
Kapitel 1

Die „Elemente“: Inzidenz und Anordnung

1.1 Die deduktive Methode

Anfänge der Mathematik finden sich in Mesopotamien, um 3000 v.Chr., auf Tontafeln überliefert. Bekannt war z.B. schon der „Satz des Pythagoras“ als Rechenvorschrift, sowie Formeln zur Flächen- und Volumenberechnung.

Bei den Ägyptern gab es eher Sammlungen von Daumenregeln, überliefert auf Papyrus. Die Erhaltung der Original-Dokumente ist sehr viel schlechter.

Die Geometrie kam wohl über Ägypten nach Griechenland, das Wort „Geometrie“ stammt aus dem Griechischen („Erdvermessung“). Originale der Werke der griechischen Mathematiker sind so gut wie nicht erhalten. Aus der Sekundärliteratur weiß man recht gut über die „fertige“ griechische Mathematik Bescheid, aber kaum etwas über die Entstehungsgeschichte. Viele Vorstellungen darüber beruhen auf reinen Legenden.

Thales von Milet (ca. 624 – 548 v. Chr.) war zunächst Kaufmann und politischer Ratgeber, weit gereist, hatte Kontakte zu ägyptischen Priestern und babylonischen Astronomen. Eine Sonnenfinsternis soll er vorhergesagt haben. Aristoteles berichtet, dass Thales gezeigt habe, wie man mit der Wissenschaft reich werden könne. Er habe auf Grund seiner astronomischen Kenntnisse eine gute Ölernte vorausgesehen und schon im Winter alle Ölpresen der Umgebung gemietet und daraufhin einen hohen Gewinn erzielt.

Thales führte erstmals abstrakte Überlegungen in die Mathematik und speziell in die Geometrie ein. Er suchte nach allgemeinen Gesetzmäßigkeiten in der Natur und erkannte als einer der ersten die Notwendigkeit logischer Beweise. Er entdeckte, dass gewisse geometrische Fakten aus anderen hergeleitet werden können. Schon früh zog er sich aus dem öffentlichen Leben zurück, widmete sich ganz dem Studium der Philosophie und der Wissenschaften und begründete die Ionische Schule für

Mathematik und Philosophie. Die ersten Beweise der folgenden Sätze werden ihm zugeschrieben:

- Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
- Zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bestimmen ein Dreieck.
- Ein Winkel, der einem Halbkreis einbeschrieben ist, ist ein Rechter.

Angeblich hat er den Göttern einen Ochsen geopfert, als er den zuletzt genannten Satz gefunden hatte.

Mit Thales und seinen Zeitgenossen beginnt die griechische Mathematik, sich von der ägyptischen und babylonischen Mathematik abzusetzen.

Nicht weit von Milet liegt die Insel Samos.

Pythagoras von Samos (ca. 570 – 495 v.Chr.) reiste in Kleinasien, Ägypten und Mesopotamien, ging um 529 nach Sizilien und schließlich nach Kroton in Süditalien. Er gründete dort einen Orden, in dem es vor allem um harmonische Lebensführung ging, die Gesellschaft der „Pythagoräer“. Die Vollmitglieder bildeten eine sehr enge Gemeinschaft, sie lebten unter strenger Disziplin, teilten alles miteinander und hielten ihr Wissen vor der Außenwelt geheim. Es gab 4 Studiengebiete: Arithmetik, Harmonielehre, Geometrie und Astronomie. Welche mathematischen Sätze tatsächlich von den Pythagoräern und welche gar von Pythagoras selbst gefunden wurden, ist kaum noch rekonstruierbar. Sie wussten aber z.B. von der Existenz der 5 regulären Polyeder. Angeblich wurde ein Schüler ertränkt, weil er diese Erkenntnis Außenstehenden verraten habe. Aber vielleicht wurde diese Geschichte nur verbreitet, weil die Pythagoräer in der Bevölkerung nicht sehr beliebt waren.

Zum ersten Mal wurden nun größere Mengen mathematischer Sätze in eine logische Reihenfolge gebracht. Die „deduktive Methode“ von Thales wurde weiterentwickelt.

Aber die Pythagoräer entdeckten auch erstmals, dass Logik und Intuition nicht unbedingt übereinstimmen müssen:

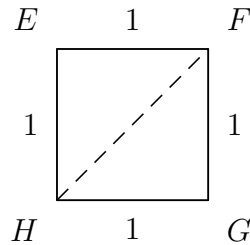
Zwei Strecken AB und CD werden **kommensurabel** genannt, wenn es eine Vergleichsgröße δ und (positive ganze) Zahlen m und n gibt, so dass

$$AB = n \cdot \delta \quad \text{und} \quad CD = m \cdot \delta$$

ist. Für die frühen Pythagoräer war es intuitiv klar, dass jedes Paar von Strecken kommensurabel ist. Aber dann gilt für die Streckenverhältnisse:

$$AB : CD = (n \cdot \delta) : (m \cdot \delta) = n : m.$$

Je zwei geometrische Längen stehen zueinander in einem rationalen Verhältnis. Das führt zu Problemen, wenn man folgendes Quadrat betrachtet:



Nach Pythagoras ist $FH^2 = FG^2 + HG^2 = 2$, und außerdem ist $FH = FH : 1 = FH : FG$. Nach dem Prinzip von der allgegenwärtigen Harmonie muss es zwei Zahlen p und q geben, so dass $FH = p : q$ ist, also $p = q \cdot FH$, und man kann diese Zahlen so wählen, dass sie keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$ mehr besitzen.

