
Kapitel 2

Die „Elemente“: Kongruenz und Stetigkeit

2.1 Bewegungen und Kongruenz

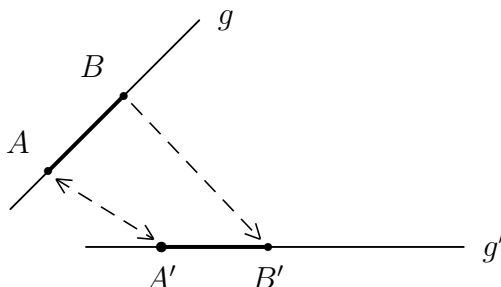
Jetzt soll der Begriff der „Kongruenz“ bzw. Euklids vage Vorstellung vom „Zur Deckung bringen“ präzisiert werden.

Ich stelle zunächst Hilberts Version vor, wähle aber anschließend einen anderen, etwas anschaulicheren Weg.

Hilberts dritte Axiomengruppe: Die Axiome der Kongruenz

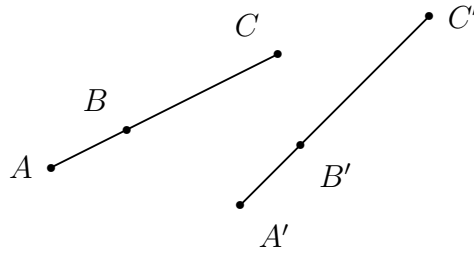
PRIMITIVER TERM: Es gibt eine Beziehung zwischen Strecken, die man „kongruent“ (in Zeichen: „ $\cong$ “) nennt. Jede Strecke $\overline{AB}$ ist zu sich selbst kongruent.

III.1: Liegen die Punkte A, B auf der Geraden g und A' auf der Geraden g' , so gibt es auf einem gegebenen (durch A' definierten) Halbstrahl von g' einen Punkt B' mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.



III.2: Ist $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ und $\overline{A''B''} \cong \overline{AB}$, so ist auch $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$.

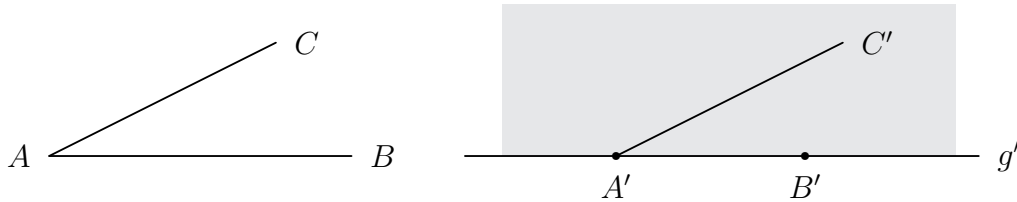
III.3: Ist $A - B - C$ und $A' - B' - C'$, sowie $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.



Auch zwischen Winkeln wird eine Beziehung gefordert, die man „kongruent“ nennt (neuer PRIMITIVER TERM).

III.4: Ist ein Winkel $\angle BAC$ gegeben, sowie eine Gerade g' , eine durch g' bestimmte Halbebene, ein Punkt A' auf g' und ein durch A' bestimmter Halbstrahl $A'B'$ auf g' , so gibt es genau einen ebenfalls von A' ausgehenden Halbstrahl $A'C'$, so dass $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ist und die inneren Punkte dieses Winkels in der gegebenen Halbebene liegen.

Außerdem ist jeder Winkel $\angle BAC$ zu sich selbst kongruent.



III.5: (SWS) Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ gelten, so ist auch $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Anstatt dieser recht abstrakten und nicht besonders gut motivierten Axiome werden wir hier den Begriff der „Bewegung“ benutzen und dabei wieder Schreibweisen aus der Mengenlehre benutzen. Wir denken dabei an Verschiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen (Reflektionen).

Primitiver Term „Bewegung“:

Wir fordern die Existenz gewisser Abbildungen von $\mathcal{E}$ auf sich, die wir **Bewegungen** nennen.

Bewegungs-Axiome:

B-1) Die Menge $\mathcal{B}$ aller Bewegungen bildet eine Gruppe.

Insbesondere ist die identische Abbildung eine Bewegung, jede Bewegung ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist wieder eine Bewegung.

B-2) Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden ab, und sie erhalten die Anordnung auf den Geraden. Insbesondere werden auch Strecken auf Strecken und Strahlen

auf Strahlen abgebildet, denn all diese Mengen werden mit Hilfe der „zwischen“-Beziehung definiert.

B-3) Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es **genau** eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(A) = O$.
2. $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$.
3. $\varphi(C) \in H(OP, Q)$.

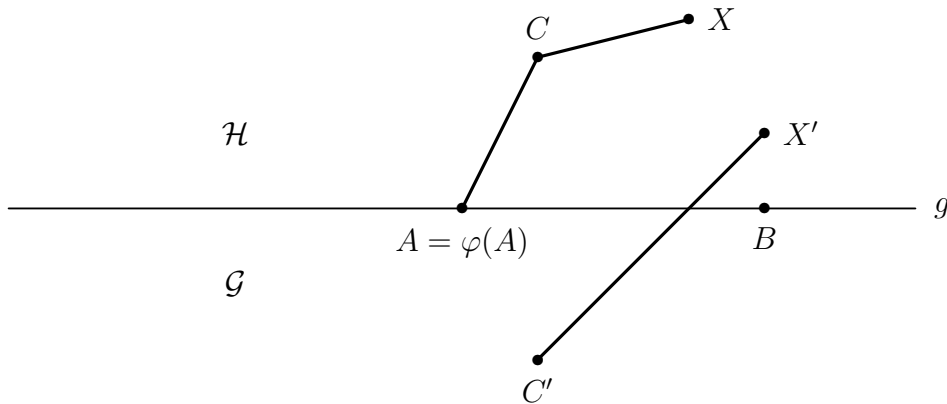
Dieses Axiom wird von der (anschaulich klaren) Existenz von Translationen, Rotationen und Reflektionen motiviert.

Axiom B-3 ist sehr weitreichend!

Sei etwa $g = AB$ eine feste Gerade und $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ die beiden durch g bestimmten Halbebenen. Ist C ein beliebiger Punkt in $\mathcal{H}$, so gibt es genau eine Bewegung φ , die A auf A , B auf einen Punkt $B' \in \overrightarrow{AB}$ und C nach $\mathcal{G}$ abbildet.

1.1 Satz. *Unter den gerade beschriebenen Bedingungen gilt:*

1. Für alle $X \in \mathcal{E} \setminus g$ liegen X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von g .
2. Es ist $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.
3. Für alle $X \in g$ ist $\varphi(X) = X$.



BEWEIS: φ bildet offensichtlich die Gerade g auf sich ab, und das gilt dann auch für φ^{-1} .

1) Sei $X \in \mathcal{H}$, $X \neq C$. Dann ist $\overline{CX} \cap g = \emptyset$.

Annahme: $X' := \varphi(X) \in \mathcal{H}$. Für $C' := \varphi(C)$ gilt dann: $\overline{C'X'} \cap g \neq \emptyset$. Also gibt es ein $Y' \in g$ mit $C' - Y' - X'$. Weil $\varphi(\overline{CX}) = \overline{C'X'}$ ist, muss es ein $Y \in \overline{CX}$

mit $\varphi(Y) = Y'$ geben. Da auch φ^{-1} die Gerade g auf sich abbildet, muss Y auf g liegen, obwohl $Y \subset \overline{CX} \subset \mathcal{E} \setminus g$ ist. Das ist ein Widerspruch!

Jedes $X \in \mathcal{H}$ wird also nach $\mathcal{G}$ abgebildet. Analog folgt, dass jedes $Y \in \mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$ abgebildet wird.

2) $\psi := \varphi \circ \varphi$ ist eine Bewegung, die A fest lässt, B nach $\overrightarrow{AB}$ und $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ abbildet. Das tut auch die Identität. Aber es gibt nach Axiom B-3 nur eine Bewegung mit dieser Eigenschaft. Also ist $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

3) **Annahme:** Es gibt ein $X \in g$, so dass $X' := \varphi(X) \neq X$ ist. Dann ist $\varphi(X') = X$, und es gibt drei Möglichkeiten:

a) Ist $A - X - X'$, so ergibt nochmalige Anwendung von φ : $A - X' - X$. Beides zugleich kann aber nicht gelten.

b) Ist $A - X' - X$, so führt das auf die gleiche Weise zu einem Widerspruch.

c) $X' - A - X$ kann aber auch nicht gelten, weil φ den Strahl $\overrightarrow{AB}$ auf $\overrightarrow{AB}$ abbildet. Also war die Annahme falsch. ■

Definition:

Eine Bewegung, die eine Gerade g punktweise festlässt und die durch g bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht, heißt **Spiegelung** an der Geraden g .

1.2 Satz. *Zu jeder Geraden gibt es genau eine Spiegelung.*

BEWEIS: Die Existenz haben wir oben gezeigt, die Eindeutigkeit folgt direkt aus Axiom B-3. ■

Unter einer **geometrischen Figur** verstehen wir eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{E}$. Ist $\mathcal{F}$ eine geometrische Figur und φ eine Spiegelung, so nennt man $\varphi(\mathcal{F})$ das **Spiegelbild** von $\mathcal{F}$.

Definition:

Zwei geometrische Figuren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ heißen **kongruent** (in Zeichen: $\mathcal{F} \hat{=} \mathcal{F}'$), falls es eine Bewegung $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt.

Aus den Gruppeneigenschaften von $\mathcal{B}$ folgt trivial:

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

1.3 Folgerung.

Ist $\mathcal{F} \hat{=} \mathcal{F}^$ und $\mathcal{F}' \hat{=} \mathcal{F}^*$, so ist auch $\mathcal{F} \hat{=} \mathcal{F}'$.*

Das ist Axiom 1 von Euklid: *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*

1.4 Satz.

1. Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$ und $\psi(B) = C$ gibt.
2. Sind die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kongruent vermöge einer Bewegung φ , so ist auf jeden Fall $\varphi(A) = C$.

BEWEIS: 1) Da jede Bewegung bijektiv ist und die „zwischen“-Beziehung respektiert, ist die erste Aussage klar.

2) Wir nehmen an, es wäre $\varphi(A) \neq C$. Dann muss es ein $Y \in \overrightarrow{AB}$ mit $Y \neq A$ und $\varphi(Y) = C$ geben. Für jedes X mit $X - A - Y$ ist dann

$$\varphi(X) - \varphi(A) - \varphi(Y) = C,$$

wobei $\varphi(A) \in \overrightarrow{CD}$ und $\varphi(X)$ nicht auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegt. Das kann aber nicht sein! ■

Wir können nicht beweisen, dass es – wenn $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ist – eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ gibt. Die Anschauung sagt uns jedoch, dass das der Fall sein müsste. Bei Hilbert ist die Kongruenz eine Beziehung zwischen Strecken, und da $\overline{AB} = \overline{BA}$ ist, ist auch $\overline{AB} \cong \overline{BA}$.

Es ist daher Zeit für ein weiteres Bewegungs-Axiom:

B-4) Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

Jetzt ist klar:

Ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

Man kann in diesem Fall sogar noch mehr sagen: Die Werte von φ auf $\overline{AB}$ sind durch die Zuordnung $A \mapsto C$ und $B \mapsto D$ schon eindeutig festgelegt. Das ergibt sich aus dem nächsten Satz.

1.5 Satz über das Abtragen von Strecken. *Es sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$.*

BEWEIS: 1) Existenz:

Nach Axiom B-3 existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = O$ und $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$. Setzt man $Q := \varphi(B)$, so ist $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$.

2) Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Bewegungen φ und ψ mit $\varphi(A) = \psi(A) = O$ und $B'_1 := \varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$ und $B'_2 := \psi(B) \in \overrightarrow{OP}$. Dann ist auch $\varrho := \psi \circ \varphi^{-1}$ eine Bewegung, und es gilt:

$$\varrho(O) = O \quad \text{und} \quad \varrho(B'_1) = B'_2.$$

Damit bildet ϱ die Gerade OP auf sich ab, und es gibt nur noch zwei Möglichkeiten:

1. Bildet ϱ einen Punkt $R \in \mathcal{E} \setminus OP$ auf einen Punkt der gleichen Halbebene ab, so muss $\varrho = \text{id}_{\mathcal{E}}$, also $\varphi = \psi$ sein. Dann ist natürlich $B'_1 = B'_2$.
2. Bildet ϱ alle Punkte der einen Halbebene in die andere Halbebene ab, so ist ϱ die Spiegelung an der Geraden OP . Dann lässt ϱ die Gerade OP punktweise fest, und auch in diesem Falle ist $B'_1 = B'_2$.

Also bilden alle Bewegungen, die A auf O und B auf einen Punkt von $\overrightarrow{OP}$ abbilden, B auf den gleichen Punkt ab. ■

Dieser Satz ist recht wichtig!

Auch der Vergleich von Strecken ist jetzt möglich: Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben und ist $Q \in \overrightarrow{CD}$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\overline{AB} \cong \overline{CQ}$, so muss genau eine der drei folgenden Aussagen zutreffen:

1. $Q = D$. Dann ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
2. Es ist $C - Q - D$. Dann sagt man: $\overline{AB} < \overline{CD}$.
3. Es ist $C - D - Q$. Dann sagt man: $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Das entspricht genau Euklids Vorstellung vom Vergleich zweier Strecken.

Eine andere Anwendung des neuen Axioms ist der

1.6 Satz über die Addition von Strecken). *Sei $A - B - C$ und $A' - B' - C'$. Ist $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

Das entspricht Euklids Axiom 2 (*Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich*) und Hilberts Axiom III-3.

BEWEIS: Nach Voraussetzung existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Dann gilt aber:

$$A' - B' - \varphi(C) \quad \text{und} \quad A' - B' - C'.$$

Die Gerade $g' = A'B'$ wird durch B' in zwei Halbgeraden aufgeteilt. Dabei liegen $\varphi(C)$ und C' auf der gleichen Halbgeraden. Mit anderen Worten:

$$\text{Es ist} \quad \varphi(C) \in \overrightarrow{B'C'}.$$

Da $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ist, muss $\varphi(C) = C'$ sein. Also ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. ■

Definition:

Seien ein Punkt $O \in \mathcal{E}$ und eine Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Die Menge

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{OP} \cong \overline{AB}\}$$

heißt der **Kreis um O mit Radius $\overline{AB}$** .

Ein Punkt $Q \in \mathcal{E}$ **liegt im Inneren** des Kreises, wenn $Q = O$ oder $\overline{OQ} < \overline{AB}$ ist.

Der Punkt Q liegt **im Äußeren** des Kreises, wenn $\overline{OQ} > \overline{AB}$ ist.

