der Schweizer Mathematiker **Johann Heinrich Lambert** (1728 – 1777) von Saccheris Ergebnissen erfahren.

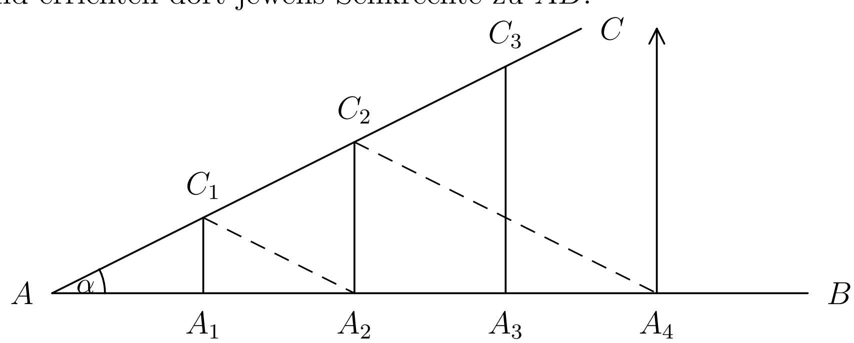
Lambert betrachtete Vierecke mit 3 rechten Winkeln (die durch Halbierung eines Saccheri-Vierecks entstehen und heute auch als „Lambert-Vierecke“ bezeichnet werden). Je nach Art des 4. Winkels unterschied auch er die 3 Hypothesen vom rechten, stumpfen und spitzen Winkel. Und wie Saccheri führte auch er die 2. Hypothese zum Widerspruch. Er entdeckte unter anderem den WWW-Kongruenzsatz. Und er fand eine Reihe von sehr eigenartigen Ergebnissen.

2.11 Satz. *Gegeben seien zwei Geraden AB und AC, die sich bei A unter einem spitzen Winkel α treffen. Dann gibt es auf $\overrightarrow{AB}$ eine Senkrechte zu AB, die zu AC asymptotisch parallel ist.*

Beweis: Wir wählen Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf AB mit

$$\overline{AA_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_1A_2} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_2A_3} \mathrel{\widehat{=}} \ldots$$

und errichten dort jeweils Senkrechte zu AB.



Annahme, die Senkrechte in A_i trifft stets die Gerade AC in einem Punkt C_i.

Sei $\delta_n := \delta(AA_nC_n)$. Da jeweils $AA_kC_k \mathrel{\widehat{=}} A_kA_{2k}C_k$ ist, folgt:

$$\delta_{2n} > \delta(AA_{2n}C_n) = \delta(AA_nC_n) + \delta(A_nA_{2n}C_n) = 2 \cdot \delta_n.$$

Also ist

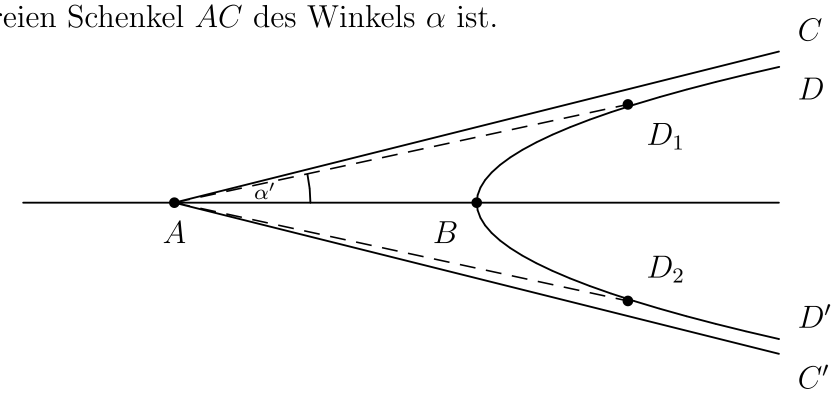
$$\delta_{2^k} > 2 \cdot \delta_{2^{k-1}} > \ldots > 2^{k-1} \cdot \delta_1.$$

Für genügend großes k wird aber $2^{k-1} \cdot \delta_1 > \pi$. So groß kann der Defekt nicht werden, das ist ein Widerspruch.

Indem man ein Lot von C auf AB fällt, erhält man wenigstens eine Senkrechte zu AB, die AC trifft. Indem man die Senkrechten in zwei Klassen einteilt, je nach ihrem Schnittverhalten mit AC, erreicht man eine Situation, in der man das Dedekind-Axiom anwenden kann. Die Grenzgerade, die es dann geben muss, kann nicht mehr schneiden (wie man sich leicht überlegt), also muss sie asymptotisch parallel sein. ∎

2.12 Folgerung. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Dreieck, dessen Winkelsumme $< \varepsilon$ ist.*

Beweis: An die Gerade AB werde bei A ein spitzer Winkel $\alpha < \varepsilon/4$ angetragen. O.B.d.A. sei B der Punkt, bei dem die Senkrechte BD zu AB asymptotisch parallel zu dem freien Schenkel AC des Winkels α ist.



Durch Spiegeln an AB kann man die Gerade DB über B hinaus verlängern, sie ist dort asymptotisch parallel zum Spiegelbild AC' der Geraden AC.