Aus $FH^2 = 2$ folgt nun: $p^2 = 2q^2$, d.h. p^2 ist **gerade**. Das geht nur, wenn auch p gerade ist, also $p = 2r$, mit einer geeigneten Zahl r . Doch dann ist

$$2q^2 = p^2 = 4r^2, \quad \text{also } q^2 = 2r^2.$$

Das bedeutet, dass q^2 und damit auch q gerade ist, und das kann nicht sein, denn p und q sollten ja keinen gemeinsamen Teiler haben.

Die Pythagoräer müssen von diesem Widerspruch stark konsterniert gewesen sein. Sie empfanden ihn als „logischen Skandal“. Wie sollten sie sich entscheiden?

Logik oder Intuition ?

Sie entschieden sich für die Logik und die Existenz irrationaler Zahlen (die übrigens in anderen Kulturkreisen auch schon früher entdeckt worden war)! Das Problem, mit irrationalen Zahlen zu rechnen, war damit natürlich noch nicht gelöst. Das blieb später dem Mathematiker **Eudoxus von Cnidus** (ca. 400 – 347 v.Chr.) vorbehalten, der mit seiner „Proportionenlehre“ ein geeignetes Instrument erfand. Zunächst allerdings führte die Krise der irrationalen Zahlen zu einer Ablösung der Zahl als Mittelpunkt des Universums, und es begann eine 2000 Jahre lange Vorherrschaft der Geometrie.

Wir werden später sehen, dass die Intuition nicht vollständig aus der Mathematik verbannt wurde. Z.B. wurden intuitiv als wahr erkannte Axiome als Grundannahmen mathematischer Theorien akzeptiert, und natürlich wurde die Intuition benutzt, um Beweisideen zu entwickeln. Die Strenge der Beweise stützte sich aber allein auf die Logik.

Wir sind so an dieses Bild der Mathematik gewöhnt, dass wir es kaum noch wahrnehmen. Man beachte aber: Alle Phänomene, die mit dem Unendlichen zu tun haben, bekommen wir nur mit dem logischen Prinzip des Widerspruchsbeweises in den Griff. Das ist ein sehr großer, mit der Intuition kaum erfassbarer Bereich, den wir beherrschen, weil sich die griechischen Mathematiker zur Zeit des Pythagoras

dazu entschlossen haben, mathematische Wissenschaft nur noch mit den Mitteln der Logik zu betreiben.

Hippokrates von Chios (nicht der Mediziner!) lebte um 430 v.Chr. Er befasste sich mit dem Problem der Quadratur des Kreises und entdeckte als einer der ersten, dass die Kreisfläche proportional zum Quadrat des Durchmessers ist. Er schrieb eines der ersten mathematischen Lehrbücher mit dem Titel „Elemente“, und er benutzte auch als einer der ersten Buchstaben zur Bezeichnung geometrischer Objekte.

Während die pythagoräische Schule an Bedeutung verlor, entwickelte sich in Athen ein neues Zentrum griechischer Wissenschaft. Die berühmte **Akademie** des **Platon** (ca. 429 – 348 v.Chr.) zog viele Mathematiker und Philosophen an. Da **Kreis** und **Gerade** als elementarste und zugleich vollkommenste geometrische Formen betrachtet wurden, ließ man nur noch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu. Viele Ergebnisse der Athener entstanden beim vergeblichen Bemühen, die drei klassischen Probleme zu lösen:

- Quadratur des Kreises
- Dreiteilung des Winkels
- Würfelverdopplung (sog. „Delisches Problem“)

Alle diese drei Probleme sind mit Zirkel und Lineal unlösbar, aber der Beweis dafür konnte erst in der Moderne erbracht werden.

Noch viele „Elemente“ folgten den Elementen des Hippokrates. Und die Serie gipfelte schließlich in den berühmten „Elementen“ des **Euklid**.

Nach dem Tode Alexanders des Großen (323 v.Chr.) wurde einer seiner führenden Generale, Ptolemäus, Gouverneur von Ägypten, und später König. Er vollendete den Aufbau der neuen Hauptstadt Alexandria, die sich sehr schnell zu einem Haupthandelszentrum entwickelte und für fast 1000 Jahre ein Mittelpunkt hellenistischer Kultur blieb. Unter den Ptolemäern lebten zeitweise 1 Million Menschen in Alexandria.

Um 300 v.Chr. wurde eine Universität gebaut, das sogenannte „Museion“. Die führenden Gelehrten der Zeit wurden eingeladen. Sie hatten Gelegenheit zu forschen, bekamen Zugang zu den besten Bibliotheken und konnten mit anderen Kollegen diskutieren. Für ihren Lebensunterhalt war gesorgt, sie wurden gut bezahlt und ihre einzige Verpflichtung bestand darin, regelmäßig Vorlesungen zu halten.

Einer der ersten Wissenschaftler in Alexandria muss Euklid gewesen sein. Über seine Person ist so gut wie nichts bekannt, aber er war es, der die „Elemente“

zusammenstellte, das einflussreichste Lehrbuch in der Geschichte der Zivilisation. Die „Elemente“ enthalten die wichtigsten mathematischen Fakten, die zu jener Zeit bekannt waren, organisiert in 13 Bänden. Die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie. Sie sind in über 1700 Ausgaben erschienen, nach der Bibel stellen sie das verbreitetste Buch der Erde dar.

Dabei stammt sicherlich viel von dem Material aus früheren Quellen. Die große Leistung des Autors bestand in der hervorragenden logischen Anordnung der Sätze und der Entwicklung der Beweise. Euklid vereinigte eine Sammlung isolierter Entdeckungen zu einem einzigen gewaltigen deduktiven System, das auf wenigen Postulaten, Axiomen und Definitionen beruht.