Ein **Durchmesser** des Kreises ist eine Strecke $\overline{XY}$ mit $X, Y \in \mathcal{K}$ und $X - O - Y$.

Unsere Definition des Kreises entspricht recht gut derjenigen von Euklid. Aber was besagt dann das Postulat III? Die Existenz eines Kreises bei gegebenem Mittelpunkt und Radius ist trivial. Anscheinend müssen wir Euklid doch noch etwas anders interpretieren.

Man könnte sich vorstellen, dass Euklid in seiner Definition 15 eigentlich folgendes sagen wollte:

Revidierte Version von Euklids Definition 15.

Ein *Kreis mit Mittelpunkt O* ist eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Auf jedem von O ausgehenden Strahl liegt genau ein Punkt von $\mathcal{K}$.
2. Für je zwei Punkte $A, B \in \mathcal{K}$ ist $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

Bei dieser Formulierung ist die Existenz des Kreises nicht mehr selbstverständlich, aber es sind die typischen Eigenschaften einbezogen. In Wirklichkeit versteht Euklid zwar unter einem „Kreis“ die Kreisfläche, er braucht aber zur Abgrenzung dieser Fläche die berandende Linie. Deshalb benutzen wir hier die moderne Sprechweise, nach der ein „Kreis“ der Rand einer Kreisfläche ist. Auch Euklids Definition 17 (des „Durchmessers“) bekommt nun einen Sinn: Jede durch O gehende Gerade besteht aus zwei verschiedenen von O ausgehenden Strahlen. Und wenn ein Kreis $\mathcal{K}$ um O gegeben ist, dann müssen die beiden Strahlen den Kreis in Punkten A und B treffen, für die gilt: $A - O - B$. Die Strecke $\overline{AB}$ nennt man dann einen *Durchmesser* von $\mathcal{K}$.

Euklid kann mit Hilfe seines Postulats III den Satz über das Abtragen von Strecken beweisen, wobei er aber weitere unbewiesene Annahmen benutzt. Bei uns folgt nun umgekehrt mit dem Satz über das Abtragen von Strecken die Existenz des Kreises (und damit Euklids Postulat III) als nicht-leere Menge.

Ist g eine Gerade durch O , so teilt sie den Rest der Ebene in zwei Halbebenen $\mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_+$. Die beiden Figuren $\mathcal{K}_- := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{K}_+ := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_+$ nennt man die

durch g bestimmten **Halbkreise**. Ist φ die Spiegelung an g und $P \in \mathcal{K}_+$, so liegt $\varphi(P)$ in der Halbebene $\mathcal{H}_-$, und es ist $\overrightarrow{O\varphi(P)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} \cong \overrightarrow{OP}$. Also bildet φ die Halbkreise aufeinander ab, sie sind zueinander kongruent.

Wir wollen nun die Kongruenz von Winkeln näher untersuchen!

1.7 Satz. *Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$, $\psi(B) \in \overrightarrow{DF}$ und $\psi(C) \in \overrightarrow{DE}$ gibt.*

BEWEIS: Die eine Richtung ist trivial, wir zeigen nur „ $\implies$ “.

Sei $\alpha \cong \beta$, vermöge einer Bewegung φ . Wir nehmen an, es sei $\varphi(A) \neq D$. Dann gibt es (o.B.d.A.) ein $X \in \overrightarrow{AB}$ mit $X \neq A$ und $\varphi(X) = D$. (Der Fall $X \in \overrightarrow{AC}$ wird analog behandelt)

Wir wählen ein Q mit $A - X - Q$. Dann gehört auch Q zu $\overrightarrow{AB}$, und es ist

$$\varphi(A) - \varphi(X) - \varphi(Q), \text{ also } \varphi(A) - D - \varphi(Q).$$

Also liegen $\varphi(A)$ und $\varphi(Q)$ weder beide in $\overrightarrow{DE}$ noch beide in $\overrightarrow{DF}$. Aber sie liegen beide auf einer Geraden durch D . Das ist nicht möglich!

Wir wissen somit, dass $\varphi(A) = D$ sein muss. Liegt $\varphi(B)$ in $\overrightarrow{DE}$, so muss $\varphi(C)$ in $\overrightarrow{DF}$ liegen, und umgekehrt. ■

Die Situation ist so ähnlich wie bei der Kongruenz von Strecken. Um zeigen zu können, dass es ein φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ gibt, brauchen wir noch ein weiteres Bewegungsaxiom:

B-5) Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$.

Damit ist die Liste der Bewegungsaxiome vollständig!

1.8 Satz. *Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sich ihre Ecken so mit A, B, C bzw. A', B', C' bezeichnen lassen, dass es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ gibt.*

Einander entsprechende Seiten und Winkel sind dann automatisch zueinander kongruent.

BEWEIS: Auch hier ist nur eine Richtung zu zeigen.

Die beiden Dreiecke seien kongruent vermöge einer Bewegung φ . Diese bildet z.B. die Gerade AB auf eine Gerade g_1 und die Gerade AC auf eine Gerade g_2 ab,

sowie den Schnittpunkt A auf den Schnittpunkt von g_1 und g_2 . Nach geeigneter Bezeichnung der Ecken des Bilddreiecks folgt die Behauptung. ■

1.9 Satz (SWS). *Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

BEWEIS: Weil $\alpha = \angle BAC$ und $\alpha' = \angle B'A'C'$ kongruent sind, gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$. Weil $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{AB} \cong A'\varphi(B)$ ist, folgt mit dem Satz über das Abtragen von Strecken, dass $\varphi(B) = B'$ ist. Und analog folgt, dass $\varphi(C) = C'$ ist. ■

Damit haben wir zugleich Euklids Proposition 4 bewiesen.

Definition:

Ein Dreieck ABC heißt **gleichschenkelig**, wenn $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ist. Die Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle ABC$ nennt man die **Basiswinkel** des Dreiecks.

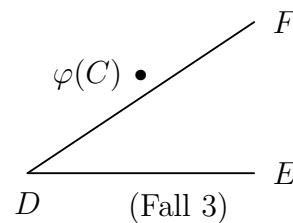
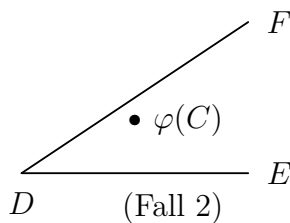
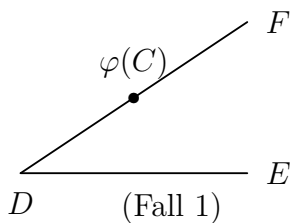
1.10 Folgerung (Euklids Proposition 5, „pons asinorum“). *In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent.*

Der BEWEIS kann nun nach Pappus geführt werden.

Wir betrachten noch den Vergleich von Winkeln:

Es seien zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ gegeben. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in H(DE, F)$. Drei Fälle sind möglich:

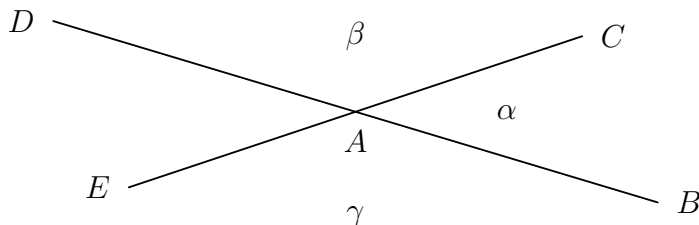
1. Ist $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$, so ist $\alpha \cong \beta$.
2. Liegt $\varphi(C)$ in $H(DF, E)$, also in $I(\beta)$, so sagen wir: $\alpha < \beta$.
3. Liegen $\varphi(C)$ und E auf verschiedenen Seiten von DF , so liegt $\varphi(C)$ in $A(\beta)$, und wir sagen: $\alpha > \beta$.



Es ist klar, dass sich die drei Möglichkeiten gegenseitig ausschließen.

Definition:

Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle CAD$ mit der Eigenschaft $D - A - B$ heißen **Nebenwinkel**. Gilt außerdem $E - A - C$ und sind die Geraden DB und EC voneinander verschieden, so nennt man die Winkel α und $\angle DAE$ **Scheitelwinkel**.



Man zeigt leicht:

1.11 Satz. *Kongruente Winkel haben kongruente Nebenwinkel, und Scheitelwinkel sind kongruent (Euklids Proposition 15).*

Definition:

Ein **rechter Winkel** ist ein Winkel, der zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

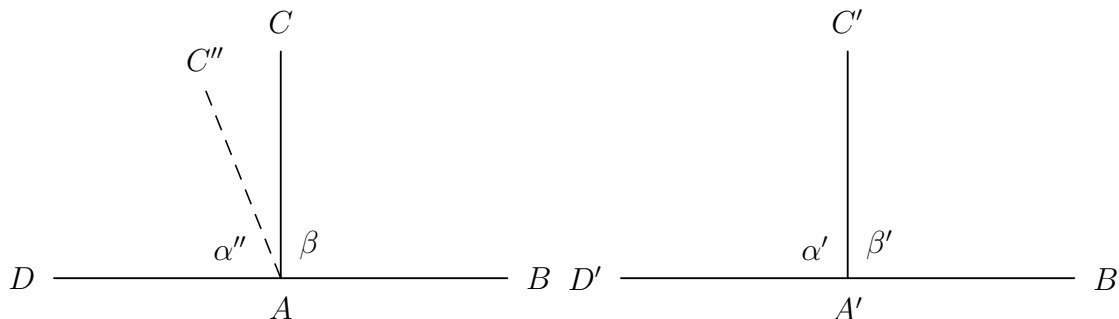
Wir können leicht rechte Winkel erzeugen:

1.12 Satz. *Sei g eine Gerade, φ die Spiegelung an g und $X \in \mathcal{E} \setminus g$. Weiter sei A der (eindeutig bestimmte) Punkt in $\overline{X\varphi(X)} \cap g$. Sind $B, D \in g$ mit $D - A - B$, so ist $\angle BAX$ ein rechter Winkel.*

BEWEIS: Übungsaufgabe! ■

1.13 Satz. *Je zwei rechte Winkel sind kongruent.*

BEWEIS: Wir betrachten zwei Paare von Nebenwinkeln (α, β) und (α', β') , mit $\alpha \cong \beta$ und $\alpha' \cong \beta'$.



Wir nehmen an, α sei nicht kongruent zu α' . O.B.d.A. sei $\alpha' < \alpha$. Dann gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A') = A$, $\varphi(\overrightarrow{A'D'}) = \overrightarrow{AD}$ und $\varphi(C') \in I(\alpha)$. Sei $\alpha'' = \angle DAC'' = \varphi(\angle D'A'C')$ und $\varepsilon := \angle C''AB$ der Nebenwinkel zu α'' .

Es ist $\beta < \varepsilon$ (da $C \in I(\varepsilon)$) und $\beta \hat{=} \alpha$, also auch $\alpha < \varepsilon$. Mit $\alpha' < \alpha$ und $\alpha'' \hat{=} \alpha'$ ist andererseits $\alpha'' < \alpha$. Zusammen ergibt das die Beziehung $\alpha'' < \varepsilon$.

Weil $\alpha' \hat{=} \alpha''$ und β' Nebenwinkel zu α' ist, folgt: $\beta' \hat{=} \varepsilon$. Es ist aber auch $\beta' \hat{=} \alpha'$, und damit $\alpha'' \hat{=} \alpha' \hat{=} \varepsilon$. Das steht im Widerspruch zur obigen Aussage. ■

Euklids Postulat IV kann also als Satz bewiesen werden. Der Beweis geht auf Hilbert zurück. Nun sind wir auch in der Lage, den rechten Winkel als universelles Winkelmaß zu benutzen.

spitze Winkel und **stumpfe Winkel** definiert man dann wie üblich.

Im Gegensatz zur Situation bei den Strecken ist die Addition von Winkeln problematisch. Aus zwei nebeneinander liegenden Winkeln $\angle BAC$ und $\angle CAD$ möchte man gerne einen großen Winkel $\angle BAD$ machen. Das ist aber nur dann sinnvoll, wenn anschließend C im Innern des Winkels $\angle BAD$ liegt, und das ist nur möglich, wenn C und D auf der gleichen Seite von AB liegen. Außerdem soll natürlich D nicht im Innern von $\angle BAC$ liegen, also müssen wir fordern, daß B und C auf der gleichen Seite von AD liegen. Andernfalls ist die Winkeladdition nicht durchführbar.

Da es keine gestreckten Winkel gibt, kann man auch nicht zwei Winkel zu einem gestreckten Winkel addieren. Euklid spricht statt von einem gestreckten Winkel immer von zwei Rechten.

2.2 Das Kreisaxiom

Wir haben Euklids Axiomensystem „repariert“, aber wenn wir nun in seinem Stile weitermachen wollen, dann brauchen wir immer noch ein Axiom über das Schneiden von Kreisen. Andererseits beweist Hilbert mit den oben bereitgestellten Axiomen und Sätzen schon ohne weitere Hilfsmittel einen großen Teil der Sätze Euklids (vor Proposition 29). Brauchen wir also gar – abgesehen von Postulat V – gar kein weiteres Axiom?

Man muss bei Euklid schon etwas genauer hinsehen. Da gibt es nämlich

Proposition 22: *Aus drei gegebenen Strecken a, b, c mit*

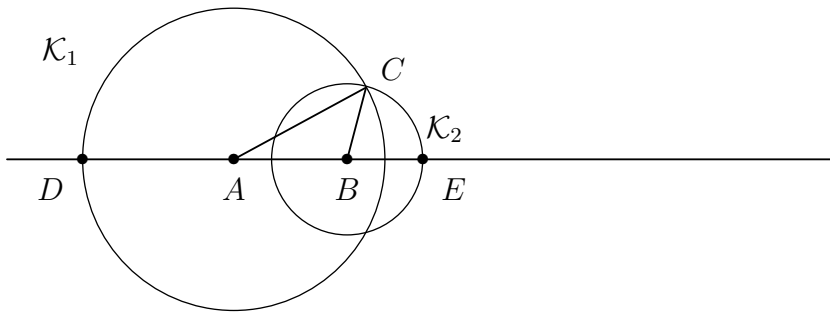
$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

kann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Die Beweisidee ist die folgende:

Man ordnet die Strecken in der Reihenfolge b, c, a auf einer Geraden an, so dass Punkte D, A, B, E entstehen.

Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius $b = \overline{DA}$ und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius $a = \overline{BE}$. Wählt man einen Schnittpunkt C der beiden Kreise aus, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.



Für Euklid ist der Satz kein Problem, die Methode der zwei Kreise hat er ja schon häufig angewandt. Bei Hilbert sucht man den Satz als Folgerung aus den Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenz-Axiomen vergeblich. Woran liegt das?