Trägt man die Strecke $\overline{AB}$ auf beiden Seiten von B auf BD ab, so erhält man Punkte D_1 und D_2. Das Dreieck ABD_1 ist gleichschenklig mit Basiswinkeln $\alpha' := \angle BAD_1 = \angle BD_1A$. Offensichtlich ist $\alpha' < \alpha$. Auf der anderen Seite von AB erhält man das kongruente Dreieck AD_2B. Nun ist AD_2D_1 ein Dreieck mit Winkelsumme $= 4\alpha' < 4\alpha < \varepsilon$. ∎

2.13 Folgerung. *Der Defekt eines Dreiecks kann dem Wert π beliebig nahe kommen.*

Man kann allerdings zeigen, dass große Defekte nur bei Dreiecken auftreten, bei denen alle drei Seiten „sehr groß“ sind. Um die Gültigkeit der Hypothese vom spitzen Winkel experimentell nachzuweisen, müsste man also sehr große Dreiecke vermessen.

Umgekehrt kann man auch zeigen, dass man zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Strecke $\overline{XY}$ ein Dreieck ABC mit $\delta(ABC) < \varepsilon$ und $\overline{AC}, \overline{BC} > \overline{XY}$ finden kann. Ein genaueres Studium des Defektes $\delta(ABC)$ in Abhängigkeit vom Winkel $\angle ACB$ zeigt schließlich:

2.14 Satz. *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt:*

Ist μ eine Flächenfunktion, so gibt es eine Konstante k, so dass für alle Dreiecke ABC gilt:

$$\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC).$$

Die Flächenfunktion ist also nur bis auf die Konstante k festgelegt.

Lambert entdeckte hier seltsame Parallelen zur Geometrie auf einer Sphäre:

Auf der Kugeloberfläche ist die Hypothese vom stumpfen Winkel erfüllt, allerdings sind mehrere Axiome der neutralen Geometrie ungültig. Es gibt keine Zwischen-Beziehung und keine beliebig langen Geraden, und auch der Außenwinkelsatz ist falsch. Da die Winkelsumme im Dreieck immer größer als π ist, betrachtet man den sogenannten *Exzess*

$$\varepsilon(ABC) := \mathrm{WS}(ABC) - \pi.$$

Ein genaueres Studium der sphärischen Geometrie zeigt, dass für die Fläche eines sphärischen Dreiecks folgende Formel gilt:

$$\mu(ABC) = R^2 \cdot \varepsilon(ABC) = R^2 \cdot (\mathrm{WS}(ABC) - \pi),$$

wenn die Winkelsumme im Bogenmaß gerechnet wird. Dabei ist R der Radius der Kugel, deren Oberfläche betrachtet wird.

Lambert hatte nun die Idee, eine „Kugel“ mit imaginärem Radius $r = \mathbf{i}R$ zu betrachten. Dann ergibt sich rein formal

$$\mu(ABC) = r^2 \cdot (\pi - \mathrm{WS}(ABC)) = r^2 \cdot \delta(ABC).$$

Das ist die Flächenformel unter der Hypothese des spitzen Winkels.

Lambert machte noch eine andere Beobachtung: Da die Kongruenzklasse eines Dreiecks nur von den drei Winkeln abhängt (WWW-Kongruenz), gibt es – im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie – unter der Hypothese des spitzen Winkels eine **absolute Längeneinheit**. Konstruiert man etwa ein gleichseitiges Dreieck, dessen Winkel alle 45° betragen, so ist die Seitenlänge dieses Dreiecks festgelegt. Es erscheint im Augenblick nicht ganz klar, ob eine solche Konstruktion durchführbar ist, aber wir werden ähnliche Verfahren kennenlernen, die auf jeden Fall ausgeführt werden können.

Lambert hat zu guter Letzt doch noch einen Beweis für das Parallelenaxiom geliefert, indem er unter der Hypothese des spitzen Winkels eine absurde Situation herbeigeführt hat. Wir wollen darauf nicht näher eingehen, denn er hatte wohl selbst Zweifel und seine Arbeit nicht veröffentlicht.

Der Schauplatz wechselt nun nach Frankreich, denn es kam die Epoche der großen französischen Mathematiker d'Alembert, Lagrange, Laplace und Legendre.

Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717 – 1783) glaubte, man könnte die Schwierigkeiten überwinden, wenn man nur die richtigen Definitionen einsetzen würde, aber er schaffte das Problem nicht aus der Welt.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) dachte, er hätte Erfolg gehabt. Aber als er seine Arbeit über Parallelen vor der Französischen Akademie vortrug, unterbrach er sich plötzlich mit dem Ausruf: „Ich muss noch einmal darüber nachdenken!“ Er kam nie wieder auf das Thema zurück.

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) wollte sich auf Newtons Gesetz der Schwerkraft stützen. Er kam auch zu dem Schluss, dass das Ähnlichkeitsprinzip (vgl. Wallis) ein natürlicheres Postulat als Euklids Parallelenaxiom sei.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) beschäftigte sich ausführlich mit den Grundlagen der Geometrie. Für ihn war die Euklidische Geometrie die einzig gültige, und er versuchte mehrfach, dass Parallelenaxiom zu beweisen. Seine Nachforschungen sind über die verschiedenen Ausgaben seiner „Eléments de Géométrie“ (1794 - 1823) verstreut. Sein klarer und eleganter Stil bewirkte, dass seine Einführung in die Geometrie zu einem der erfolgreichsten Lehrbücher seiner Zeit wurde, und er machte dadurch das Parallelenproblem wieder einer breiteren Öffentlichkeit bewusst. Viele seiner Resultate finden sich allerdings schon bei Saccheri. In seinem Todesjahr (1833) erschien eine Arbeit, in der alle seine Versuche zum Parallelenproblem zusammengefasst waren. Doch zu dem Zeitpunkt war das alles längst überholt.