Man muss sich aber klar machen, was es bedeutet, wenn man von den „Elementen“ des Euklid spricht: Schon ihre Entstehung ist unklar! Vielleicht handelte es sich nur um Mitschriften seiner Schüler. Da das Werk sehr rasch zur Standard-Einführung in die Geometrie wurde, mussten viele Kopien angefertigt werden. Jede solche handgemachte Abschrift kann sich schon wieder von der Vorlage unterscheiden haben. Änderungen im Text häuften sich wahrscheinlich im gleichen Maße, in dem Kopien und Kopien von Kopien über den Mittelmeerraum verteilt wurden, und das Jahrhunderte lang.

Fast alle bekannten Versionen stammten von einer redigierten Ausgabe von **Theon von Alexandria** (um 370 *nach* Chr.) ab. Das war schon fast 700 Jahre nach Euklid. Im Jahre 641 wurde Alexandria von den Moslems eingenommen und die Bibliothek endgültig zerstört (nachdem die Christen zuvor schon ihren Teil dazu beigetragen hatten). Ungefähr 400 Jahre nach Theon wurde eine Kopie (oder die Kopie einer Kopie ...) ins Arabische übersetzt. Damals war Bagdad eines der größten Zentren der Wissenschaften, und dort wurde erstmals die Algebra stärker vorangetrieben.

Über Sizilien und Spanien kam das arabische Wissen wieder nach Europa. Um 1120 wurde eine Kopie der arabischen Version von dem englischen Philosophen und Mönch **Adelard of Bath** ins Lateinische übersetzt. Er hatte auf seinen Reisen mathematische Lektionen in Cordoba gehört und dort die arabische Ausgabe der „Elemente“ erhalten.

150 Jahre später gab der italienische Wissenschaftler **Johannes Campanus** eine neue Übersetzung heraus, die andere arabische Quellen benutzte und etwas klarer und vollständiger war. Diese Version war schließlich auch Grundlage für die erste 1482 in Venedig erschienene gedruckte Auflage. Wegen der Schwierigkeit, die Figuren zu setzen, hatte die erste Drucklegung so lange auf sich warten lassen.

1808 entdeckte F.Peyrard in der vatikanischen Bibliothek eine vollständige Handschrift, die auf ältere und bessere Unterlagen als die von Theon zurückging, und in der die theonische Fassung erwähnt wurde. Der dänische Philologe **J.L.Heiberg** benutzte nun die vorhandenen Versionen, um eine möglichst originalgetreue griechische Version von Euklids „Elementen“ zu rekonstruieren. Sie wurde zwischen

1883 und 1888 veröffentlicht und bildete die Basis für alle späteren Übersetzungen, z.B. die von **Sir Thomas L. Heath** ins Englische (1908).

Bereits 1562 erschien die erste deutsche Übersetzung, die erste brauchbare erstellte **Johann Friedrich Lorenz** (1738 – 1807) zwischen 1773 und 1781 in Halle. Heute benutzen wir hauptsächlich die deutsche Übersetzung von **Clemens Thaer** (1883 – 1974). Der arbeitete zunächst an der Universität und später im Schuldienst, bis er 1939 wegen seiner ablehnenden Haltung gegenüber dem Nazi-Regime entlassen wurde. Nach dem Krieg wirkte er wieder als anerkannter Lehrer. Die Euklid-Übersetzung, die sich stark an die Vorbilder von Heiberg und Heath hielt, entstand zwischen 1931 und 1940.

Kurz sollte noch darauf eingegangen werden, wie sich die griechische Mathematik nach Euklid weiterentwickelte:

Eratosthenes (ca. 276 – 194 v.Chr.) war einer der gelehrtesten Männer der Antike. Er ist bekannt wegen seiner relativ genauen Ermittlung des Erdumfanges, aber auch wegen vieler Beiträge zur Mathematik (z.B. die Siebmethode zur Bestimmung von Primzahlen).

Noch bekannter ist **Archimedes** (ca. 285 – 212 v.Chr.), der größte Mathematiker der Antike, zu vergleichen mit Gauß und Newton. Neben vielem anderen entwickelte er gewisse Vorstufen zur Integralrechnung.

Schließlich ist noch **Apollonius von Perge** (ca. 260 – 200 v.Chr.) zu nennen, mit seinen umfangreichen Untersuchungen über Kegelschnitte.

Um 200 v.Chr. war die Mathematik auf einer Stufe angekommen, von der aus mit den alten Hilfsmitteln (also ohne Infinitesimalrechnung) ein Höhersteigen kaum mehr möglich war.

Ganz grob kann man sich die folgende Zeittafel merken:

Thales	ca. 600 v.Chr.
Pythagoras	ca. 500 v.Chr.
Platon	ca. 400 v.Chr.
Euklid	ca. 300 v.Chr.
Archimedes	ca. 250 v.Chr.

Theon von Alexandria ca. 370 n.Chr.

1.2 Axiomatische Mathematik

Die deduktive Methode funktioniert folgendermaßen: Der Beweis einer Aussage (A1) wird auf eine offensichtlichere Aussage (A2) zurückgeführt. Dann wird nach einer noch unbedenklicheren Aussage (A3) gesucht, aus der (A2) folgt, usw.

Irgendwann müssen wir bei Aussagen ankommen, die jeder als wahr akzeptiert. Das sind die Spielregeln, in der Mathematik nennt man sie **Axiome** oder **Postulate**.

Dabei müssen immer wieder Begriffe erklärt werden, das ist der Sinn der **Definitionen**. Aber in den Definitionen muss man wieder Wörter benutzen, und die müssen wieder definiert werden usw. Also müssen wir akzeptieren, dass gewisse Begriffe nicht definiert werden können. Solche Begriffe nennt man **undefinierte Begriffe** oder **primitive Terme**. „Punkt“ und „Gerade“ sind z.B. solche primitiven Terme für die Geometrie. Die Aufgabe der Axiome ist es unter anderem, die Eigenschaften der primitiven Terme festzulegen.