Wir erinnern uns an das Modell $\mathcal{M}_5$ der pythagoräischen Ebene. Man kann zeigen, dass in $\text{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \text{Pyth}(\mathbb{Q})$ alle Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt sind. Es liegt also ein fast perfektes Modell für die Euklidische Ebene vor. Aber wie steht es mit den Schnittpunkten von Kreisen?

Dazu betrachten wir allgemeine Wurzel-Ausdrücke der Form

$$q = q_n(\sqrt{q_{n-1}(\sqrt{\dots \sqrt{q_1(\sqrt{\alpha})} \dots)}),$$

mit rationalen Funktionen $q_1, \dots, q_{n-1}, q_n$ und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$. Tauscht man eine oder mehrere der Wurzeln gegen ihr Negatives, so erhält man einen sogenannten *konjugierten* Ausdruck zu q .

Ist das Argument jeder Wurzel von der Form $1 + \omega^2$ (wobei ω wieder ein zusammengesetzter Ausdruck sein kann), so sind der ursprüngliche Ausdruck und alle dazu konjugierten Ausdrücke reelle Zahlen. Sind die Argumente der Wurzeln dagegen von beliebiger Form, so können auch nicht-reelle komplexe Zahlen entstehen.

Ein Beispiel ist etwa der reelle Ausdruck $\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$. Der dazu konjugierte Ausdruck $\sqrt{2(-\sqrt{2} - 1)} = i \cdot \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$ ist tatsächlich rein imaginär. Das bedeutet, dass $\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ nicht pythagoräisch sein kann!

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist pythagoräisch, also auch $2(\sqrt{2} - 1)$, aber eben leider nicht die Wurzel daraus. Wir werden weiter unten sehen, dass das in einer Geometrie, in der sich zwei Kreise bei geeigneter Lage der Mittelpunkte und geeigneten Radien immer schneiden müssen, nicht passieren kann.

Das Kreis-Axiom:

S-1) Sind $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathcal{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch einen aus dem Äußeren von $\mathcal{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Jetzt können wir das Programm Euklids durchführen:

2.1 Satz (Euklids Proposition 1). *Sind zwei Punkte A, B gegeben, so gibt es Punkte P und Q auf den beiden Seiten von AB , so dass die Dreiecke ABP und ABQ beide gleichseitig sind (also drei paarweise zueinander kongruente Seiten besitzen).*

Der BEWEIS wird wie bei Euklid ausgeführt.

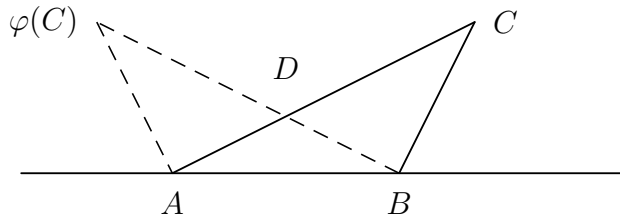
Bei Hilbert kann der Satz so nicht bewiesen werden. Allerdings gilt dort:

2.2 Satz über die Existenz gleichschenkliger Dreiecke. *Zu Punkten $A \neq B$ gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{AB}$.*

BEWEIS: Sei $C \notin \overline{AB}$. Ist $\angle BAC \cong \angle ABC$, so ist man fertig. Wir nehmen daher an, dass $\angle BAC < \angle ABC$ ist. Es gibt nun eine Bewegung φ , so dass $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{BA}$ und $\varphi(C) \in H(\overline{AB}, C)$ ist.

Dann ist $\overline{B\varphi(B)} \cong \overline{AB} \cong \overline{BA}$, also $\varphi(B) = A$. Außerdem ist $\angle AB\varphi(C) = \angle BAC < \angle ABC$, also $\varphi(C) \in I(\angle ABC)$. Nach dem Querbalken-Theorem trifft die Gerade $B\varphi(C)$ die Strecke $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt D .

Weil φ den Winkel $\angle BAC$ auf den Winkel $\angle BA\varphi(C)$ abbildet, ist ABD gleichschenkelig.



Dabei braucht man noch **Proposition 6**, die Umkehrung zum Pons-Asinorum-Satz („Ein Dreieck mit gleichen Basiswinkeln ist gleichschenkelig“), aber der kann ganz leicht durch Widerspruch bewiesen werden. ■

Bemerkung. Der obige Beweis benötigt **nicht** das Kreisaxiom. In späteren Sätzen kann man meist an Stelle von gleichseitigen Dreiecken auch gleichschenklige Dreiecke benutzen.

Allerdings ergibt dieses Vorgehen im Sinne Hilberts keine Algorithmen zur geometrischen Konstruktion, es fehlen die Instrumente dafür (Zirkel und Lineal).

Euklids **Propositionen 2 und 3**, die sich mit dem Antragen von Strecken beschäftigen, sind überflüssig geworden, dank der Bewegungsaxiome. Euklids Methode liefert allerdings ein Konstruktionsverfahren.

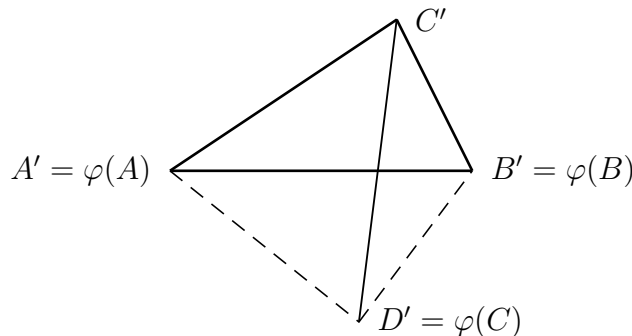
Euklids **Proposition 4** (SWS-Kongruenz) und **5** (Pons asinorum) haben wir bereits bewiesen.

Proposition 7 stellt einen Hilfssatz für Proposition 8 zur Verfügung, den wir nicht brauchen, weil wir direkt zeigen:

2.3 Satz (SSS, Euklids Proposition 8). *Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

BEWEIS: Sei φ die eindeutig bestimmte Bewegung, die A auf A' abbildet, B auf einen Punkt von $\overrightarrow{A'B'}$ und C so, dass $D' := \varphi(C)$ und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'B'$ liegen. Da $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ist, muss $\varphi(B) = B'$ sein.



Da $\overline{B'D'} \cong \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ist, ist $C'D'B'$ gleichschenkelig, und die Basiswinkel $\angle C'D'B'$ und $\angle D'C'B'$ sind kongruent. Genauso folgt auch, dass $\angle D'C'A'$ und $\angle C'D'A'$ kongruent sind. Mit Winkeladdition (oder -Subtraktion, je nach Gestalt der Dreiecke) erhält man:

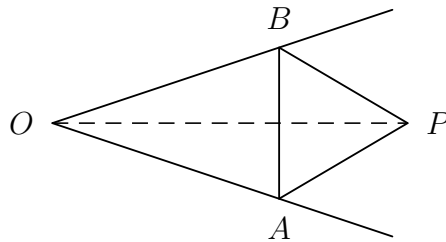
$$\angle A'C'B' \cong \angle A'D'B'.$$

Mit dem SWS-Kongruenzsatz folgt: $A'B'C' \cong A'B'D' \cong ABC$. ■

2.4 Satz (Eulids Proposition 9, „Winkelhalbierung“).

Zu einem gegebenen Winkel $\alpha = \angle AOB$ kann man genau einen Strahl $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{OP}$ mit $P \in I(\alpha)$ finden, so dass $\angle AOP \cong \angle POB$ ist.

BEWEIS: O.B.d.A. sei $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.



Es gibt einen Punkt P , auf der zu O entgegengesetzten Seite von AB , so dass BAP gleichseitig ist. Nach dem Satz von der SSS-Kongruenz sind dann die Dreiecke OPB und OPA kongruent, und damit auch die einander entsprechenden Winkel $\angle POB$ und $\angle POA$.

Wäre P nicht in $I(\alpha)$, so wäre $\angle POB < \angle POA$ oder umgekehrt. Das kann nicht sein.

Man kann den Beweis auch mit Hilfe eines gleichschenkligen Dreiecks führen.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nimmt man die Existenz zweier Strahlen der gewünschten Art an und führt dann durch Vergleich aller auftretenden Winkel einen Widerspruch herbei. ■

2.5 Satz (Euklids Proposition 10, „Streckenhalbierung“).

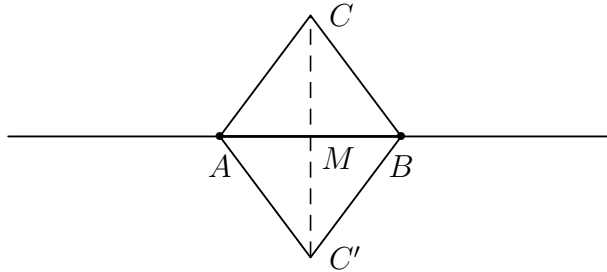
Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau einen Punkt M mit

$$A - M - B \quad \text{und} \quad \overline{AM} \cong \overline{MB}.$$

BEWEIS: Die Eindeutigkeit folgt auch hier sehr einfach durch Streckenvergleiche.

Zum Nachweis der Existenz des Punktes M konstruieren wir auf beiden Seiten von AB gleichseitige (bzw. gleichschenklige) Dreiecke ABC und ABC' . Da C und C' auf verschiedenen Seiten von AB liegen, muss die Verbindungsstrecke $\overline{CC'}$ die Gerade AB in einem Punkt M treffen.

Aus dem Satz von der SSS-Kongruenz folgt, dass $CC'B \cong C'CA$ ist, insbesondere auch $\angle C'CA \cong \angle C'CB$.



Aus dem Satz von der SWS-Kongruenz folgt, dass $AMC \cong MBC$ ist, und insbesondere $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Wäre $M - A - B$, so wäre $\overline{MA} < \overline{MB}$, und genauso führt man die Beziehung $A - B - M$ zum Widerspruch. Also muss $A - M - B$ gelten. ■

2.6 Satz (Euklids Proposition 11, „Senkrechte errichten“).

Ist g eine Gerade und $O \in g$, so kann man auf eindeutige Weise in O die Senkrechte zu g errichten.

BEWEIS: Man konstruiere Punkte $A, B \in g$ mit $A - O - B$ und $\overline{AO} \cong \overline{OB}$. Dann errichte man über $\overline{AB}$ ein gleichseitiges (bzw. gleichschenkliges) Dreieck ABP und setze $h := OP$. Weil $AOP \cong OBP$ ist (SSS), muss auch $\angle AOP \cong \angle BOP$ sein.

Die Eindeutigkeit ergibt sich wie im Beweis der Kongruenz aller rechten Winkel. ■

Definition:

Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und h die Senkrechte zu AB in M , so nennt man h auch die **Mittelsenkrechte** zu $\overline{AB}$.

Mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man leicht zeigen: Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} \mid \overline{AX} \cong \overline{BX}\}.$$

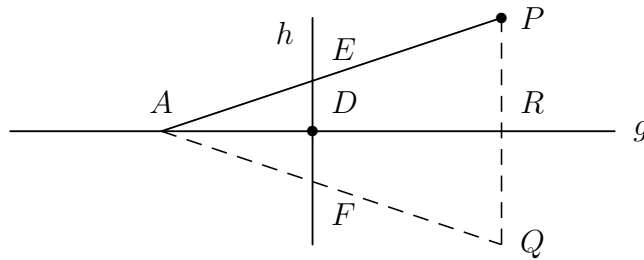
2.7 Satz (Euklids Proposition 12, „Lot fällen“). *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt, so kann man von P aus ein Lot auf g fällen.*

BEWEIS: Hier heißt es aufpassen! Euklid verwendet zum Beweis eine weitere Eigenschaft des Kreises, die er nie gezeigt hat: *Eine Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises schneidet diesen Kreis auf beiden Seiten des Punktes.*

Wir wollen diese Eigenschaft nicht als Axiom fordern, denn sie lässt sich aus dem Kreisaxiom herleiten. Allerdings braucht man dazu die Möglichkeit, ein Lot zu fällen. Also müssen wir für Proposition 12 einen anderen Beweis finden.

Wir wählen einen Punkt D auf g und errichten dort die Senkrechte h zu g . Liegt zufällig P auf h , so sind wir fertig.

Sei also $P \notin h$. Wir wählen einen Punkt $A \in g$, so dass A und P auf verschiedenen Seiten von h liegen. Dann trifft $\overline{AP}$ die Gerade h in einem Punkt E .



Wir suchen den Punkt $F \in h$ mit $E - D - F$ und $\overline{DE} \cong \overline{DF}$. Anschließend verlängern wir $\overline{AF}$ über F hinaus bis zu einem Punkt Q , so dass $\overline{AQ} \cong \overline{AP}$ ist.

Behauptung: PQ ist das gesuchte Lot.

Beweis dafür: Da P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen, schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in einem Punkt R . Da die Dreiecke ADE und ADF kongruent sind (SWS), ist $\angle RAP \cong \angle RAQ$. Daraus folgt, dass auch $\angle ARP \cong \angle ARQ$ ist. Insbesondere ist dann $\angle ARP \cong \angle ARQ$, also PQ senkrecht zu g . ■

Die Aussagen von **Proposition 13 und 14** sind für uns bedeutungslos. **Proposition 15** behandelt die Gleichheit von Scheitelwinkeln, das haben wir schon erledigt.

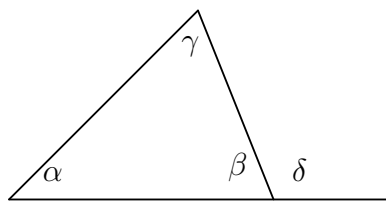
2.8 Satz (Euklids Proposition 16, „Außenwinkelsatz“).

Bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Der BEWEIS kann wie bei Euklid geführt werden, es müssen nur einige Begründungen eingefügt werden.

2.9 Satz (Euklids Proposition 17).

In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte.



BEWEIS: Nach dem Außenwinkelsatz ist $\delta > \alpha$. Trägt man also α neben β an, so ragt der freie Schenkel des angetragenen Winkels ins Innere von δ . In salopper Schreibweise kann man dafür sagen: $\alpha + \beta < \beta + \delta$. Aber $\beta + \delta$ entspricht zwei Rechten.

Bei den anderen Winkeln geht's genauso. ■

2.10 Folgerung. *Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.*

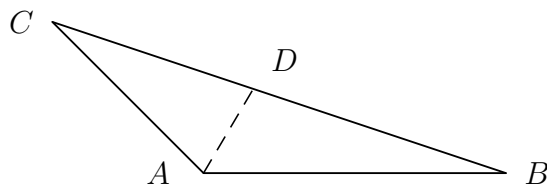
2.11 Folgerung. *Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade, die den Punkt nicht enthält, ist immer eindeutig bestimmt.*

Definition:

Ein **rechtwinkliges Dreieck** ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten nennt man **Katheten**.