Woher rühren die Probleme, die die Mathematiker bis ins 19. Jahrhundert mit den Grundlagen der Geometrie hatten, und wie kam es dann zu einem Umschwung?

Die Antike wurde von der Lehre des **Aristoteles** beherrscht, der in der Spätantike in Vergessenheit geriet, aber seit **Thomas von Aquin** (1225 - 1274) wieder zur alleinigen Autorität in nichtkirchlichen philosophischen Fragen erhoben wurde.

Nach Aristoteles gibt es zwei Erkenntnisquellen: Die *Sinne* (also die Erfahrung) und den *Verstand* (also die Logik). Die Mathematik muss man dann der zweiten Erkenntnisquelle zuordnen, denn sie lehrt keine zufälligen Tatsachen sondern die Einsicht in notwendige Gesetze. Man hoffte sogar, durch die Übertragung der logischen Form der mathematischen Schlussweise auf die Philosophie dort die gleiche Sicherheit erreichen zu können. Aber diese Bemühungen schlugen fehl.

Immanuel Kant (1724 – 1804) unterzog die Frage nach der Herkunft der mathematischen Gewissheit einer gründlichen Prüfung und kam so zu einer radikalen Revision der Aristotelischen Lehre.

Setzt man die Axiome voraus, so ergeben sich die Lehrsätze durch bloßes logisches Schließen. Aber woher kommen die Axiome? Diese Frage führte Kant auf die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen:

Eine *analytische Aussage* ist eine solche, die man allein durch Aufgliederung des betrachteten Begriffs gewinnt, also durch eine logische Analyse.

Eine *synthetische Aussage* muss dagegen über den reinen Begriffsinhalt hinausgehen.

Beispiel: Dass alle Radien eines Kreises die gleiche Länge haben, ist ein analytischer Satz. Dass das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser des Kreises den Wert 3,1415926... hat, ist eine synthetische Aussage.

Definitionen sind demnach analytisch, Axiome und die daraus folgenden Sätze synthetisch. Das bedeutet aber, dass es für die Mathematik noch eine andere Erkenntnisquelle als die Logik geben muss. Diesen Ursprung von Erkenntnis nannte Kant die *reine Anschauung*. Doch was soll man sich darunter vorstellen?

Es gibt noch eine andere Unterscheidung von Aussagen, nämlich die zwischen *apriorischen Aussagen* und *empirischen Aussagen*. Eine Aussage ist a priori wahr, wenn sie schon auf Grund ihres sprachlichen Inhalts wahr ist, also unabhängig von Erfahrung und Sinneseindrücken. Die Wahrheit empirischer Aussagen gewinnt man nur durch Erfahrung.

Nun sind vier Kombinationen denkbar. Allerdings kann eine analytische Aussage nicht zugleich eine empirische sein, „analytisch" gehört zu „a priori". Empirische Aussagen sind stets synthetisch. Auf den ersten Blick scheint es so, als müsse man auch die Kombination „a priori + synthetisch" ausschließen. Doch dann wäre man wieder bei der Aristotelischen Zweiteilung. Wenn man nun wie Kant annimmt, dass die Axiome der Geometrie auf Intuition, also einer abstrahierten Anschauung beruhen, so liefern sie etwas durchaus Neues, sind also synthetisch. Und zugleich brauchen sie nicht immer wieder überprüft zu werden, sie sind nicht empirisch, sondern a priori! Solche inhaltsvollen und sicheren Aussagen sind in gewisser Weise die vollkommensten Aussagen.

Doch woher kommt die Information, die aus den Axiomen synthetische Aussagen macht. Kant vertrat die Auffassung, dass z.B. Euklids Postulate beschreiben, wie unser Gehirn die Eindrücke vom Raum, die wir durch unsere Sinne erfahren, verarbeitet. Demnach muss das Euklidische Parallelenaxiom wahr sein, es kann keine andere Geometrie geben.

Die Autorität Kants hatte einen immensen Einfluss auf die zeitgenössischen Wissenschaftler.

3.3 Aus Nichts eine neue Welt

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) war die dominierende mathematische Persönlichkeit seiner Zeit und sicher einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Schon in der Volksschule fiel er durch seine Rechenkünste auf, einer seiner ersten Förderer war Martin Bartels, der Gehilfe des Schullehrers, mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verband. Im Gymnasium in Braunschweig übersprang er mehrere Klassen, und der Herzog von Braunschweig, Karl Wilhelm Ferdinand, wurde auf ihn aufmerksam gemacht. Der Herzog finanzierte ihm sein Studium, zunächst (ab 1792) am Collegium Carolinum in Braunschweig, später (ab 1795) in Göttingen, wo er bei dem Physiker Georg Christoph Lichtenberg und bei dem schon erwähnten Mathematiker Kästner Vorlesungen hörte.