Ein sogenanntes „materielles“ oder „klassisches“ axiomatisches System sieht nun folgendermaßen aus:

1. Festlegung der Grundbegriffe (der *primitiven Terme*).
2. Angabe einer Liste grundlegender Aussagen (der *Axiome*) über die primitiven Terme. Die Axiome sollten möglichst einfach gehalten werden, und über ihre Wahrheit sollte allgemeine Einigkeit herrschen.
3. Alle anderen benötigten Begriffe werden mit Hilfe der primitiven Terme und der Axiome erklärt (*Definitionen*).
4. Alle weiteren Aussagen (*Theoreme*, *Propositionen* usw.) werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet.

Beispiel: „Wuppertal 2037“

In Wuppertal ist im Jahre 2037 das Kollegium der Fachgruppe Mathematik noch vorhanden, aber dank umfassender Sparmaßnahmen arg geschrumpft. Deshalb muss sich jeder Professor an den Aufgaben der akademischen Selbstverwaltung beteiligen. Diese Aufgaben werden von Kommissionen erledigt, die einen oder mehrere Professoren als Mitglieder haben, und es werden folgende Regeln aufgestellt:

AXIOM I: Jeder Professor ist Mitglied einer Kommission.

AXIOM II: Zwei verschiedene Professoren sind Mitglieder genau einer (gemeinsamen) Kommission.

AXIOM III: Zu jeder Kommission A gibt es genau eine andere Kommission B, so dass A und B kein gemeinsames Mitglied besitzen.

Die primitiven Terme sind „Kommission“, „Professor“ und „ist Mitglied von“.

Außerdem werden Zahlwörter, logische Begriffe und alle diejenigen Wörter, die nötig sind, um aus den primitiven Termen vernünftige deutsche Sätze zu bilden, als bekannt vorausgesetzt und in der üblichen Bedeutung benutzt.

Aufgrund der vorgelegten Axiome kann man die folgenden Sätze beweisen:

SATZ 1: Jeder Professor ist Mitglied von mindestens zwei Kommissionen

SATZ 2: Jede Kommission hat mindestens 2 Professoren als Mitglieder.

SATZ 3: Es gibt mindestens 6 Kommissionen.

SATZ 4: Jede Kommission hat genau 2 Mitglieder. Insgesamt gibt es genau 4 Professoren und 6 Kommissionen.

Die Beweise seien dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Satz 1 und 2 sind nicht sehr schwer. Satz 3 ist etwas schwieriger, und bei Satz 4 muss man schon etwas intensiver nachdenken.

Ein Axiomensystem braucht nicht „materiell“ zu sein. Es kann sinnvoll sein, ohne dass die primitiven Terme mit ihren axiomatisch festgelegten Eigenschaften irgendwelchen Dingen in der Wirklichkeit entsprechen. **David Hilbert**, der 1899 in seinen „Grundlagen der Geometrie“ ein modernes Axiomensystem vorstellte, sagte einmal:

Man muss jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Bänke, Bierseidel“ sagen können.

Ein modernes Axiomensystem sollte folgende Eigenschaften besitzen:

A) Widerspruchsfreiheit

Die Widerspruchsfreiheit beweist man am besten durch Konstruktion eines Modells.

Allerdings ist dies nicht möglich, ohne die Widerspruchsfreiheit eines etwas primitiveren Systems als gegeben hinzunehmen (Kurt Gödel).

B) Unabhängigkeit

Kein Axiom soll aus den anderen hergeleitet werden können. Um zu zeigen, dass Axiom A von einem System S von Axiomen unabhängig ist, muss man ein Modell konstruieren, in dem alle Axiome von S gelten, nicht aber A.

C) Vollständigkeit

Ein System ist vollständig, wenn man kein unabhängiges Axiom hinzufügen kann (das nur die schon bekannten Terme benutzt), ohne Widersprüche zu erzeugen. Die Vollständigkeit eines Systems ist i.a. sehr schwer nachzuweisen.

D) Kategorizität

Ein Axiomensystem heißt *kategorisch*, wenn es widerspruchsfrei ist, und wenn je zwei Modelle „isomorph“ sind, also eineindeutig aufeinander abgebildet werden können.

Die Axiome der Gruppentheorie sind nicht kategorisch, denn es gibt endliche und unendliche Gruppen. Das Beispiel mit den Professoren und Kommissionen ist kategorisch, wie man sieht, wenn man Satz 4 bewiesen hat. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie nach Hilbert ist kategorisch, das von Euklid aber nicht, wie wir im Laufe der Vorlesung nachweisen werden. Lässt man das Parallelen-Axiom weg, ist auch das Hilbert'sche System nicht mehr kategorisch. Das ist das eigentliche Thema dieser Vorlesung.

Mögliche Schritte eines Beweises:

1. Nach Hypothese gilt ... ,
2. Nach einem Axiom gilt ... ,
3. Nach Definition gilt ... ,
4. Nach einem vorangegangenen Schritt des Beweises gilt ... ,
5. Nach einem früher bewiesenen Satz gilt ... ,
6. Nach einer logischen Regel folgt ... ,
7. Nach Annahme der verneinten Folgerung gilt

Beim letzten Schritt handelt es sich um die Einleitung eines Widerspruchsbeweises („reductio ad absurdum“, kurz RAA). Um eine Implikation $A \implies B$ zu beweisen, zeigt man eine Implikation $A \wedge (\neg B) \implies C$, mit einer offensichtlich falschen Aussage C . Dies ist die stärkste Waffe, die dem Mathematiker zur Verfügung steht.

Beispiel von Euklid (7. Buch):

- Eine *Zahl* ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Größe.