2.12 Satz (Euklids Proposition 18). *In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.*

BEWEIS: Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei $C - D - B$, mit $\overline{CD} \cong \overline{CA}$. Nach dem Außenwinkelsatz ist $\angle CDA > \angle CBA$. Aber da CAD gleichschenkelig ist, ist $\angle CAD \cong \angle CDA$. Erst recht ist dann $\angle CAB > \angle CBA$. ■

2.13 Satz (Euklids Proposition 19). *In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel stets die größere Seite gegenüber.*

BEWEIS: Wir betrachten das Dreieck ABC , es sei $\angle CAB > \angle CBA$. Wäre $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zum Basiswinkelsatz. Wäre $\overline{CA} > \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zu Proposition 18. ■

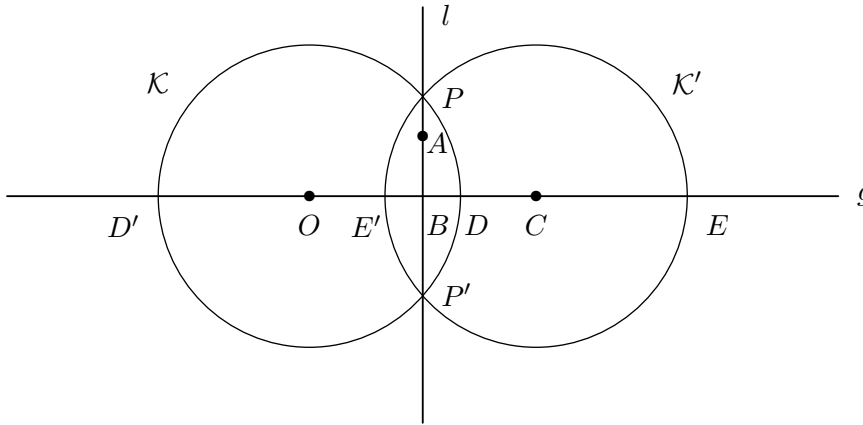
2.14 Folgerung. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse stets die größte Seite.*

Jetzt können wir den Satz über das Schnittverhalten von Kreis und Gerade beweisen, den Euklid schon beim Beweis der Existenz eines Lotes benötigt hatte:

2.15 Satz. *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis um den Punkt O , A ein Punkt im Innern von $\mathcal{K}$ und l eine Gerade durch A . Dann schneidet l den Kreis in zwei Punkten (auf verschiedenen Seiten von A).*

BEWEIS: Die Aussage ist trivial, wenn O auf l liegt. Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass $O \notin l$ ist. Dann sei g das Lot von O auf l mit Fußpunkt B . Weiter sei C der Punkt auf g mit $O - B - C$ und $\overline{OB} \cong \overline{BC}$, so dass l die Mittelsenkrechte zu $\overline{OC}$ ist. Da das Dreieck OBA bei B rechtwinklig ist, ist $\overline{OB} < \overline{OA}$ und damit kleiner als der Radius von $\mathcal{K}$, also B im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ gelegen.

Die Gerade g schneidet $\mathcal{K}$ in zwei Punkten D und D' , es gelte $D' - O - D$ und $D \in \overrightarrow{OB}$. Wählen wir $E \in \overrightarrow{OB}$ mit $B - C - E$ und $\overline{CE} \cong \overline{OD}$, so liegt E auf dem Kreis $\mathcal{K}'$ um C mit Radius $\overline{OD}$. Wegen $O - C - E$ ist $\overline{OE} > \overline{CE} \cong \overline{OD}$, also E im Äußeren von $\mathcal{K}$ gelegen.



Der Kreis $\mathcal{K}'$ schneidet g in E und in einem Punkt E' , mit $E' - C - E$. Wegen $\overline{BC} \cong \overline{OB} < \overline{OD} = \overline{E'C}$ ist $E' - B - C$.

Es gibt zwei Möglichkeiten. Ist $O - E' - B$, so ist $\overline{E'O} < \overline{OB} < \overline{OD}$. Ist $E' - O - B$, so ist $\overline{E'O} < \overline{E'B} < \overline{E'C} \cong \overline{OD}$. In beiden Fällen folgt, dass E' im Innern von $\mathcal{K}$ liegt.

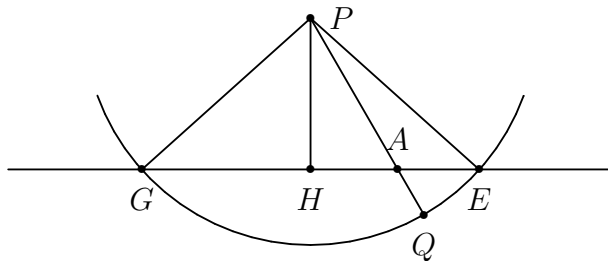
Aus dem Kreisaxiom folgt nun, dass sich $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ auf beiden Seiten von g je in einem Punkt treffen. Sei P der Schnittpunkt, der auf der gleichen Seite von g wie A liegt. Dann ist $\overline{OP} \cong \overline{CP}$. Außerdem ist $\overline{OB} \cong \overline{BC}$. Nach dem SSS-Kongruenzsatz ist dann $\triangle OBP \cong \triangle BCP$, also $\angle OBP \cong \angle CBP$. Da es sich um Nebenwinkel handelt, sind sie rechte Winkel, und das bedeutet, dass $BP \perp l$ ist, also $P \in l$.

Der Punkt P' mit $P - B - P'$ und $\overline{PB} \cong \overline{BP'}$ ist offensichtlich der zweite Schnittpunkt der Kreise (denn aus Symmetriegründen sind auch die Strecken $\overline{OP'} \cong \overline{CP'}$ jeweils Radien), und auch er liegt auf l . Somit ist $l \cap \mathcal{K} \supset \{P, P'\}$, mit $P - A - P'$.

Einen weiteren Schnittpunkt S kann es nicht geben, denn dann würde man ein gleichschenkliges Dreieck OPS mit ungleichen Basiswinkeln erhalten. ■

Mit dem gerade bewiesenen Satz kann man Euklids Konstruktion des Lots von einem Punkt P auf eine Gerade g nachvollziehen:

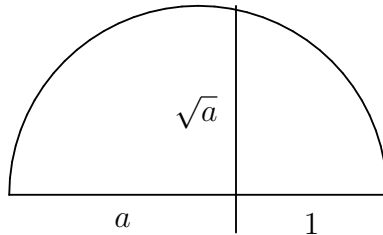
Man wähle einen Punkt Q auf der anderen Seite von g . Die Strecke $\overline{PQ}$ trifft g in einem Punkt A , der dann im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ um P mit Radius $\overline{PQ}$ liegt. Also schneidet $\mathcal{K}$ die Gerade g in zwei Punkten E und G mit $G - A - E$. Sei H der Mittelpunkt der Strecke $\overline{GE}$. Mit der SSS-Kongruenz erhält man, dass HP das gesuchte Lot ist.



Wir können nun auch beweisen, dass das Kreis-Axiom im pythagoräischen Modell $\mathcal{M}_5$ nicht erfüllt ist!

Sei a irgendeine pythagoräische Zahl. Dann liegen die Punkte $O := (0, 0)$, $P := (a, 0)$ und $Q := (a + 1, 0)$ in der pythagoräischen Ebene $\mathcal{E}_p = \text{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \text{Pyth}(\mathbb{Q})$. Da die Bewegungen in diesem Modell zugleich isometrische Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ auf sich sind, kann man sagen: Zwei Strecken sind genau dann kongruent, wenn sie die gleiche euklidische Länge haben. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OQ}$ ist also der Punkt $M := (\frac{a+1}{2}, 0)$, und der Kreis um M mit Radius $\overline{OM}$ ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{(x, y) \in \mathcal{E}_p \mid (x - \frac{a+1}{2})^2 + y^2 = (\frac{a+1}{2})^2\}.$$



Schneidet man $\mathcal{K}$ mit der Geraden $g := \{(x, y) \in \mathcal{E}_p \mid x = a\}$, so erhält man Punkte (x, y) mit $x = a$ und $y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = a$, also $X_{\pm} := (a, \pm\sqrt{a})$. Nach dem Kreisaxiom wäre jeder solche Punkt konstruierbar, aber im Falle $a = 2(\sqrt{2} - 1)$ haben wir schon gesehen, dass $\sqrt{a}$ nicht pythagoräisch ist.

Nun ist auch halbwegs klar, wie wir den Mangel beheben können:

Definition:

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt **platonisch**, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit $\alpha_i \in K_{i-1}$ und $\alpha_i > 0$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine platonische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{}$ anwendet.

Mit $\text{Plat}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller platonischen Zahlen.

Ein Modell $\mathcal{M}_6$ gewinnen wir, indem wir als Ebene die kartesische Ebene der platonischen Zahlen benutzen: $\mathcal{E} := \text{Plat}(\mathbb{Q}) \times \text{Plat}(\mathbb{Q})$. Es ist klar, dass auch hier die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome gelten. Und da mit jeder positiven platonischen Zahl auch deren Wurzel wieder platonisch ist, sind die Schnittpunkte von Kreisen immer konstruierbar, d.h., es gilt das Kreisaxiom.

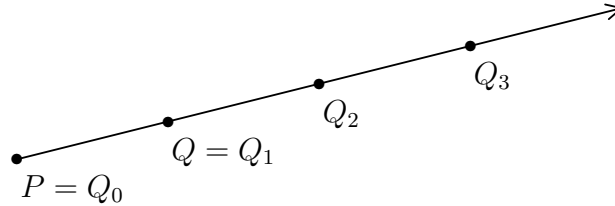
Die Platonische Ebene ist das Modell für die Geometrie, in der alle Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Und das ist die Geometrie, die Euklid betrieben hat. In dieser Ebene gibt es noch viele Lücken, insbesondere ist die Zahl π keine platonische Zahl. Deshalb konnte den Alten auch die Quadratur des Kreises nicht gelingen.

2.3 Das Axiom von Archimedes

3.1 Satz. Zu zwei Punkten $P \neq Q$ und einer natürlichen Zahl n kann man stets Punkte $Q_0, Q_1, \dots, Q_n \in \overrightarrow{PQ}$ finden, so dass gilt:

1. $Q_0 = P$, $Q_1 = Q$ und $\overline{Q_i Q_{i+1}} \cong \overline{PQ}$ für $i = 1, \dots, n-1$.
2. $Q_{i-1} - Q_i - Q_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$.

Der BEWEIS ist trivial.



Definition:

In der Situation des obigen Satzes sagt man: Der Punkt Q_n wird durch n -maliges Antragen der Strecke $\overline{PQ}$ erreicht. An Stelle der Strecke $\overline{Q_0 Q_n}$ schreibt man auch $n \cdot \overline{PQ}$.

Ist zu der Strecke $\overline{PQ}$ noch eine weitere Strecke $\overline{AB} > \overline{PQ}$ gegeben, so erwartet man, dass $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$ ist, wenn man nur n groß genug wählt. Eigenartigerweise lässt sich das aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen. Man muss es fordern:

S-2) Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

Man nennt die Axiome S-1 und S-2 auch die *Stetigkeitsaxiome*, aus Gründen, die weiter unten erläutert werden.

Das Axiom S-2 taucht bei Euklid nicht explizit auf. In der Proportionenlehre betrachtet er allerdings nur Verhältnisse von solchen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$, die das Archimedes-Axiom erfüllen.

In der platonischen Ebene gilt S-2, so einfach ist die Frage nach der Unabhängigkeit also nicht zu entscheiden. Aber es gibt sogenannte *nicht-archimedische Körper* mit „unendlich kleinen“ und „unendlich großen“ Elementen, und in der mit Hilfe eines solchen Körpers modellierten Ebene gelten in gewissen Fällen alle bisherigen Axiome der Geometrie, nur nicht S-2.

Sei $\mathbb{R}(t) := \{f/g : f, g \text{ Polynome, } g \neq 0\}$ der Körper der „rationalen Funktionen“. Die Elemente von $P := \{R \in \mathbb{R}(t) : \exists c \in \mathbb{R}, \text{ so dass } R(t) > 0 \text{ für } t > c \text{ ist}\}$ nennen wir *positiv*. Damit wird $\mathbb{R}(t)$ zu einem angeordneten Körper, d.h.:

- Ist $f \in \mathbb{R}(t)$, so ist entweder $f = 0$ oder $f > 0$ oder $f < 0$.

- Sind $f, g \in \mathbb{R}(t)$, $f > 0$ und $g > 0$, so ist auch $f + g > 0$ und $f \cdot g > 0$.

Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch angeordnet*, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit $n > x$ gibt. Im Fall $K = \mathbb{R}(t)$ gilt: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $f_n(t) := t - n$ positiv (denn für $t > n$ ist $f_n(t) > 0$). Weil $f_n(t) = f_0(t) - n$ mit $f_0(t) := t$ ist, folgt: $f_0(t) > n$ für **jede** natürliche Zahl n . Der Körper $\mathbb{R}(t)$ ist nicht archimedisch angeordnet. Elemente wie f_0 kann man „unendlich groß“ nennen, denn es ist $f_0 > c$ für jede reelle Zahl c . Umgekehrt kann man das Element $1/f_0$ als „unendlich klein“ bezeichnen, weil es positiv und dabei kleiner als jede positive reelle Zahl ist.

Das Problem ist, dass man in $\mathbb{R}(t)$ nicht so ohne weiteres Wurzeln ziehen kann. Dazu müssen wir den Körper erweitern, und das ist nicht ganz so einfach.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge der stetigen Funktionen, die auf einem Intervall (c, ∞) definiert sind und entweder $\equiv 0$ oder ohne Nullstellen sind. Zwei solche Funktionen $f_1 : (c_1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : (c_2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sollen äquivalent heißen, falls ein $c \geq \max(c_1, c_2)$ existiert, so dass $f_1 = f_2$ auf (c, ∞) ist. Es ist offensichtlich, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{C}$ mit $\langle f \rangle$ und die Menge aller Äquivalenzklassen mit $\widehat{\mathcal{C}}$. Man beachte, dass diese Menge weit davon entfernt ist, ein Körper zu sein! Schon die Summe zweier Klassen kann nicht immer gebildet werden (die Funktionen $f_1(t) := 2$ und $f_2(t) := 2 + \sin t$ liegen in $\mathcal{C}$, nicht aber $f_2 - f_1$).