1796 (im Alter von 18 Jahren) entdeckte er, dass das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. In dieser Zeit lernte er auch einen jungen ungarischen Adligen kennen, Wolfgang Bolyai (1775 - 1865), woraus sich eine sehr enge Freundschaft entwickelte. Da Gauß 1798 nach Braunschweig zurückkehrte, sahen sich die Freunde 1799 zum letzten Mal, blieben aber ihr Leben lang in brieflicher Verbindung.

Am 16. Juli 1799 (im Alter von 22 Jahren) wurde Gauß auf Wunsch des Herzogs an der Landesuniversität Helmstedt promoviert, in Abwesenheit und unter Verzicht auf eine mündliche Prüfung. Seine Dissertation enthielt den ersten korrekten und vollständigen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra.

1801 erschienen seine „Disquisitiones arithmeticae“, mit denen er das Fundament für die moderne Zahlentheorie legte (Lehre von den Kongruenzen, quadratische Formen, erster Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes). Diese Arbeit machte ihn mit einem Schlag in der Fachwelt bekannt, aber noch berühmter wurde er weltweit, als es im Dezember 1801 gelang, auf Grund seiner Berechnungen den Anfang des Jahres beobachteten und wieder verlorenen Planetoiden Ceres erneut am Himmel zu entdecken. Gauß bekam Kontakt zu führenden Astronomen seiner Zeit, z.B. Olbers, Bessel und Schumacher.

Als die Franzosen 1806 im Auftrag Napoleons Braunschweig eroberten, hatte einer der Generäle den Auftrag, ganz besonders auf das Wohlergehen von Gauß zu achten, damit ihn nicht das Schicksal des Archimedes ereile. 1807 erhielt Gauß einen Ruf nach Göttingen als Professor für Astronomie und Direktor der dortigen Sternwarte. In Göttingen blieb er bis zu seinem Lebensende. 1820 erhielt er den Auftrag zur Vermessung des Königreichs Hannover, und so führte er von 1821 bis 1825 praktische Vermessungsarbeiten durch.

1828 erschien sein differentialgeometrisches Hauptwerk („Allgemeine Untersuchungen über krumme Flächen“) und 1831 eine Arbeit über Algebra, in der er die komplexe Zahlenebene einführte. Im selben Jahr kam Wilhelm Weber als Professor für Physik nach Göttingen. Mit ihm zusammen stellte Gauß Untersuchungen über elektromagnetische Induktion und den Erdmagnetismus an. 1833 erfanden sie zusammen den elektrischen Telegraphen.

Nachdem Weber 1838 wegen seiner Beteiligung am Protest der „Göttinger Sieben“ gegen einen Verfassungsbruch des Königs Ernst August von Hannover seines Amtes enthoben wurde, gab Gauß seine physikalischen Forschungen auf. In all der Zeit hatte er zahlreiche mathematische Artikel veröffentlicht und noch mehr in der Schublade vorbereitet.

In seinen letzten Jahren lernte er noch Russisch und beteiligte sich an einer Reorganisation der Universitätswitwenkasse durch Berechnung von Tafeln, mit denen der Zeitwert von Leibrenten bestimmt werden konnte. 1849 wurde er anlässlich seines 50-jährigen Doktorjubiläums zum Ehrenbürger der Stadt Göttingen ernannt. Acht Monate vor seinem Tod, am 10. 6. 1854, hörte er den berühmten Habilitationsvortrag von Bernhard Riemann: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“

Seit 1792 beschäftigte sich Gauß mit der Theorie der Parallellinien, 1794 (im Alter von 17) wusste er, dass in einer Geometrie, in der die Hypothese vom spitzen Winkel gilt, der Flächeninhalt eines Dreiecks proportional zum Defekt dieses Dreiecks ist. Beim Abschied vor seiner Heimreise nach Ungarn hatte ihm Wolfgang Bolyai angekündigt, er habe einen Beweis für das V. Postulat (der sich später natürlich als falsch herausstellte). Ende des Jahres schrieb Gauß an Wolfgang, er sei selbst in seinen Arbeiten zu diesem Thema vorangekommen, die Wahrheit der Geometrie sei dadurch aber eher zweifelhaft geworden. Wenn man beweisen könnte, dass ein Dreieck mit beliebig großem Flächeninhalt möglich wäre, dann könnte er die gesamte Geometrie daraus herleiten. Die Möglichkeit einer anderen als der euklidischen Geometrie hatte er zu diesem Zeitpunkt noch nicht erwogen. 1808 äußerte er gegenüber Schumacher: Wenn das Parallelenpostulat nicht wahr wäre, so müsste es eine absolute Längeneinheit geben.

1816 schrieb Gauß etwas ähnliches auch an Gerling, einen Marburger Professor, mit dem er einen ausgedehnten Briefwechsel, vor allem über astronomische Fragen, führte, und im selben Jahr beklagte er sich in einer Buchbesprechung darüber, dass man bei der Behandlung einer Lücke in den Anfangsgründen der Geometrie nach 2000 Jahren noch nicht weiter gekommen sei.