(Die Eins galt bei den Griechen nicht als Zahl, aber man konnte eine Strecke als Einheit festlegen. Eine „Zahl“ im obigen Sinne ist dann eine Strecke, die ganzzahliges Vielfaches der Einheitsstrecke ist).

- Eine *Primzahl* ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt.

(Eine Primzahl ist also eine Zahl, die außer der 1 keine echten Teiler besitzt).

Proposition 20: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*

(Wir sagen heute: *Es gibt unendlich viele Primzahlen*. Aber die Griechen haben den Begriff „Unendlich“ in der Mathematik nicht zugelassen, weder im Großen, noch im Kleinen. Also musste Euklid eine Formulierung finden, die den Gebrauch von „Unendlich“ umgeht.)

Es seien Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ vorgelegt und der Größe nach sortiert, $q := p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ und $x := q+1$. Ist x eine Primzahl, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist x keine Primzahl, so besitzt x wenigstens einen Primteiler y .

Annahme: y ist eine der vorgelegten Primzahlen. Dann teilt y die Zahl q und die Zahl x , also auch die Differenz $x - q = 1$. Aber das ist absurd! ■

Wir wollen sehen, worin der Inhalt der 13 Bücher der „Elemente“ besteht:

- I) Anfänge der ebenen Geometrie bis zum Lehrsatz des Pythagoras.
- II) Polygone, geometrische Algebra (z.B. binomische Formel).
- III) Kreislehre, aber ohne Inhalt und Umfang (erst von Archimedes gefunden).
- IV) Reguläre Polygone.
- V) Proportionenlehre nach Eudoxus (in Definition 4: „Axiom des Archimedes“).
- VI) Ähnlichkeitslehre, Flächen, Anfänge der Theorie der Kegelschnitte (vollendet von Apollonius).
- VII) Zahlentheorie (Primzahlen, ggT und kgV, „Euklidischer Algorithmus“ u.a.).
- VIII) und
- IX) Potenzen und Wurzeln, Primfaktorzerlegung, endliche geometrische Reihen.
- X) Rechnen mit irrationalen Zahlen.
- XI) Anfänge der Stereometrie.
- XII) Rauminhalte, Exhaustions-Methode.
- XIII) Die 5 regulären Polyeder, Kantenberechnungen, Beweis dafür, dass es keine weiteren gibt.

Die „Elemente“ haben kein Vorwort, keine Einführung, keine Motivation, keinen Kommentar und keine Erklärungen. Sie beginnen im 1. Buch mit 23 „Definitionen“, 5 „Postulaten“ und einigen „Axiomen“. Danach folgen unmittelbar die Sätze. In den weiteren Büchern gibt es noch allerlei Definitionen, aber keine Postulate oder Axiome mehr.

Schauen wir uns einige der Definitionen an:

Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.

Wahrscheinlich ist dies der Versuch, einen undefinierbaren Begriff einzuführen. Eventuell gibt es einen Zusammenhang mit der Grundlagen-Krise um die nicht kommensurablen Größen.

2. Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.

Für den Aufbau einer axiomatischen Theorie ist so ein Satz ziemlich wertlos.

3. Die Enden einer Linie sind Punkte.

Es gibt bei Euklid keine unendlich weit ausgedehnten Linien.

4. Eine Linie ist **gerade**, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.

Hier wird der primitive Term „Gerade“ eingeführt, der bei Euklid mit dem Begriff „Strecke“ zusammenfällt. Die Erklärung ist schwer zu interpretieren.

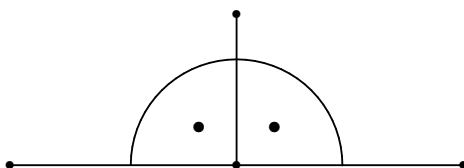
Der Begriff „Ebene“ wird ähnlich eingeführt.

8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.

Auf den ersten Blick wird hier der Begriff „Winkel“ als primitiver Term festgelegt, in Wirklichkeit haben wir hier die erste echte Definition. Es ist weder ein Winkel von 0° noch ein Winkel von 180° zugelassen. Nicht explizit ausgesprochen wird hier, dass von den beiden Winkeln, die zwischen den Strecken gebildet werden, stets der kleinere genommen werden soll.

Es fällt auf, dass durch die Reihenfolge der Euklid'schen Definitionen eine Trennung zwischen der Einführung primitiver Terme und den echten Definitionen stattfindet.

10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**; und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.

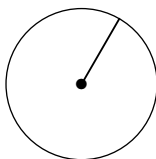


Hier wird erklärt, wie man an einer beliebigen Stelle der Ebene einen rechten Winkel erzeugt.

11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.
12. **Spitz** ist ein Winkel, wenn er kleiner als ein Rechter ist.

Diese Definitionen werden erst dann sinnvoll, wenn geklärt ist, wie man Winkel miteinander vergleicht.

15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind.



Diese Definition enthält zahlreiche Annahmen, die weder durch Festlegung primitiver Terme, noch durch Axiome oder Sätze gesichert sind. Insbesondere wird benutzt, dass ein Kreis die Ebene in einen inneren und einen äußeren Bereich unterteilt, und dass Strecken vom Inneren zum Äußeren die Kreislinie treffen.

19. - 22. definiert verschiedene Figuren, insbesondere Dreiecke (auch gleichschenklige, gleichseitige, rechtwinklige, spitz- und stumpfwinklige Dreiecke), sowie Rechtecke, Quadrate und andere Vierecke.

Unter einem Dreieck versteht Euklid die Fläche des Dreiecks, zusammen mit den begrenzenden Strecken. Er argumentiert dann später in seinen Beweisen auch häufig mit der Fläche. Gemeint ist die Fläche mit all ihren unter Deck-Abbildungen invarianten Eigenschaften, insbesondere auch mit dem Flächeninhalt, ohne dass für letzteren eine saubere Erklärung gegeben wird.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten unbeschränkt verlängert, auf keiner einander treffen.