Wir nennen eine Klasse $\langle f \rangle$ *positiv*, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(t) > 0$ für $t > c$ ist. Positive Klassen können addiert und multipliziert werden, das Ergebnis ist wieder positiv. Ist $\langle f \rangle \neq 0$ (und damit $f(t) \neq 0$ für genügend großes t), so ist $\langle f \rangle$ positiv oder $-\langle f \rangle$ positiv.

Nun definieren wir $j : \mathbb{R}(t) \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ durch $j(R) := \langle R|_{(c, \infty)} \rangle$, wobei c so zu wählen ist, dass $R(t)$ definiert und $R(t) \neq 0$ für $t > c$ ist. Die Abbildung ist wohldefiniert, denn das Ergebnis hängt nicht von der Wahl von c ab. Ist R positiv, so ist auch $j(R)$ positiv. Weiter ist $j(R_1 + R_2) = j(R_1) + j(R_2)$ und $j(R_1 \cdot R_2) = j(R_1) \cdot j(R_2)$. Die Summen und Produkte auf der rechten Seite können gebildet werden, denn zu jeder rationalen Funktion $R \neq 0$ gibt es ein c , so dass $R(t)$ definiert und $R(t) \neq 0$ für $t > c$ ist. Schließlich ist j injektiv: Ist $j(R_1) = j(R_2)$, so gibt es ein c , so dass $R_1(t) = R_2(t)$ für $t > c$ ist. Dann ist $R_1 - R_2$ eine rationale Funktion, die für $t > c$ verschwindet. Das ist nur möglich, wenn $R_1 = R_2$ ist.

Wir können also $\mathbb{R}(t)$ als Teilmenge von $\widehat{\mathcal{C}}$ auffassen.

3.2 Satz. Sei $K \subset \widehat{\mathcal{C}}$ ein Körper, der $\mathbb{R}(t)$ umfasst, sowie $\alpha \in K$ ein positives Element, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$. Dann ist

$$K' := K(\sqrt{\alpha}) = \{a + b\sqrt{\alpha} : a, b \in K\}$$

ein Körper, der K umfasst und seinerseits in $\widehat{\mathcal{C}}$ liegt.

BEWEIS: 1) Seien $f, g, h \in \mathcal{C}$, $a = \langle f \rangle$, $b = \langle g \rangle$ und $\alpha = \langle h \rangle$. Alle drei Funktionen seien auf (c, ∞) definiert, stetig und ohne Nullstellen. Außerdem sei

$h > 0$. Dann ist auch $F := f + g\sqrt{h}$ eine stetige Funktion auf (c, ∞) . Wir nehmen an, es gibt eine unbeschränkte Folge (t_ν) mit $F(t_\nu) = 0$. Dann ist $f(t_\nu)^2 = g(t_\nu)^2 \cdot h(t_\nu)$ für alle ν . Aber $f^2 - g^2h$ ist ein Element von K und damit eine stetige Funktion, die für großes t keine Nullstelle mehr besitzt. Das ist ein Widerspruch. Also liegt F in $\mathcal{C}$ und K' in $\widehat{\mathcal{C}}$.

2) Summe und Produkt zweier Elemente von K' können gebildet werden und liegen wieder in K' . Die Existenz des Inversen folgt wie bei der Konstruktion der pythagoräischen Zahlen, und genau wie dort ergibt sich, dass K' ein Körper ist. ■

Definition:

Es sei $\Omega(t)$ die Menge aller Elemente $x \in \widehat{\mathcal{C}}$, zu denen es eine (von x abhängige) Folge von Körpererweiterungen

$$\mathbb{R}(t) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit positivem $\alpha_i \in K_{i-1}$ (und $\sqrt{\alpha_i} \notin K_{i-1}$) gibt, so dass x in K_n liegt.

Wir nennen $\Omega(t)$ den Körper der **nichtarchimedischen Zahlen**.

$\Omega(t)$ enthält $\mathbb{R}$ und alle natürlichen Zahlen, die – aufgefasst als Äquivalenzklassen konstanter Funktionen – auch in $\mathcal{C}$ liegen. Aber in $\Omega(t)$ ist das Archimedische Axiom nicht erfüllt.

Als Modell $\mathcal{M}_7$ führen wir nun die Ebene $\Omega(t) \times \Omega(t)$ ein, die Geraden werden wie üblich definiert. In diesem Modell sind alle Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt, sowie das Kreisaxiom. Alle bisher bewiesenen Sätze gelten, aber nicht das Axiom S-2. Damit ist dieses unabhängig von den vorherigen Axiomen.

An entscheidender Stelle werden wir das Archimedische Axiom später in der Neutralen Geometrie verwenden. Hier wollen wir es aber schon einmal zur Einführung des Längenbegriffs benutzen.

Bisher haben wir ja völlig auf das Messen von Strecken und Winkeln verzichtet und uns dafür manche Unbequemlichkeit eingehandelt. Jetzt werden wir sehen, wie sich aus den vorhandenen Axiomen ein Maßbegriff ableiten lässt.

Die Kongruenz von Strecken liefert ja eine Äquivalenzrelation. Die allen Elementen einer Äquivalenzklasse gemeinsame Eigenschaft ist das, was wir uns anschaulich unter einer „Länge“ vorstellen. Deshalb wollen wir eine solche Äquivalenzklasse auch als *Länge* bezeichnen. Λ sei die Menge aller Längen.

Die Äquivalenzklasse einer Strecke $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit $[AB]$. Ist $\overline{CD}$ eine weitere Strecke, so kann man einen Punkt E mit $A - B - E$ finden, so dass $[BE] = [CD]$

ist. Wir schreiben dann:

$$[AE] = [AB] + [CD].$$

Man überlegt sich leicht, dass diese Definition unabhängig von den Repräsentanten ist. Und offensichtlich ist diese Addition auf Λ auch kommutativ und assoziativ. Also ist Λ eine kommutative Halbgruppe. Weiter gibt es zwischen den Elementen von Λ eine $<$ -Beziehung mit folgenden Eigenschaften:

1. Für je zwei Elemente $a, b \in \Lambda$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.
2. Ist $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$.
3. Ist $a < b$, so ist auch $a + c < b + c$, für jedes $c \in \Lambda$.

Wir sagen dann: Λ ist eine *angeordnete kommutative Halbgruppe*.

Definition:

Eine **Längenfunktion** ist eine Funktion $\lambda : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b)$.
2. Es gibt ein $e \in \Lambda$ mit $\lambda(e) = 1$.

Jede Strecke $\overline{AB}$ mit $\lambda([AB]) = 1$ wird als **Einheitsstrecke** (bezüglich λ) bezeichnet.

3.3 Satz. Ist λ eine Längenfunktion, so gilt:

1. Ist $a < b$, so ist auch $\lambda(a) < \lambda(b)$.
2. Ist (a_n) eine Folge von Längen, die man derart durch Strecken $\overline{AB_n}$ repräsentieren kann, dass B_{n+1} jeweils der Mittelpunkt von $\overline{AB_n}$ ist, so ist

$$\lambda(a_{n+1}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(a_n) = 0.$$

3. Die Einheitslänge e ist eindeutig bestimmt, d.h. je zwei Einheitsstrecken für λ sind zueinander kongruent.

BEWEIS:

1) Seien $a, b \in \Lambda$ mit $a < b$. Dann gibt es ein c mit $a + c = b$, also $\lambda(a) + \lambda(c) = \lambda(b)$. Da $\lambda(c) > 0$ ist, ist $\lambda(a) < \lambda(b)$.

2) Es ist $a_{n+1} + a_{n+1} = a_n$. Daraus folgt: $2 \cdot \lambda(a_{n+1}) = \lambda(a_n)$, oder $\lambda(a_{n+1}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n)$.

Sukzessive folgt: $\lambda(a_n) = \frac{1}{2^{n-1}}\lambda(a_1)$, und im Grenzwert strebt $\lambda(a_n)$ gegen 0.

3) Seien e, e' zwei Längen mit $\lambda(e) = \lambda(e') = 1$. Wäre $e \neq e'$, etwa $e < e'$, so müsste $\lambda(e) < \lambda(e')$ sein. ■

Eine Längenfunktion ist also ein Homomorphismus $\lambda : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$ zwischen angeordneten Halbgruppen.

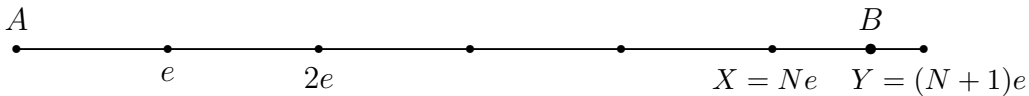
3.4 Satz. *Zu jeder beliebigen Strecke $\overline{PQ}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Längenfunktion λ , so dass $\overline{PQ}$ eine Einheitsstrecke für λ ist.*

BEWEIS: (Idee) Sei $a \in \Lambda$ eine Länge, repräsentiert durch eine Strecke $\overline{AB}$, sowie e die Länge von $\overline{PQ}$.

Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass entweder $N \cdot e = a$ oder $N \cdot e < a < (N + 1) \cdot e$.

Im ersten Fall setzen wir $\lambda(a) := N$ und sind fertig.

Im zweiten Fall können wir annehmen, dass es Punkte X, Y auf $\overrightarrow{AB}$ mit $A - X - B$ und $X - B - Y$ gibt, so dass $\lambda([AX]) = N$ und $\lambda([AY]) = N + 1$ ist.



Dann wird sukzessive die Strecke $\overline{XY}$ halbiert. Liegt B beim i -ten Schritt genau auf dem oder rechts vom Mittelpunkt, setzen wir $\varepsilon_i := 1$ und machen mit dem rechten Teilintervall weiter, andernfalls setzen wir $\varepsilon_i := 0$ und machen mit dem linken Teilintervall weiter.

Endet das Verfahren nach n Schritten (so dass der linke Randpunkt des n -ten Teilintervalls = B ist), so setzen wir $\lambda(a) := N + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ und sind fertig.

Andernfalls setzen wir

$$\lambda(a) = N + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}.$$

Da es nicht passieren kann, dass $\varepsilon_n = 1$ für alle $n \geq 1$ gilt, und da alle ε_n in $\{0, 1\}$ liegen, folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 1.$$

Die Reihe ist konvergent und hat einen Wert < 1 .

Die Additivität von λ kann man nachrechnen, ebenso die Monotonie. ■

Im Modell $\mathcal{M}_6$ liegt es nahe, $\overline{OE}$ mit $O := (0, 0)$ und $E := (1, 0)$ als Einheitsstrecke zu wählen. Die dazu konstruierte Längenfunktion liefert die gewöhnliche euklidische Länge. Natürlich erhält man nur Zahlen, die in $\text{Plat}(\mathbb{Q})$ liegen.

Die Messung von Winkeln ist etwas schwieriger, aber ebenfalls machbar. Im platonischen System muss man eventuell in Kauf nehmen, dass das Maß eines Winkels nicht mehr notwendig eine platonische Zahl ist.

In der modernen Literatur wird an Stelle der Stetigkeitsaxiome S-1 und S-2 meist ein anderes Axiom benutzt.

Das Dedekind-Axiom (S): Die Menge der Punkte einer Geraden g sei in zwei nicht-leere Teilmengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zerlegt, so dass kein Punkt von $\mathcal{M}$ zwischen zwei Punkten von $\mathcal{N}$ und kein Punkt von $\mathcal{N}$ zwischen zwei Punkten von $\mathcal{M}$ liegt.

Dann gibt es genau einen Punkt $Z \in g$, so dass für $X \in \mathcal{M}$ und $Y \in \mathcal{N}$ gilt: Entweder ist $Z = X$ oder $Z = Y$ oder es gilt $X - Z - Y$.

Die Dedekind-Eigenschaft sorgt dafür, dass jede positive reelle Zahl als Streckenlänge und vorkommt. Also ist das Axiom S von den bisherigen Axiomen unabhängig. Ein passendes Modell ist die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$. Man kann die Axiome (S-1) und (S-2) ohne große Mühe aus (S) herleiten.

Für Euklid und seine Zirkel-und-Lineal-Geometrie reichen die Axiome (S-1) und (S-2) aus. Das Dedekind-Axiom (S) ist eng mit den reellen Zahlen verknüpft und passt eigentlich überhaupt nicht in die Antike Welt, es gehört in die Mathematik nach Cantor, in der mengentheoretische Begriffsbildungen keine Probleme mehr bereiten. Wir wollen hier vorerst noch beim Standpunkt Euklids bleiben und das Dedekind-Axiom erst benutzen, wenn dies unumgänglich ist.

Erwähnt werden soll noch das von Hilbert benutzte „Cantor-Axiom“, das - zusammen mit dem Archimedes-Axiom – äquivalent zum Dedekind-Axiom ist:

Das Cantor-Axiom (C): Es sei eine Gerade g und eine Folge von Strecken $s_i = \overline{A_i B_i} \subset g$ gegeben, so dass $s_{i+1} \subset s_i$ und zu jeder Strecke $\overline{PQ}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{A_n B_n} \subset \overline{PQ}$ existiert. Dann gibt es einen Punkt $X \in g$ mit $X \in s_i$ für alle i .

Wir haben jetzt alle Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms kennengelernt.

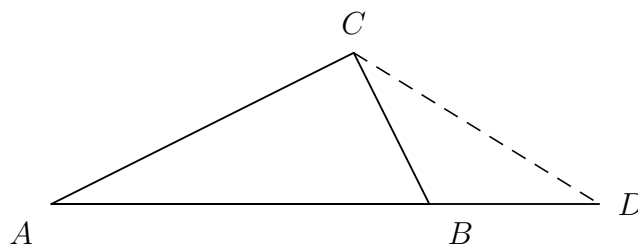
2.4 Neutrale Geometrie und Parallelenaxiom

Unter der „neutralen Geometrie“ versteht man die Sammlung aller Resultate, die ohne Parallelenaxiom bewiesen werden können. Wir vervollständigen unseren Vorrat hier durch einige weitere Sätze und gehen dann zur „euklidischen Geometrie“ über, die das Parallelenaxiom benutzt.

4.1 Satz (Euklids Proposition 20, „Dreiecks-Ungleichung“).

In einem Dreieck sind zwei beliebige Seiten zusammen größer als die dritte Seite.

BEWEIS: Wir wollen zeigen, dass im Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei D mit $A - B - D$ so gewählt, dass $\overline{BD} \cong \overline{BC}$ ist. Im Dreieck ADC ist $\angle ACD > \angle BCD \cong \angle ADC$, also $\overline{AD} > \overline{AC}$. (gegenüberliegende Seiten) Es ist aber $\overline{AD}$ so lang, wie $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ zusammen genommen. ■

Wir können in der Ebene $\mathcal{E}$ eine *Metrik* einführen, indem wir zunächst eine Längenfunktion λ wählen und dann $d(X, Y) := \lambda([XY])$ setzen.