Friedrich Ludwig Wachter (1792 – 1817), ein Schüler von Gauß, der später Professor der Mathematik am Gymnasium von Danzig war, unternahm umfangreiche Untersuchungen zum Parallelenproblem, lieferte einige falsche Beweise und nannte die Geometrie unter der Hypothese des spitzen Winkels „Anti-Euklidische Geometrie“. Er entdeckte, dass in dieser Geometrie die Sphäre durch einen Punkt bei wachsendem Radius gegen eine Fläche strebt, auf der das Euklidische Parallelenaxiom erfüllt ist. In den Jahren 1816/17 scheint Gauß allmählich zu der Erkenntnis gekommen zu sein, dass die neue Geometrie genauso denkbar wie die Euklidische sei. Er war aber auch davon überzeugt, dass eine Veröffentlichung seiner Ansichten nur zu Hohn und Spott führen würde, und er beschränkte sich daher auf Andeutungen in Briefen an seine Freunde.

Im Januar 1819 leitete Gerling die Notizen des Marburger Juristen **Ferdinand Karl Schweikart** (1780 - 1857) an Gauß weiter:

> *„Es gibt eine zweifache Geometrie, - eine Geometrie im engeren Sinn - die Euklidische; und eine astralische Größenlehre. Die Dreiecke der letzteren haben das Eigene, dass die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist. . . . "*

Schweikart erwähnte, dass die Fläche von Dreiecken proportional zu ihrem Defekt sei, und dass die Astral-Geometrie (die er wohl deshalb so nannte, weil sie sich erst bei astronomischen Entfernungen von der Euklidischen unterscheide) von einer Konstanten abhänge. Die Euklidische Geometrie sei nur wahr, wenn diese Konstante unendlich groß sei.

Gauß antwortete sehr erfreut und bemerkte, dass die genannte Konstante sehr viel größer als der Erdradius sein müsse. Er selbst habe die Astralgeometrie so weit ausgebildet, dass er alle Aufgaben vollständig lösen könne, sobald die Konstante gegeben sei. Er gab auch eine Formel für die Obergrenze von Dreiecksflächen an (im Wesentlichen ein Vielfaches des maximalen Defektes, $k \cdot \pi$).

Schweikart kannte wahrscheinlich die Ergebnisse von Saccheri und Lambert. Er hat nichts veröffentlicht und scheint auch auf dem Gebiet nicht weiter gearbeitet zu haben. Trotzdem kann man diesen Briefwechsel zwischen Gauß und Gerling als Geburtsstunde der nichteuklidischen Geometrie auffassen, denn zum ersten Mal in der Geschichte wurde offen ausgesprochen, dass es neben der Euklidischen noch eine andere Geometrie gibt.

Franz Adolph Taurinus (1794 – 1874), ein Neffe Schweikarts, ist von diesem zu weiteren Untersuchungen angeregt worden. Im Gegensatz zu seinem Onkel glaubte er fest an das fünfte Postulat und versuchte, es zu beweisen. 1825 und 1826 veröffentlichte er seine Resultate, im Vorwort zum zweiten Buch erwähnte er auch Schweikart und den Briefwechsel mit Gauß. Er erkannte in seinen Schriften die Widerspruchslosigkeit der unter der Hypothese vom spitzen Winkel hergeleiteten Sätze, und indem er Lamberts Gedanken von einer Kugel mit imaginärem Radius aufgriff, entwickelte er sogar rein formal eine nichteuklidische Trigonometrie. Er löste eine Reihe von Aufgaben, wie etwa die Berechnung des Inhalts von Dreiecken bei gegebenen Seiten oder des Umfangs eines Kreises bei gegebenem Radius, und er kam zu den gleichen Formeln wie Gauß. Dieser hatte vorab von den Büchern erfahren und antwortete ihm 1824. Er, Gauß, hätte festgestellt, dass die Hypothese vom spitzen Winkel auf eine eigene von der Euklidischen ganz verschiedene Geometrie führe, die in sich selbst durchaus konsequent sei. Alle Bemühungen, einen Widerspruch zu finden, hätten sich als fruchtlos erwiesen. Das einzige Zweifelhafte sei die Existenz einer absoluten Länge. Er bestehe aber darauf, dass diese Mitteilungen privat seien und nicht an die Öffentlichkeit gelangen dürften.

Obwohl Taurinus mit seinen Forschungen weiter vorstieß als alle seine Vorgänger, blieb er fest der Ansicht, die Euklidische Geometrie sei die einzig richtige. Da er ohne Anerkennung blieb, resignierte er schließlich und verbrannte die restlichen Exemplare seines zweiten Buches.

Auffällig ist, wie sehr Gauß sich scheute, mit seinen nichteuklidischen Überlegungen an die Öffentlichkeit zu treten. Das Thema muss zu dieser Zeit einen ähnlichen Ruf besessen haben wie die Frage nach der Quadratur des Kreises oder der Konstruktion eines Perpetuum Mobile. Besonders berühmt ist in diesem Zusammenhang der Brief von Gauß an Bessel vom 27. 1. 1829:

> *„Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahre alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiß nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter konsolidiert, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.“*

Bei den Böotiern handelte es sich um einen etwas einfältigen griechischen Stamm.

Am 17. Mai 1831 erwähnte Gauß in einem Brief an Schumacher, dass er jetzt doch angefangen habe, einiges zu dem Thema aufzuschreiben, damit es nicht mit ihm unterginge.

1832 erhielt Gauß einen Brief von seinem Jugendfreund Wolfgang Bolyai, sowie dessen Buch über Geometrie und einen Anhang von Wolfgangs Sohn **Johann Bolyai** mit sensationellem Inhalt. Doch dazu muss man etwas weiter ausholen.