Diese Definition ist erstaunlich klar formuliert. In der deutschen Ausgabe von Clemens Thaer heißt es „ins Unendliche verlängert“ (ein Übersetzungsfehler).

Die grundlegenden Axiome bei Euklid sind seine berühmten

Postulate:

Gefordert soll sein:

- I. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;
- II. Dass man eine berendte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann;
- III. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.
- IV. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind;
- V. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, sich dann die zwei geraden Linien bei beliebiger Verlängerung auf der Seite treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

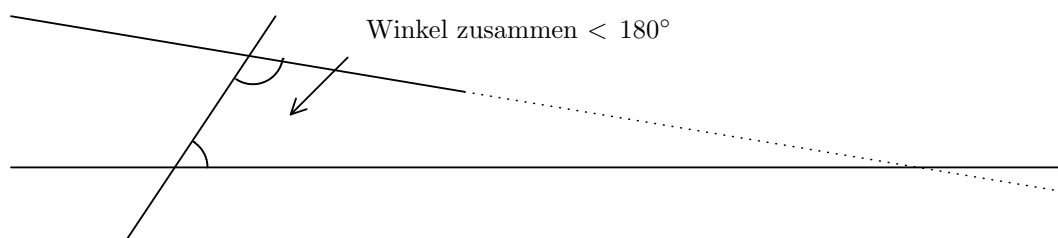
Postulat I führt die Möglichkeit ein, mit einem unmarkierten Lineal die Strecke zwischen zwei Punkten zu zeichnen. Die Definition der geraden Linie und der konstruktive Aspekt des ersten Postulats legen die Vermutung nahe, dass die **eindeutige** Existenz der Verbindungsstrecke gemeint war.

Da Strecken begrenzte Figuren sind, wird in Postulat II die Verlängerbarkeit einer Strecke über einen Endpunkt hinaus gefordert.

Postulat III führt den Zirkel ein. Zum Zeichnen eines Kreises muss ein Punkt P und eine bei P angelegte Strecke PQ als Radius gegeben sein. Der Zirkel kann nicht benutzt werden, um Strecken zu übertragen.

Postulat IV überrascht, weil hier einmal ausdrücklich die Eindeutigkeit gefordert wird. Der rechte Winkel kann somit als Eichmaß für Winkel genutzt werden. Aber warum ist das Postulat notwendig? Für den Streckenvergleich gibt man sich willkürlich eine Einheitsstrecke vor, die man dann an gewünschter Stelle anträgt. Das Übertragen von Winkeln beweist Euklid in Proposition 23. Er braucht aber schon vorher rechte Winkel, etwa in Proposition 11 (Errichten einer Senkrechten). Wie man solche Winkel erzeugt, sagt die Definition. Dass man immer das gleiche Ergebnis erhält, sagt Postulat IV, Proposition wird dafür nicht gebraucht.

Die Aufstellung von Postulat V gilt als große Leistung Euklids. Anschaulich stellt sich die Situation folgendermaßen dar:



Es fällt auf, dass die Formulierung viel komplizierter als bei den anderen Axiomen ist, und der Sachverhalt ist auch nicht unmittelbar einleuchtend, denn der geforderte Schnittpunkt kann so weit entfernt sein, dass man ihn nicht beobachten kann. Insofern entspricht Postulat V nicht den Vorstellungen, die man im Altertum von Axiomen hatte.

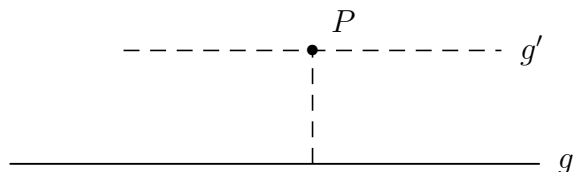
Von Anfang an gab es daher Zweifel, ob es sich wirklich um ein Axiom handelte, oder ob nicht vielmehr Euklid es nur nicht geschafft habe, die Aussage zu beweisen. Für diese Theorie sprach unter anderem, dass Euklid selbst gezögert hat, das Postulat anzuwenden. Er benutzt es zum ersten Mal in Proposition 29 und beweist vorher etliche Sätze mit großer Mühe, die mit Hilfe von Postulat V fast trivial wären. Ein weiteres Indiz für die Beweisbarkeit scheint die Tatsache zu sein, dass die Umkehrung ein Satz ist:

PROPOSITION 17: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengekommen, kleiner als zwei Rechte.*

Das kann man auch so formulieren:

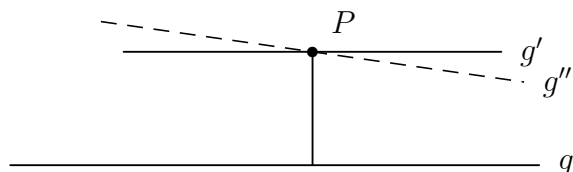
Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten getroffen werden, so bildet die schneidende mit den beiden anderen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Warum wird Postulat V das „Parallelenpostulat“ genannt? Die Existenz einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt wird in Proposition 31 bewiesen, aber ohne Postulat V.



Man fälle das Lot von P auf g und errichte dann auf diesem Lot in P die Senkrechte g' . An g und g' entstehen Wechselwinkel, die gleich und jeweils Rechte sind. Wären g und g' nicht parallel, so würden sie sich schneiden und so ein Dreieck mit zwei rechten Winkel entstehen. Das kann nicht sein, wie Euklid in Proposition 17 zeigt, mit Hilfe seines berühmten Außenwinkelsatzes (Proposition 16), auf den wir noch genauer eingehen werden.