Für drei nicht-kollineare Punkte X, Y, Z ist dann $d(X, Z) < d(X, Y) + d(Y, Z)$. Gilt hingegen $X - Y - Z$, so ist $d(X, Z) = d(X, Y) + d(Y, Z)$. Und wenn X, Y, Z in anderer Reihenfolge auf einer Geraden liegen, so gilt zumindest noch die Ungleichung. Zusammen ergibt das für beliebige Punkte X, Y, Z :

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z).$$

Das ist die „Dreiecks-Ungleichung“, die in beliebigen metrischen Räumen gilt und insbesondere in $\mathbb{R}$ die Gestalt $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$ annimmt. Setzt man $a := y - x$ und $b := z - y$, so ist $a + b = z - x$, und daher

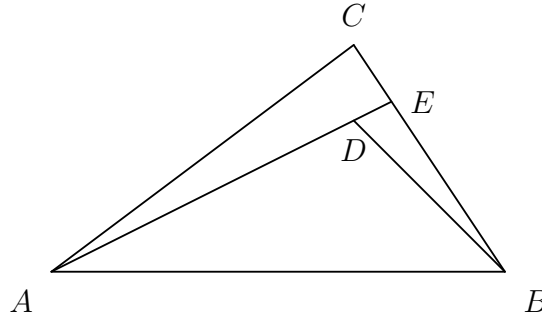
$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

4.2 Satz (Euklids Proposition 21).

Sei D im Innern des Dreiecks ABC . Dann gilt:

1. $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AD} + \overline{BD}$.
2. $\angle ACB < \angle ADB$.

BEWEIS:



Verlängert man $\overline{AD}$ über D hinaus, so erreicht man einen Punkt E auf der Seite $\overline{BC}$.

Wir verwenden zweimal die Dreiecks-Ungleichung: Im Dreieck AEC ist $\overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AE}$, und daher ist

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{BE} + \overline{EC} > \overline{AE} + \overline{EB}.$$

Im Dreieck DBE ist $\overline{BE} + \overline{ED} > \overline{DB}$. Daraus folgt:

$$\overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{BE} > \overline{AD} + \overline{BD}.$$

Zusammen ist dann $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AD} + \overline{DB}$.

Für den Winkelvergleich benutzen wir den Außenwinkelsatz: Beim Dreieck DBE ist $\angle ADB > \angle AEB$. Beim Dreieck AEC ist $\angle AEB > \angle ACB$.

Insgesamt ist also $\angle ADB > \angle ACB$. ■

4.3 Satz (Euklids Proposition 22).

Sind drei Strecken a, b, c mit $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$ gegeben, so kann man ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruieren.

BEWEIS: Es sei $\overline{AB} = c$. Man kann die Strecke über A hinaus um b bis zu einem Punkt X und über B hinaus um a bis zu einem Punkt Y verlängern. Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius b und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius a .

$\mathcal{K}_2$ trifft AB in zwei Punkten Y und Y' , mit $Y' - B - Y$. Da $\overline{AB} + \overline{BY} > b$ ist, liegt Y im Äußeren von $\mathcal{K}_1$.

Zur Lage von Y' unterscheiden wir mehrere Fälle: Ist $Y' = A$, so liegt Y' auf jeden Fall im Inneren von $\mathcal{K}_1$. Ist $A - Y' - B$, so folgt aus $a + b > c$, dass $\overline{AY'} < b$ ist. Ist $Y' - A - B$, so folgt aus $b + c > a$, dass $\overline{Y'B} < \overline{XB}$ ist, also $\overline{Y'A} < \overline{XA} = b$. Jedesmal zeigt sich, dass Y' im Innern von $\mathcal{K}_1$ liegt.

Aus dem Kreisaxiom folgt, dass sich $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ in einem Punkt C treffen, und ABC ist das gesuchte Dreieck. ■

Der SSS-Kongruenzsatz wurde schon früher gezeigt (Proposition 8), die Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist nur mit Hilfe des Kreisaxioms möglich.

In **Proposition 23** zeigt Euklid, dass man Winkel antragen kann. Das haben wir zumindest theoretisch schon im Rahmen der Bewegungsaxiome erledigt. Die praktische Ausführung benutzt Proposition 22. Der gegebene Winkel wird zu einem Dreieck ergänzt, und die Seiten werden so angetragen, dass man daraus das Dreieck (und damit der Winkel) an gewünschter Stelle konstruieren kann.

4.4 Satz (Euklids Proposition 24 und 25).

Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

Dann ist $\angle ACB > \angle A'C'B' \iff \overline{AB} > \overline{A'B'}$.

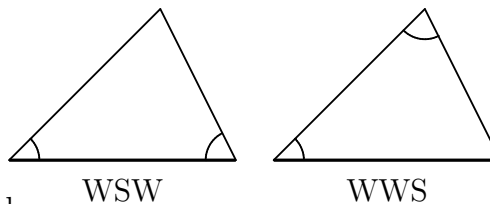
Auf den BEWEIS verzichten wir hier.

4.5 Satz (Euklids Proposition 26, WSW- und WWS-Kongruenz).

Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben.

Entweder sei $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ und $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$,
oder es sei $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ und $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

In jedem Fall sind die beiden Dreiecke kongruent.



Auch hier wollen wir den BEWEIS weglassen.

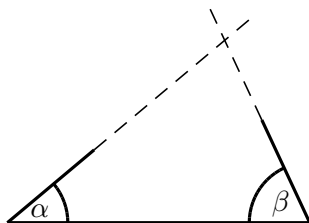
Die Kongruenzsätze bleiben natürlich richtig, wenn man die Bezeichnungen vertauscht. Welche Möglichkeit, drei Größen vorzugeben, haben wir jetzt noch nicht betrachtet?

Der Fall SSW: Sind zwei Seiten und ein nicht von den Seiten eingeschlossener Winkel gegeben, so ist das Dreieck i.a. noch nicht eindeutig bestimmt (Ausnahme: das Dreieck enthält einen rechten Winkel), es gibt zwei Möglichkeiten. Merkwürdigerweise taucht ein entsprechender Satz bei Euklid nicht auf.

Der Fall WWW: Aus der Schulgeometrie ist bekannt, dass ein Dreieck durch seine drei Winkel nicht festgelegt ist. Dabei wird allerdings das Parallelen-Axiom benutzt. Es steht also zu vermuten, dass aus unseren bisher eingeführten Axiomen ein WWW-Kongruenzsatz nicht hergeleitet werden kann. Diese Frage werden wir später noch einmal untersuchen.

Offen ist auch noch die Frage der Konstruierbarkeit! Ist SWS gegeben, so trivialerweise auch das zugehörige Dreieck. Aus SSS kann ein Dreieck konstruiert werden,

wenn die gegebenen Seiten gewisse Ungleichungen erfüllen (vgl. Proposition 22). Aber wie sieht es mit WSW aus?



In einem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte. Ein Konstruktionssatz zur WSW-Kongruenz müsste demnach lauten:

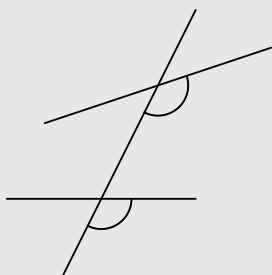
Sind eine Strecke c und zwei anliegende Winkel α und β mit $\alpha + \beta < 2R$ gegeben, so kann man daraus ein Dreieck konstruieren.

Um den fehlenden dritten Punkt des Dreiecks zu erhalten, muss man lediglich den Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel aufsuchen. Doch woher weiß man, dass ein solcher Schnittpunkt existiert? Man weiß es eben nicht! Genau hierfür braucht man Euklids Postulat V. Das sichert die Existenz des Schnittpunktes (unter den gegebenen Bedingungen) und damit die Konstruierbarkeit des Dreiecks. Im Fall WWS treten übrigens die gleichen Probleme auf.

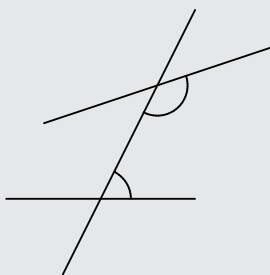
Tatsächlich beginnt Euklid mit Proposition 27 seine Theorie der Parallelen, und in Proposition 29 benutzt er zum ersten Mal sein Postulat V.

Definition:

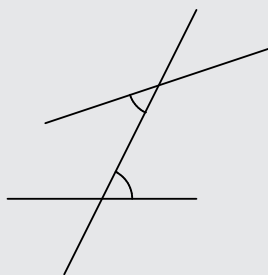
Die Gerade h werde von zwei verschiedenen Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten. Dabei entstehen 8 Winkel, die man **Stufenwinkeln (F-Winkel)**, **Ergänzungswinkel (E-Winkel)** und **Wechselwinkel (Z-Winkel)** nennt.



F-Winkel



E-Winkel



Z-Winkel

Wir sagen, in der gegebenen Situation gilt

- eine Bedingung (F), falls zwei Stufenwinkel gleich sind,
- eine Bedingung (E), falls zwei Ergänzungswinkel zus. zwei Rechte ergeben,
- eine Bedingung (Z), falls zwei Wechselwinkel gleich sind.

4.6 Lemma.

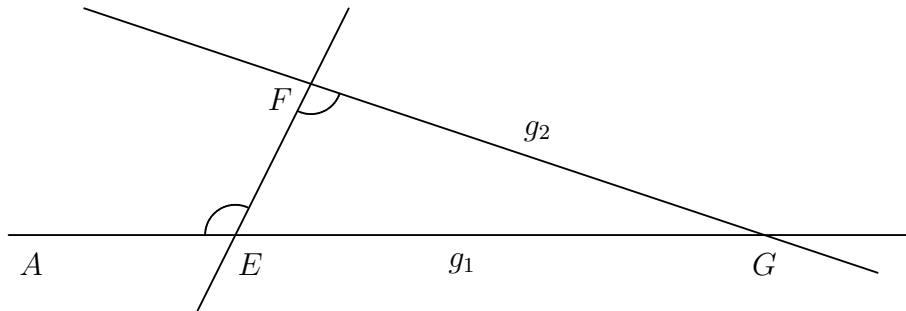
Gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so gelten auch alle anderen.

BEWEIS: Einfache Übungsaufgabe. ■

4.7 Satz (Euklids Proposition 27 und 28).

Wird die Gerade h von zwei Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen und gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so sind g_1 und g_2 parallel.

BEWEIS: Es seien E und F die Schnittpunkte von h mit g_1 bzw. g_2 . Wir nehmen an, g_1 und g_2 seien nicht parallel. Dann müssen sie sich auf einer Seite von h treffen, G sei der Schnittpunkt. Wir wählen noch einen Punkt A auf g_1 mit $A - E - G$.

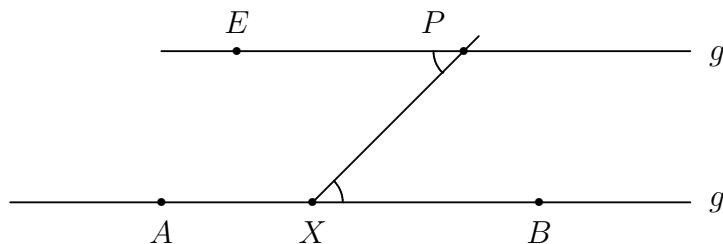


Nach dem Lemma können wir voraussetzen, dass die Wechselwinkel $\angle AEF$ und $\angle EFG$ gleich sind. Aber $\angle AEF$ ist Außenwinkel zum Dreieck EGF , und $\angle EFG$ ein nicht anliegender Innenwinkel. Das ist ein Widerspruch! ■

4.8 Satz (Euklids Proposition 31).

Ist eine Gerade g und ein nicht auf g gelegener Punkt P gegeben, so kann man durch P eine Gerade g' ziehen, die parallel zu g ist.

BEWEIS: Wir wählen auf g drei verschiedene Punkte A, X, B mit $A - X - B$. An die Strecke $\overline{XP}$ tragen wir bei P einen Winkel $\angle XPE \cong \angle BXP$ an und setzen $g' := EP$.



Die Geraden g, g' treffen dann $h := XP$ in zwei verschiedenen Punkten und haben gleiche Wechselwinkel. Nach dem vorigen Satz müssen sie parallel sein. ■

Man beachte: Der Beweis liefert ein Konstruktionsverfahren, aber nicht die Eindeutigkeit der Parallelen zu g durch P . Es kann nicht – wie in der sphärischen Geometrie – passieren, dass eine Gerade überhaupt keine Parallele besitzt. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass durch P mehrere Parallelen zu g gezogen werden können.

Das Euklidische Parallelenaxiom:

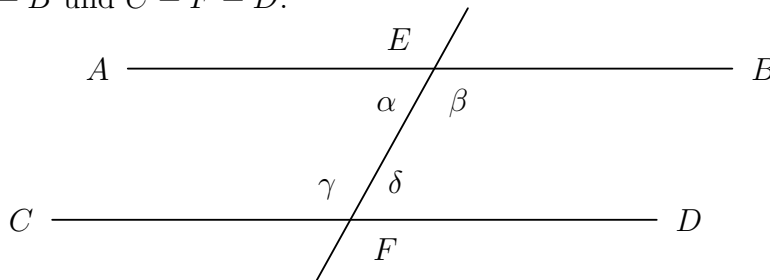
E-P) Wenn eine Gerade h von zwei verschiedenen Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen wird und dabei auf einer Seite von h Ergänzungswinkel entstehen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h .

Wie oben schon bemerkt, ist es nun möglich, ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

4.9 Satz (Euklids Proposition 29).

Trifft eine Gerade zwei verschiedene Parallelen, so gelten die Bedingungen (F), (E) und (Z).

BEWEIS: Die Schnittpunkte der Geraden h mit den Parallelen g_1, g_2 seien mit E und F bezeichnet. Außerdem seien Punkte $A, B \in g_1$ und $C, D \in g_2$ gewählt, mit $A - E - B$ und $C - F - D$.



Es genügt zu zeigen, dass $\alpha \hat{=} \delta$ ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall, es wäre etwa $\alpha > \delta$.

Dann ist $\delta + \beta < \alpha + \beta$, und letztere ergeben als Nebenwinkel zusammen zwei Rechte. Also sind die Voraussetzungen des Parallelenaxioms erfüllt, $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$ müssen sich auf der Seite von h , auf der B und D liegen, treffen. Das ist ein Widerspruch zur Parallelität. ■

Dies ist in der Tat der erste Satz bei Euklid, der mit Hilfe des Parallelenaxioms bewiesen wird.

4.10 Satz (Euklids Proposition 30).

Sind zwei Geraden parallel zu einer dritten Geraden, so sind sie auch untereinander parallel.