Im Juni 1799 hatte Wolgang Bolyai Göttingen verlassen (aus Geldmangel zu Fuß), im September kam er nach mancherlei Abenteuern in seiner Heimat in der Nähe von Hermannstadt in Siebenbürgen an. 1801 heiratete er, 1802 wurde sein Sohn Johann geboren. 1804 erhielt Wolfgang eine Professur am evangelischen Kollegium in Maros-Vásárhely. Dort entstand sein Hauptwerk, das sogenannte „Tentamen“, ein großes Lehrbuch zur Geometrie. Sein Sohn Johann zeigte schon früh mathematische Begabung, und er äußerte gegenüber Gauß seine Hoffnung, seinen Sohn eines Tages nach Göttingen schicken zu können, damit er Schüler von Gauß würde. Am 10. 4. 1816 schien ihm der Tag gekommen zu sein, und er schrieb an seinen Jugendfreund:

> *„... Ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten und, wenn es möglich wäre, in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15-jährigen Jüngling nicht*

> *dalassen, und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine durch viele Prozesse geschwächten Kräfte.*
>
> *Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sichs, schon entschädigen. Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. In Hinsicht auf diesen Plan berichte mir unverholen:*
> *1. Hast Du nicht eine Tochter, welche damals gefährlich (reciproce) wäre ...*
> *2. Seid Ihr gesund, nicht arm, zufrieden, nicht mürrisch? Besonders ist Deine Frau Gemahlin eine Ausnahme von ihrem Geschlechte? Ist sie nicht veränderlicher als die Wetterhähne und so wenig im Voraus zu berechnen wie die Barometerveränderungen? ...*
> *3. Alle Umstände zusammengenommen kannst Du mir leichter mit einem Worte sagen, dass es nicht sein kann; denn ich werde nie daran zweifeln, dass es nicht an Deinem Herzen fehlen wird.“*

Gauß muss über diesen Brief sehr befremdet gewesen sein. Zudem hatte er überhaupt kein Interesse an Schülern und den Kopf voll mit privaten und dienstlichen Problemen. Er verzichtete auf eine Antwort und ließ danach 16 Jahre lang nichts mehr von sich hören.

Johann Bolyai ging daraufhin 1818 auf die Ingenieur-Akademie in Wien und trat 1823 in den Militärdienst ein. Seit 1820 beschäftigte er sich trotz eindringlicher Warnungen seines Vaters mit dem Parallelenproblem, und gegen Ende des Jahres, in dem er seine erste Stelle in Temesvár antrat, scheint er den Durchbruch geschafft zu haben. Am 3. November 1823 schrieb er seinem Vater:

> *„Mein Vorsatz steht schon fest, dass ich, sobald ich es geordnet, abgeschlossen habe und eine Gelegenheit kommt, ein Werk über die Parallelen herausgeben werde. ... Ich habe es noch nicht, aber ich habe so erhabene Dinge herausgebracht, dass ich selbst erstaunt war und es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen; wenn Sie, mein teurer Vater, es sehen werden, so werden Sie es erkennen; jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur so viel: dass ich aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe. Alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Turme. ... “*

Wolfgang Bolyai zeigte sich bereit, die Theorie seines Sohnes als Anhang in sein Lehrbuch aufzunehmen, und er mahnte ihn zur Eile. Er ahnte, dass die Zeit reif für die neue Geometrie war und dass die Gefahr bestand, dass sie an mehreren Orten gleichzeitig gefunden wurde. Aber er verstand die Dinge nicht, die sein Sohn gefunden hatte, es kam zu Streitigkeiten, und es dauerte noch mehrere Jahre, bis der Druck vollendet war.

Anfang 1832 erschien endlich das Tentamen, zusammen mit dem Anhang von Johann Bolyai, dem berühmten „Appendix“. Das Original war in Latein geschrieben, aber Johann Bolyai gab selbst 1832 eine deutsche Bearbeitung heraus. Der deutsche Titel lautet: RAUMLEHRE, unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms (gemeint ist damit natürlich das V. Postulat): Für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.

Über den Inhalt wird weiter unten berichtet werden. Mit der „Quadratur des Kreises“ ist die Konstruktion eines gleichseitigen konvexen Vierecks mit 4 gleichen Winkeln gemeint, dessen Fläche gleich der eines gegebenen Kreises ist. Echte Quadrate gibt es unter der Hypothese des spitzen Winkels natürlich nicht.

Auf Umwegen (eine Postsendung war verloren gegangen) erreichte Gauß im Februar ein Exemplar des Appendix. Am 14. 2. 1832 äußerte sich Gauß in einem Brief an Gerling sehr positiv über die Arbeit und nannte den jungen Bolyai ein „Genie erster Größe“. In seiner Antwort vom 6. 3. 1832 an Wolfgang Bolyai schrieb er:

> *„Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.*
>
> *Wenn ich damit anfange, „dass ich solche nicht loben darf“: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen. Aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehend mit meinen eigenen, zum Teil schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt. ...*
>
> *Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge. Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.“*

Nach einigen Verbesserungsvorschlägen schrieb er noch:

> *„... Jedenfalls bitte ich Dich, Deinen Sohn herzlich von mir zu grüßen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, den Kubikinhalt des Tetraeders zu bestimmen. ... Man hätte erwarten sollen, dass es auch dafür einen einfachen Ausdruck geben werde; aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht. ...*
>
> *Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen den beiden geometrischen Systemen a priori zu unterscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei* nur *Form unserer Anschauung. ...“*