Die Eindeutigkeit der Parallelen kann man nur mit Hilfe des Parallelenpostulats beweisen. Gäbe es eine weitere Parallele g'' zu g durch P , so müssten sich g'' und g' treffen. Mit Hilfe des Parallelenpostulats konstruiert man einen Widerspruch.



In Proposition 32 wird u.a. gezeigt, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechten entspricht. Das geht nur mit der Information, dass Wechselwinkel an Parallelen gleich sind. Und das wiederum wird in Proposition 29 bewiesen. Die Annahme, dass diese Aussage falsch ist, führt nämlich zu einem Widerspruch zum Parallelenaxiom. Und nun ist der Weg frei für eine Behandlung der Geometrie in der Weise, wie man es von der Schule her kennt.

Eine Sammlung von logischen Regeln und besonders offensichtlichen Annahmen bilden die sogenannten

Axiome:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Was einander deckt, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.
6. Zwei Strecken umfassen keine Fläche.

Die ersten drei Aussagen kann man leicht in Formeln schreiben:

$$\begin{aligned} a = c \quad \wedge \quad b = c &\implies a = b \\ a = b \quad \wedge \quad c = d &\implies a + c = b + d \\ a = b \quad \wedge \quad c = d &\implies a - c = b - d. \end{aligned}$$

Dabei sind mit a, b, c, d stets „Größen“ gleicher Art gemeint, wie etwa Strecken, Flächen oder Körper. Natürlich fehlen viele Relationen ähnlicher Art, die dann später benutzt werden. Es ist möglich, dass es im Original tatsächlich mehr waren.

Gleichheit bedeutet bei Euklid Deckungsgleichheit. Damit tritt ein neuer besonders problematischer undefinierter Begriff auf, mit dem Euklid dann auch erhebliche Schwierigkeiten hatte. Er versuchte, ihn zu vermeiden, wo es ging. Beim Beweis der „Kongruenzsätze“ war das aber nicht möglich.

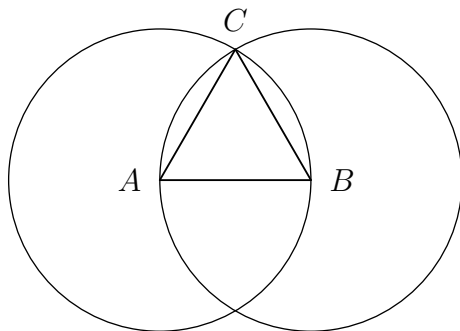
Aussage 5 beschreibt, wie Größen verglichen werden müssen. Man versucht, sie zur Deckung zu bringen, und wenn es sich dann zeigt, dass die eine Größe in der anderen enthalten ist, dann gilt sie als die kleinere. Alles wird über geometrische Konstruktionen abgewickelt.

Die 6. Aussage gehört nicht in allen Quellen zu den Axiomen, aber sie wird später in einem Beweis benötigt. Außerdem liefert sie die Eindeutigkeit der Streckenverbindung.

1.3 Beweise und Konstruktionen

Proposition 1. *Über einer gegebenen Strecke kann ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.*

BEWEIS: Die Formulierung ist etwas eigenartig. Aber viele der euklidischen Sätze sind rein algorithmische Konstruktionsvorschriften.



1. AB sei die gegebene Strecke.
2. Schlage Kreis um A mit Radius AB .
3. Schlage Kreis um B mit Radius AB .
4. Sei C ein Punkt, wo sich die Kreise treffen.
5. Verbinde C mit A zur Strecke AC .
6. Verbinde C mit B zur Strecke BC .
7. Es ist $AC = AB$ (Radien eines Kreises).
8. Es ist $BC = AB$ (Radien eines Kreises).
9. Also ist auch $AC = BC$. (Axiom)
10. Somit ist gezeigt, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist. ■

Die Formulierung ist in halbwegs moderner Sprache abgefasst, aber die einzelnen Schritte entsprechen dem Originalbeweis von Euklid. Ein großes Problem stellt Schritt 4 dar, denn es ist durch nichts gesichert, dass sich die Kreise tatsächlich schneiden. Würde man als Modell der Ebene z.B. die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wählen, so würde man keinen Schnittpunkt erhalten!

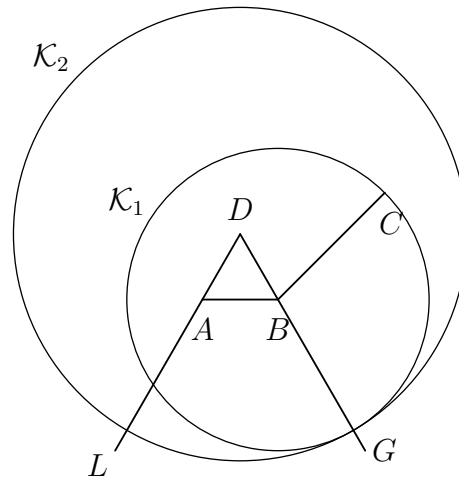
In modernen Axiomensystemen werden deshalb zusätzliche Postulate über die Anordnung von Punkten in der Ebene eingefügt. Dass das nötig ist, war den Mathematikern bis ins 19. Jahrhundert kaum bewusst geworden.