BEWEIS: Man zeigt, dass es eine Gerade h gibt, die alle drei gegebenen Geraden jeweils in einem Punkt trifft. Dann arbeitet man mehrfach mit den Winkel-Relationen. ■

Die Parallelität ist also eine Äquivalenzrelation.

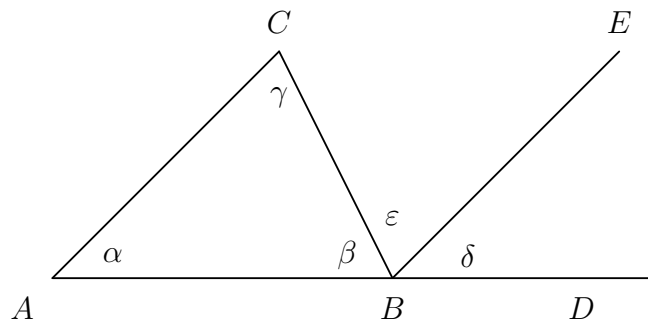
Besonders wichtig ist der folgende Satz:

4.11 Satz (Euklids Proposition 32).

Bei jedem Dreieck gilt:

1. Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.
2. Die Summe der drei Innenwinkel ergibt zwei Rechte.

BEWEIS:



Die Winkel im Dreieck ABC seien wie üblich mit α, β, γ bezeichnet. Zieht man durch B die Parallele zu AC und wählt man darauf einen Punkt E (auf der gleichen Seite von AB wie C), so erhält man den Winkel $\varepsilon := \angle CBE$. Verlängert man $\overline{AB}$ über B hinaus bis zu einem Punkt D , so erhält man den Winkel $\delta := \angle EBD$.

Nun ist $\gamma = \varepsilon$ (Z-Winkel an Parallelen) und $\alpha = \delta$ (Stufenwinkel an Parallelen). Also ist $\alpha + \gamma = \varepsilon + \delta =: \varphi$ der Außenwinkel, der α und γ gegenüberliegt.

Weiter ist $\alpha + \beta + \gamma = \beta + \varphi = 2R$ (Nebenwinkel). Das war zu zeigen. ■

Definition:

Es seien Punkte $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ gegeben. $s_i := \overline{A_{i-1}A_i}$ seien die Verbindungsstrecken aufeinander folgender Punkte, für $i = 1, \dots, n$. Dann nennt man die Vereinigung $\Sigma = s_1 \cup \dots \cup s_n$ einen *Streckenzug*. Wenn die Punkte explizit genannt werden sollen, schreibt man auch $A_0A_1A_2 \dots A_n$ an Stelle von Σ .

Σ heißt *geschlossen*, wenn $A_n = A_0$ ist.

Σ heißt *einfach*, wenn gilt:

- a) Jeder innere Punkt einer Strecke gehört nur zu dieser Strecke.

b) Jeder der Punkte A_i gehört zu höchstens zwei Strecken.

Ein *Polygon* ist ein einfacher geschlossener Streckenzug. Die Strecken s_i nennt man die *Seiten* des Polygons, die Punkte A_i die *Ecken* des Polygons. Zwei Ecken A_i, A_j heißen *benachbart*, wenn $|i - j| = 1$ oder $|i - j| = n - 1$ ist. Ein Polygon mit den Ecken $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = A_0$ wird auch als n -*Eck* bezeichnet.

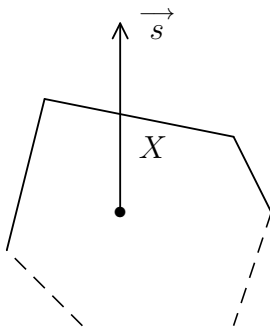
Ein Polygon trennt die Ebene in zwei Bereiche, die Menge der „inneren“ Punkte und die Menge der „äußeren“ Punkte. Leider ist es ziemlich kompliziert, zu sagen, was innere Punkte sind.

Definition:

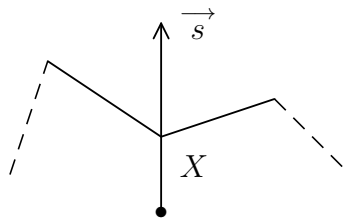
Sei Σ ein Polygon, $P \notin \Sigma$ und $\vec{s}$ ein von P ausgehender Strahl, der keine Seite von Σ in mehr als einem Punkt trifft. (Von jedem Punkt gehen höchstens endlich viele Strahlen aus, die nicht in Frage kommen)

Sei $X \in \vec{s} \cap \Sigma$. Man sagt, $\vec{s}$ trifft Σ in X *transversal*, wenn eine der beiden folgenden Situationen vorliegt:

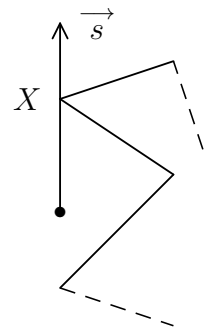
1. X liegt zwischen zwei benachbarten Ecken von Σ .
2. X ist eine Ecke von Σ , und die beiden zu X benachbarten Ecken von Σ liegen auf verschiedenen Seiten von $\vec{s}$.



transversal



transversal



nicht transversal

4.12 Satz. Sei Σ ein Polygon und $P \notin \Sigma$. Die Anzahl der Punkte, in denen ein von P ausgehender Strahl Σ transversal trifft, ist entweder immer gerade oder immer ungerade.

BEWEIS: Man betrachte zwei zulässige Strahlen $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α . Liegt kein Punkt von Σ in $I(\alpha)$, so trifft Σ keinen der beiden Strahlen transversal.

Liegt ein Punkt von Σ in $I(\alpha)$, so verfolgt man von dort den Streckenzug. Jedesmal, wenn Σ das Innere von α verlässt, muss Σ beim nächsten Treffen wieder ins Innere von α zurückkehren, und in beiden Fällen ist das Treffen transversal. Also ist die Gesamtzahl der Punkte auf $\vec{s}_1 \cup \vec{s}_2$, in denen Σ transversal getroffen wird, gerade. Eine gerade Zahl ist aber entweder Summe von zwei geraden oder von zwei ungeraden Zahlen. ■

Definition:

Für $P \notin \Sigma$ sei $o(P) := 0$, falls jeder von P ausgehende zulässige Strahl Σ in einer geraden Anzahl von Punkten transversal trifft. Andernfalls sei $o(P) := 1$.

Der Punkt P liegt im *Innern* von Σ , falls $o(P) = 0$ ist. Er liegt auf dem *Rand* von Σ , falls er auf Σ selbst liegt. Die Menge der inneren Punkte von Σ sei mit $I(\Sigma)$ bezeichnet, die der Randpunkte mit $\partial\Sigma$.

Man nennt $I(\Sigma)$ auch ein **offenes Polygongebiet** und $I(\Sigma) \cup \partial\Sigma$ ein **abgeschlossenes Polygongebiet**.

Bei Dreiecken ergibt das die bekannten Begriffe, wie man leicht mit Hilfe der Sätze von Pasch erkennt.

Schon bei Vierecken wird es schwieriger. Ist $ABCD$ ein Viereck, so nennt man die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ die **Diagonalen** dieses Vierecks. Wir setzen außerdem stets voraus, dass keine drei Ecken kollinear sind. Dann kann man zeigen:

4.13 Satz. *In einem Viereck $ABCD$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Je zwei gegenüberliegende Ecken liegen auf verschiedenen Seiten einer Diagonalen.*
2. *Die beiden Diagonalen treffen sich in einem Punkt $M \in I(ABCD)$.*
3. *Das offene Polygongebiet $I(ABCD)$ ist konvex.*
4. *Jede Ecke liegt im Innern des gegenüberliegenden Winkels.*

4.14 Folgerung 1. *Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn jede Seite ganz in einer durch die gegenüberliegende Seite bestimmten Halbebene liegt.*

4.15 Folgerung 2. *Sind in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so ist das Viereck konvex.*

Definition:

Ein **Parallelogramm** ist ein Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit 4 rechten Winkeln.

Ein **Quadrat** ist ein Rechteck, in dem alle Seiten gleich lang sind.

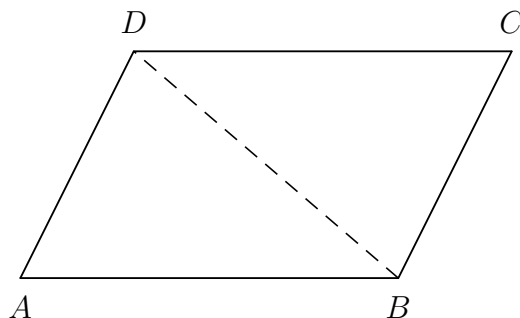
Nach Folgerung 2 ist jedes Parallelogramm konvex. Und nach Euklids Proposition 27/28 ist jedes Rechteck ein Parallelogramm.

Ein Parallelogramm zu konstruieren, ist kein Problem, dank Proposition 31. Aber wir werden sehen, dass die Existenz von Rechtecken wesentlich von der Gültigkeit des Parallelenaxioms abhängt.

4.16 Satz (Euklids Proposition 33).

$\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ seien parallel und gleich lang, A und D mögen auf der gleichen Seite von BC , B und C auf der gleichen Seite von AD liegen. Dann sind auch $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel und gleich lang.

Zum BEWEIS verbinde man B mit D und zeige, dass DBC und BDA kongruent sind. Zweimal benutzt man Z-Winkel an Parallelen.



2.5 Flächenmessung und Pythagoras

5.1 Satz (Euklids Proposition 34).

In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang, und die Diagonale halbiert die Fläche.

BEWEIS: Ist $ABCD$ das Parallelogramm, so folgt leicht mit Z-Winkeln und WSW, dass die Dreiecke ABC und CDA kongruent sind. Insbesondere sind dann auch die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

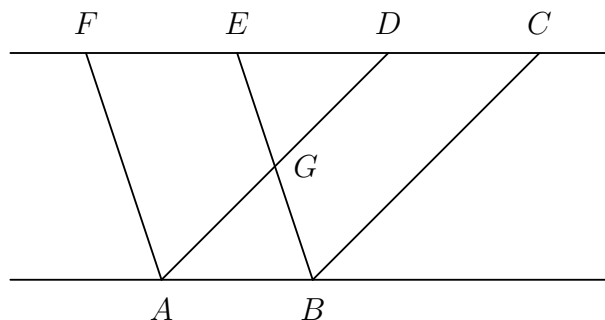
Bei der Aussage über die Fläche stutzen wir. Nirgends wurde bisher definiert, was unter „Fläche“ oder „Flächeninhalt“ zu verstehen ist. Euklid hat zwar eine Definition gegeben, aber die hat nur den Charakter einer Einführung eines primitiven Terms.

Allerdings können wir uns auf andere Weise aus der Affaire ziehen: Mit Hilfe der Diagonalen gewinnen wir zwei kongruente Dreiecke, ABC und CDA . Daher sind die zugehörigen Dreiecksgebiete ebenfalls kongruent, und zusammen ergeben sie - fast - das Gebiet $I(ABCD)$. ■

Richtig problematisch wird es erst beim folgenden Satz:

5.2 Satz (Euklids Proposition 35). *Es seien zwei Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ zwischen den Parallelen AB und $CD = EF$ gegeben, mit gleicher Grundlinie $\overline{AB}$. Dann haben sie die gleiche Fläche.*

BEWEIS: Man muss eigentlich verschiedene Fälle untersuchen. Wir betrachten nur den Fall $F - E - D$ und $E - D - C$.



Euklid argumentiert folgendermaßen: Da ADF und BCE kongruent sind, haben sie die gleiche Fläche. Subtrahiert man von beiden die Dreiecksfläche GDE , so erhält man gleiche Vierecksflächen $AGEF$ und $BCDG$. Fügt man nun die Dreiecksfläche ABG hinzu, so erhält man die Gleichheit der Parallelogrammflächen. ■

Hier können wir uns nicht mehr auf Kongruenz zurückziehen, denn die beiden Parallelogramme sind i.a. keineswegs kongruent. Andererseits ist aber auch nie von einem numerischen Flächenmaß die Rede. Bei Euklid haben zwei Polygone den gleichen Flächeninhalt, wenn sie durch Weglassen oder Hinzufügen von kongruenten Dreiecken in kongruente Figuren überführt werden können.

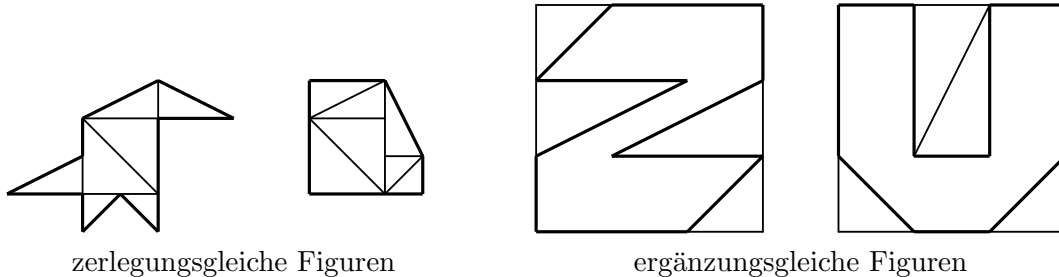
Wir sagen, ein abgeschlossenes Polygonebiet $\mathcal{G}$ wird in (abgeschlossene) Teilgebiete $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ **zerlegt**, wenn $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \dots \cup \mathcal{G}_n$ ist, und wenn $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$ für $i \neq j$ keine inneren Punkte von $\mathcal{G}_i$ oder $\mathcal{G}_j$ enthält. Ohne Beweis sei hier angegeben, dass man jedes abgeschlossene Polygonebiet in endlich viele abgeschlossene Dreiecksgebiete zerlegen kann. Unter einer Zerlegung eines offenen Polygonebietes verstehen wir eine Zerlegung des zugehörigen abgeschlossenen Gebietes. Wir brauchen uns dann nicht mit den lästigen Rändern und Trennungslinien zu beschäftigen.

Definition:

Zwei Polygonebiete heißen **zerlegungsgleich**, wenn sie in endlich viele paarweise kongruente Dreiecksgebiete zerlegt werden können.

Zwei Polygonebiete heißen **ergänzungsgleich**, wenn man sie durch endlich viele paarweise zerlegungsgleiche Polygonebiete zu zerlegungsgleichen Polygonebieten ergänzen kann.

Hier sind zwei Beispiele:



Man kann zeigen, dass beide Bedingungen Äquivalenzrelationen auf der Menge der Polygonebiete definieren. Zerlegungsgleiche Figuren sind natürlich auch ergänzungsgleich. Über die Umkehrung sprechen wir gleich.