Der Eindruck auf Johann Bolyai war niederschmetternd. Gauß hatte nicht die erwartete begeisterte Zustimmung geäußert, sondern angeblich alles schon Jahrzehnte vorher gewusst. Er speiste ihn mit einer Übungsaufgabe ab und mit der Bemerkung, dass er sich darüber freue, dass ihm ausgerechnet der Sohn eines Freundes mit der Veröffentlichung zuvor gekommen sei. Und er verweigerte ihm die öffentliche Anerkennung. Die Enttäuschung führte zum völligen Persönlichkeitsverfall Johanns, er warf sich rastlos nur noch auf unlösbare Probleme, wurde aus dem Armeedienst entlassen und überwarf sich mit seinem Vater, der 1856 (hochgeehrt) starb. Die letzten Jahre seines Lebens verbrachte Johann verarmt und in großer Einsamkeit. Er starb 1860 unbeachtet und wurde in einem namenlosen Grab verscharrt. Erst als die Briefe von Gauß nach dessen Tod veröffentlicht wurden, erfuhr die Welt von der Entdeckung des Johann Bolyai.

Gauß, der noch in den zwanziger Jahren bei seinen Vermessungsarbeiten am Beispiel des größten vermessenen Dreiecks (zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohen Hagen) im Rahmen der Messgenauigkeit die Winkelsumme von 180° bestätigt gesehen hatte, war sich im Klaren darüber, dass die neue Geometrie in der Wirklichkeit höchstens bei astronomischen Entfernungen zum Vorschein kommen könnte. Trotzdem war er fest von der Richtigkeit der Theorie überzeugt, und er wusste deshalb sicher auch die Arbeit von Johann Bolyai zu schätzen. Über seine eigenartige Reaktion ist viel spekuliert worden, wir können sie nur zur Kenntnis nehmen. In den nächsten Jahren wandte sich Gauß seinen physikalischen Untersuchungen zu. Erst 1841 kam die Parallelentheorie wieder ins Spiel, er erwähnte eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung eines Kasaner Professors namens Lobatschewski, zwei Jahre, nachdem er begonnen hatte, Russisch zu lernen. 1844 kam er in zwei Briefen an Gerling wieder auf Lobatschewski zu sprechen und 1846 äußerte er sich gegenüber Schumacher sehr positiv über Lobatschewskis Veröffentlichungen. Aber auch diesmal blieb er seinen Prinzipien treu und äußerte sich nicht in der Öffentlichkeit dazu. Wer war Lobatschewski?

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts gab es einen drastischen Rückgang der Auslandskontakte Russlands und einen Niedergang der Wissenschaften. Die Akademie in St. Petersburg und die Universität in Moskau waren die einzigen wissenschaftlichen Zentren. Unter Zar Alexander I wurden in den Jahren 1801 – 1805 zahlreiche Reformen durchgeführt, wie z.B. die Einfuhr ausländischer Bücher, die Erlaubnis von Reisen von Russen ins Ausland und die Gründung neuer Universitäten, u.a. 1804 in Kasan. Es gab aber nur wenige Studenten, meist aus theologischen Seminaren und ohne naturwissenschaftliche Kenntnisse. 1812 zog Napoleon nach Russland, mit den bekannten Folgen, und ab 1815 – nach dem Wiener Kongress – versuchte man noch einmal, den inneren Aufbau voranzutreiben. Aber ab 1818 wurden viele der Reformen wieder zurück genommen.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793 - 1856), geboren in Nishni-Nowgorod, lebte ab etwa 1800 unter einfachsten Verhältnissen in Kasan, besuchte dort das Gymnasium und ab 1807 die neu gegründete Universität. Zufällig wurde 1808 der Deutsche Bartels als Vertreter der Reinen Mathematik dorthin berufen, jener Bartels, der schon als früher Förderer von Gauß in Erscheinung getreten war und der nie ganz den Kontakt zu Gauß verloren hatte.

Ab 1809 verlegte Lobatschewski seinen Arbeits-Schwerpunkt auf die Mathematik, und nachdem er schon einige kleinere Ämter inne gehabt hatte, wurde er 1816 (im Alter von 23 Jahren) in den Lehrkörper aufgenommen. Um diese Zeit begann er auch mit Untersuchungen zum Parallelenproblem.

Wegen anhaltender Streitigkeiten im Kollegium wurde 1818 der Staatsrat Magnizkij mit einer Revision beauftragt. Eine der Folgen seiner recht willkürlichen und reaktionären Maßnahmen war wohl auch der Weggang Bartels im Jahre 1820. 1822 wurde Lobatschewski zum ordentlichen Professor ernannt. Zeitweise lag die ganze Last des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften auf seinen Schultern, hinzu kamen zahlreiche Verwaltungsaufgaben. 1823 reichte er das Skript für ein Geometriebuch ein, das aber abgelehnt wurde, unter anderem deswegen, weil er als Maßeinheit das französische Meter und den 100. Teil des Rechten Winkels benutzt hatte.