Den Beweis von Euklids Proposition 35 kann man geringfügig abändern, um zu zeigen, dass zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und zwischen den gleichen Parallelen ergänzungsgleich sind:

Da die Dreiecke ADF und BCE kongruent sind, sind die Polygone $\Sigma := ABGDF$ und $\Sigma' := ABCEG$ zerlegungsgleich. Nimmt man von ihnen jeweils das Dreieck GDE weg, so bleiben die Parallelogramme übrig. Das ergibt ihre Ergänzungsgleichheit.

Man kann auch zeigen, dass die Parallelogramme zerlegungsgleich sind (vgl. David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“), beim Beweis geht entscheidend das Archimedes-Axiom ein!

Definition:

Eine **Flächenfunktion** ordnet jedem beschränkten Polygonebiet $\mathcal{G}$ eine reelle Zahl $\mu(\mathcal{G}) \geq 0$ zu, so dass gilt:

1. (Bewegungsinvarianz): Ist φ eine Bewegung, so ist $\mu(\varphi(\mathcal{G})) = \mu(\mathcal{G})$.
2. (Additivität): Kann $\mathcal{G}$ in die Gebiete $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ zerlegt werden, so ist $\mu(\mathcal{G}) = \mu(\mathcal{G}_1) + \mu(\mathcal{G}_2)$.

Man beachte, dass diese Definition einer Flächenfunktion unabhängig vom Parallelenaxiom ist! Wir wissen dafür aber auch zunächst nichts über Existenz oder Eindeutigkeit.

Eines ist jedoch klar: Wenn es eine Flächenfunktion gibt, dann stimmt sie auf zwei zerlegungsgleichen (und damit auch auf zwei ergänzungsgleichen) Polygonebieten überein.

5.3 Satz von W. Bolyai. *Es sei μ eine Flächenfunktion. Dann gilt für Polygonebiete $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$:*

Ist $\mu(\mathcal{G}_1) = \mu(\mathcal{G}_2)$, so sind $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ zerlegungsgleich.

Der Beweis ist recht tieflegend und benutzt die Konstruktion von Flächenfunktionen im euklidischen und im nichteuklidischen Fall. Der Satz gehört demnach in die neutrale Geometrie, aber er benötigt erwartungsgemäß das Archimedes-Axiom! Ganz trivial ergibt sich nun:

5.4 Folgerung. *Es gebe eine Flächenfunktion. Dann sind ergänzungsgleiche Polygonebiete auch zerlegungsgleich.*

Wir können – ganz im Sinne Euklids – sagen, dass zwei Polygonebiete die gleiche Fläche haben, wenn sie in der gleichen Äquivalenzklasse von ergänzungs- oder zerlegungsgleichen Gebieten liegen. Ein numerischer Wert für den Flächeninhalt ist dafür nicht erforderlich, und bei Euklid kommt ein solcher auch nicht vor.

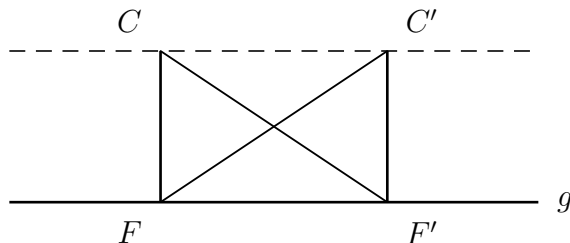
Ab sofort wird wieder das Parallelenaxiom vorausgesetzt!

Aus Proposition 34 kann man leicht ableiten, dass Parallelogramme zwischen gleichen Parallelen schon dann flächengleich sind, wenn nur ihre Grundlinien kongruent sind (Euklids **Proposition 36**).

Der folgende Satz findet sich so nicht bei Euklid:

5.5 Satz. *Sei g eine Gerade, C, C' zwei Punkte $\notin g$, aber auf der gleichen Seite von g . Die Lote von C bzw. C' auf g sind genau dann kongruent, wenn C und C' auf einer Parallelen zu g liegen.*

BEWEIS: Es liegt folgende Situation vor:



Mit F bzw. F' seien die Fußpunkte der Lote von C bzw. C' bezeichnet. Die Geraden FC und $F'C'$ sind zueinander parallel, wegen der rechten Winkel bei F und F' .

a) Ist CC' parallel zu FF' , so ist $FF'C'C$ ein Parallelogramm. Nach Proposition 34 ist dann $\overline{FC} \cong \overline{F'C'}$.

b) Wird umgekehrt die Kongruenz von $\overline{FC}$ und $\overline{F'C'}$ vorausgesetzt, so sind $FF'C$ und $FF'C'$ kongruent (SWS). Also ist $\overline{F'C}$ kongruent zu $\overline{F'C'}$ und $\angle FF'C \cong \angle FF'C'$, und damit auch $\angle CF'C' \cong \angle C'FC$. Das bedeutet, dass auch die Dreiecke $FC'C$ und $CF'C'$ kongruent sind. Das bedeutet, dass $\angle FCC' \cong \angle F'C'C$ ist. Bis hierhin gilt diese Schlussrichtung auch ohne Parallelenaxiom! Mit Parallelenaxiom folgt, dass die Summe aller Innenwinkel im Viereck $FF'C'C$ $4R$ ergibt, die Summe der beiden oberen Winkel $\angle FCC'$ und $\angle F'C'C$ also $2R$. Jeder einzelne muss demnach ein rechter Winkel sein. Dann ist klar, dass die Geraden FF' und CC' parallel sind. ■

Wir haben damit auch gezeigt:

Zwei Geraden, die überall den gleichen Abstand haben, sind parallel.

Definition:

In einem Dreieck nennt man das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite eine *Höhe*.

5.6 Satz (Euklids Proposition 37).

Zwei Dreiecke, die in einer Seite übereinstimmen, und deren Höhen auf diese Seite kongruent sind, haben die gleiche Fläche.

BEWEIS: Man kann annehmen, dass beide Dreiecke ihre Spitze auf der selben Seite der Grundlinie haben. Nach Voraussetzung und wegen des vorigen Satzes liegen diese Spitzen auf einer Parallelen zur Grundlinie. Ergänzt man die Dreiecke zu Parallelogrammen, so erhält man flächengleiche Parallelogramme. Also sind auch die Dreiecke flächengleich. ■

Der Satz bleibt richtig, wenn die Grundlinien der Dreiecke nur kongruent sind, aber auf der gleichen Geraden liegen (Euklids Proposition 38).

5.7 Satz (Euklids Proposition 46). *Über einer Strecke kann man ein Quadrat errichten.*

Der Satz liefert sowohl die Existenz von Quadraten, als auch eine Konstruktionsbeschreibung.

BEWEIS: Sei $\overline{AB}$ die gegebene Strecke. Man errichte in A die Senkrechte zu AB , und schneide von ihr eine Strecke $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ ab. Dann ziehe man die Parallele zu AB durch D .

Nach Proposition 29 ist die Parallele zugleich die Senkrechte zu AD in D . Nun schneide man von ihr auf derjenigen Seite von AD , auf der B liegt, eine Strecke $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ab. So entsteht ein Viereck $ABCD$.

Da B und C den gleichen Abstand von AD haben, Nach Satz 2.5 ist BC parallel zu AD . Also ist $ABCD$ ein Parallelogramm und $\overline{CD} \cong \overline{AD} \cong \overline{AB}$. Es sind also alle Seiten gleich lang, und nach den Sätzen über Winkel an Parallelen sind auch alle Winkel rechte Winkel. Damit ist $ABCD$ ein Quadrat. ■

5.8 Euklids Proposition 47: Der Satz des Pythagoras.

An einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse die gleiche Fläche wie die Quadrate über den Katheten zusammen.

Betreibt man Flächenmessung ohne Zahlen, so ist nicht ganz klar, was die Summe zweier Flächen ist. Gemeint ist hier: Man kann das Quadrat über der Hypotenuse so in zwei Polygone zerlegen, dass diese flächengleich zu den Quadraten über den Katheten sind.

BEWEIS: Das Dreieck ABC habe seinen rechten Winkel bei C , so dass $\overline{AB}$ die Hypotenuse ist.

Es sei $AEDB$ das Quadrat über der Hypotenuse, $ACGF$ und $CBHI$ die Quadrate über den Katheten.

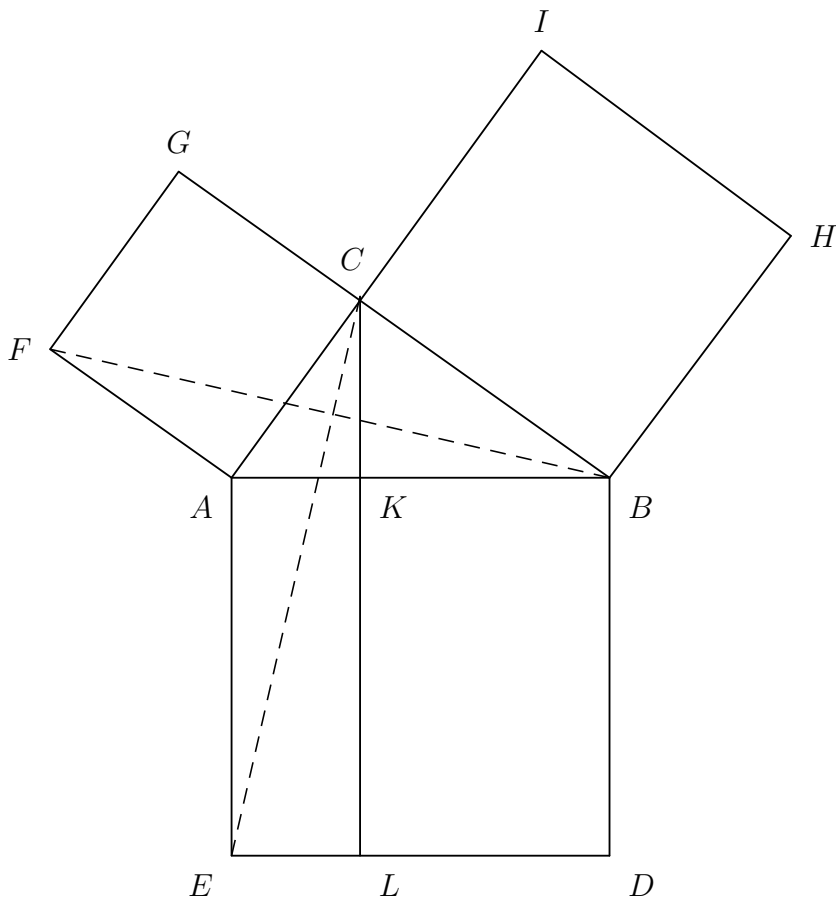
Man fälle das Lot von C auf AB , es trifft dort einen Punkt K mit $A - K - B$ und kann über K hinaus bis zu einem Punkt L mit $E - L - D$ verlängert werden.

Da CL die Geraden AB und ED jeweils senkrecht trifft, ist CL parallel zu AE .

Die Dreiecke AEC und ABF sind kongruent (SWS, es ist $\angle FAB \cong \angle CAE$), also haben sie die gleiche Fläche.

Das Dreieck FAB und das Quadrat $FACG$ haben die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe. Genauso haben AEC und das Rechteck $AELK$ die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe. Daraus folgt, dass $FACG$ und $AELK$ die gleiche Fläche haben. Und genauso folgt, dass $CBHI$ und $KLDB$ die gleiche Fläche haben.

Nimmt man alles zusammen, so erhält man die Behauptung.



■

Weiter wollen wir die Geometrie Euklids nicht verfolgen. Für den Satz des Pythagoras kennt man heute einfachere Beweise, und vor allem formuliert man ihn einprägsamer. Dazu braucht man aber die numerische Längen- und Flächenmessung. Wie man zu einer Längenfunktion kommt, haben wir im vorigen Paragraphen dargelegt. Aber wie erhalten wir eine Flächenfunktion?

5.9 Satz. *Es sei eine Längenfunktion ausgezeichnet (was schon innerhalb der neutralen Geometrie möglich ist). Dann gibt es (bei Einbeziehung des Euklidischen Parallelenaxioms) genau eine Flächenfunktion μ , so dass für jedes Quadrat $\mathcal{Q}$ der Seitenlänge a gilt: $\mu(\mathcal{Q}) = a^2$.*

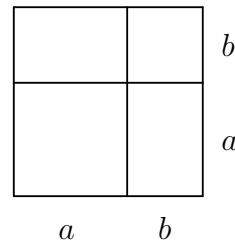
Die Motivation ist klar: Am Beginn jeder Flächenmessung steht die Vorschrift, wie die Fläche eines Quadrates (oder eines Rechtecks) zu messen ist. Die entscheidende Aussage ist, dass allein dadurch die Flächenfunktion schon eindeutig bestimmt ist.

BEWEIS-Andeutung:

Beginnen wir mit der Eindeutigkeit, denn dabei können wir eventuell auch erfahren, wie die Flächenfunktion definiert werden muss.

1) Fläche eines Rechtecks:

Aus zwei Rechtecken der Seitenlängen a und b , sowie einem Quadrat der Seitenlänge a und einem der Seitenlänge b kann man ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ zusammensetzen. Wegen $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ muss $a \cdot b$ die Fläche des Rechtecks sein.



2) Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks:

Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b kann durch ein dazu kongruentes Dreieck zu einem Rechteck mit den Seiten a und b ergänzt werden. Also beträgt die Fläche des Dreiecks $\frac{1}{2}a \cdot b$.

3) Fläche eines beliebigen Dreiecks:

Ein Dreieck mit Grundlinie c und Höhe h kann entweder als Summe zweier rechtwinkliger Dreiecke mit den Katheten a und h bzw. b und h (und $a + b = c$) oder als Differenz zweier solcher Dreiecke (mit $a - b = c$) dargestellt werden. In beiden Fällen ergibt sich als Fläche für das ursprüngliche Dreieck der bekannte Wert $\frac{1}{2}c \cdot h$.

4) Fläche eines beliebigen Polygons:

Kann man das Polygon in Dreiecke zerlegen, so ist die Fläche des Polygons einfach die Summe der Flächen der beteiligten Dreiecke.

Um nun die Existenz der gewünschten Flächenfunktion zu zeigen, muss man folgendes beweisen:

- Jedes Polygon besitzt eine Triangulierung (eine Zerlegung in Dreiecke).
- Zwei verschiedene Triangulisierungen desselben Polygons führen zum gleichen Flächeninhalt.

Gerade die zweite Aussage ist relativ schwer zu zeigen, wir müssen hier auf den Beweis verzichten. Es handelt sich hierbei übrigens um einen Teil des Beweises des Satzes von Bolyai. ■

Als Folgerung ergibt sich nun der Satz des Pythagoras in der gewohnten Form:

Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b ist $a^2 + b^2 = c^2$.