Nach anfänglichen vergeblichen Versuchen zum Beweis des Parallelenpostulats entdeckte er, dass die Hypothese des spitzen Winkels auf eine in sich geschlossene und konsequente Geometrie führt. Im Februar 1826 legte er seine neue Geometrie dem Kollegium vor, 1829-30 wurden die Ergebnisse unter dem Titel „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ in der Universitätszeitung, dem „Kasaner Boten“, veröffentlicht (natürlich auf Russisch). Er sprach darin klipp und klar aus, dass das Euklidische Parallelenaxiom unbeweisbar sei und es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie (die sogenannte „imaginäre Geometrie“) gäbe, in der die Winkelsumme im Dreieck weniger als 180° betrage. Die schwer verständliche Arbeit fand bei den Kollegen wenig Anklang. Im Ausland blieb sie unbekannt, da der Kasaner Bote außerhalb Russlands nicht zu haben war.

Im Rahmen einer erneuten Revision wurde der Staatsrat Magnizkij abgesetzt und ein neuer Kurator berufen. Auf dessen Betreiben hin wurde Lobatschewski 1827 (im Alter von 33 Jahren) zum Rektor der Universität gewählt. Diesen Posten hatte er 19 Jahre lang inne. Mit unermüdlichem Arbeitseifer sorgte er für Ruhe im Kollegium und ordnungsgemäße Lehre, brachte die Bibliothek und die wissenschaftlichen Sammlungen in Ordnung, förderte Neubauten und war zeitweise auch noch mit der Revision von Gymnasien beschäftigt. Nachdem der Kasaner Bote eingestellt worden war, gründete er 1834 die „Gelehrten Schriften der Kasaner Universität“, in denen 1835 seine „Imaginäre Geometrie“ und 1835 – 1838 seine „Neuen Anfangsgründe der Geometrie“ erschienen. Ersteres wurde 1837 auch in Crelles Journal auf Französisch abgedruckt, entging aber trotzdem der allgemeinen Aufmerksamkeit.

1840 erschien in Berlin bei der Fincke'schen Buchhandlung auf Deutsch sein 61 Seiten langes kleines Buch mit dem Titel „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, auf das Gauß 1846 Schumacher in einem Brief aufmerksam machte.

1846 wurde Lobatschewski nach 25-jähriger Diensttätigkeit von seinen Ämtern enthoben. 1855 veröffentlichte er anlässlich der 50-Jahres-Feier der Universität Kasan eine Zusammenfassung seiner Ideen unter dem Namen „Pangeometrie", 1856 starb er nach schwerer Krankheit. Seine Verdienste um die Universität hatten ihm hohe Wertschätzung und zahlreiche Ehrungen eingebracht, doch sein wissenschaftliches Werk wurde zu seinen Lebzeiten nie anerkannt, sondern nur als verzeihliche Wahnidee belächelt. Erst nach 1863 wurde man durch die Veröffentlichung der Briefe von Gauß auf ihn aufmerksam. 1893 – zu seinem 100. Geburtstag – errichtete man ihm in Kasan ein Denkmal.

Drei große Männer der Mathematik – eine Theorie! Gauß, der berühmte Fürst der Mathematiker, scheint (in Übereinstimmung mit Schweikart) schon 1819 von der Existenz einer alternativen Geometrie überzeugt gewesen zu sein, aber er hat nie etwas darüber veröffentlicht. Nur aus Skizzen in seinem Nachlass kann man schließen, dass seine Ideen denen von Bolyai sehr nahe waren.

Johann Bolyai hat seine neue Geometrie um 1823 gefunden, sie aber erst 1832 veröffentlicht. Der an sich schon charakterlich instabile junge Offizier zerbrach an der Enttäuschung über die mangelhafte Anerkennung seiner Entdeckung.

Der emsige russische Professor und Hochschul-Rektor Lobatschewski hat die nichteuklidische Geometrie um 1826 entwickelt und sie 1829-30 als erster veröffentlicht, auch wenn kaum jemand in der Welt Notiz davon genommen hat. Sein lebenslanges beharrliches, allen Widerständen und Misserfolgen trotzendes Eintreten für seine Theorie rechtfertigt vielleicht, dass die nichteuklidische Geometrie heute auch oft als Lobatschewski-Geometrie bezeichnet wird.

Was unterscheidet die drei Entdecker der neuen Geometrie von Saccheri und Lambert? Alle drei haben sie sich von der Vorstellung verabschiedet, das Euklidische Parallelenaxiom könnte vielleicht doch noch durch einen Widerspruch zur Hypothese vom spitzen Winkel bewiesen werden. Sie haben explizite Formeln für geometrische Berechnungen erstellt und damit eine ausgedehnte und konsequente Theorie entwickelt, in der kein Widerspruch zu erkennen war. Vielmehr stellte sich die Euklidische Theorie als Grenzfall der neuen Geometrie dar, und man konnte sie sogar auf gewissen Flächen im nichteuklidischen Raum wiederentdecken. Und die Theorie lieferte zugleich die Erkenntnis, dass in der realen Welt eine a priori Entscheidung für die eine oder die andere Geometrie gar nicht möglich war.

Einen echten Widerspruchsbeweis konnten allerdings alle drei nicht liefern! Das blieb späteren Mathematikern vorbehalten, denen es tatsächlich gelang, Modelle für die nichteuklidische Geometrie zu konstruieren. Den Anfang machte 1868 der Italiener **Eugenio Beltrami** (1835 – 1900), der eine Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum vorstellte, auf der – zumindest lokal – die ebene nichteuklidische Geometrie verwirklicht war.