Proposition 2. *An einem gegebenen Punkt kann man eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke anlegen. (Die Richtung der angelegten Strecke wird dabei nicht festgelegt.)*

BEWEIS:

1. Sei A der gegebene Punkt und BC die gegebene Strecke.

2. Verbinde A mit B (Postulat I)
3. Errichte ein gleichseitiges Dreieck ABD über AB (Prop. 1)
4. Zeichne den Kreis $\mathcal{K}_1$ um B mit Radius BC . (Postulat III)
5. Verlängere DB nach beiden Seiten und wähle auf der Seite von B einen Schnittpunkt G mit dem Kreis $\mathcal{K}_1$. (Postulat VI.3)
6. Zeichne den Kreis $\mathcal{K}_2$ um D mit Radius DG .
7. Verlängere DA nach beiden Seiten und wähle auf der Seite von A einen Schnittpunkt L mit dem Kreis $\mathcal{K}_2$. (Postulat VI.3)
8. Es ist $BC = BG$ (Radien von $\mathcal{K}_1$)
9. Es ist $DL = DG$ (Radien von $\mathcal{K}_2$)
10. Es ist $DA = DB$ (gleichseitiges Dreieck),
 DA ein Teil von DL und DB ein Teil von DG .
11. Also ist $AL = BG$. (Axiom 3)
12. Aus (8) und (11) folgt: $AL = BC$ (Axiom 1).
13. Damit ist AL eine BC gleiche und bei A angetragene Strecke. ■

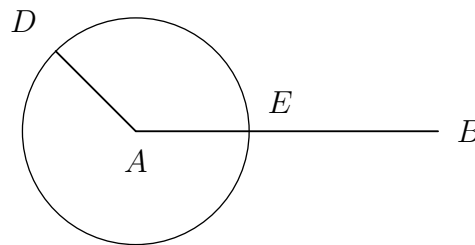


Proposition 3. Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, kann man auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke abtragen.

BEWEIS: (nur angedeutet):

Sei $AB > XY$. Trage bei A eine Strecke $AD = XY$ an (nach Prop. 2). Zeichne den Kreis um A mit Radius AD .

Da $AB > AD$ ist, trifft AB den Kreis in einem Punkt E .



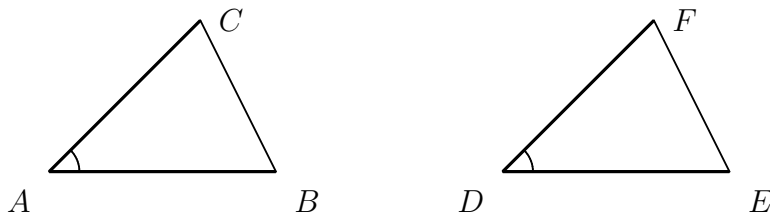
Es ist $AE = AD$, also auch $AE = XY$. ■

Überprüft man die Beweise, so findet man immer wieder unbewiesene Annahmen zur Lage der benutzten Punkte.

Proposition 4. Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreiecks entsprechend zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines anderen Dreiecks gleich sind, dann stimmen die Dreiecke auch in allen anderen einander entsprechenden Größen überein.

(In moderner Sprache ist das der SWS-Kongruenzsatz)

BEWEIS: Hier ist schon die Formulierung des Satzes etwas problematisch.



Sei $AB = DE$ und $AC = DF$, sowie $\angle BAC = \angle EDF$.

Nun schreibt Euklid:

Deckt man nämlich Dreieck ABC auf Dreieck DEF und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie die gerade Linie AB auf DE, so muss auch Punkt B E decken, weil $AB = DE$.

Euklid sagt nie, wie die „Superposition“ (das Überdecken von Figuren) funktioniert oder welchen Axiomen es genügt. Heute sprechen wir von Deck-Abbildungen, Bewegungen oder Kongruenzabbildungen. Im Prinzip kann man sie auch schon in den Beweisen von Euklid erkennen, aber die Beweisführung ist doch sehr verbesserungswürdig. ■

Proposition 5. *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.*

BEWEIS: Euklid bezeichnet meist eine Seite des Dreiecks als Grundlinie.

1. Es sei ABC das gleichschenklige Dreieck mit der Grundlinie AB und den Schenkeln $AC = BC$.
2. Verlängere CA über A hinaus zu einer Strecke CD , und verlängere CB über B hinaus zu einer Strecke CE . Man kann annehmen, dass $CE \geq CD$ ist, also $BE \geq AD$.

3. Wähle F auf AD , $F \neq A, D$.

Dann ist $AF < BE$.

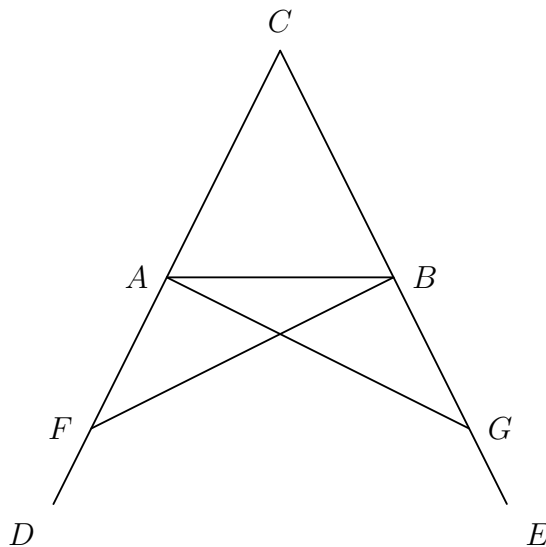
4. Trage AF auf BE bei B an. Das ergibt die Strecke $BG = AF$.

5. Verbinde A mit G und F mit B .

6. Es ist $CF = CG$, $CA = CB$ und $\angle FCB = \angle ACG$, also $FBC \cong AGC$. („ $\cong$ “ steht für „kongruent“ oder „deckungsgleich“)

7. Daher ist auch $FB = AG$, $\angle GAC = \angle FBC$ und $\angle BFC = \angle AGC$.

8. Da außerdem $AF = BG$ ist, ist $FBA \cong AGB$.



9. Also ist $\angle FBA = \angle GAB$.

10. Durch Subtraktion erhält man aus (7) und (9): $\angle BAC = \angle ABC$.

Der recht komplizierte Beweis, den Euklid hier liefert, ist typisch für die deduktive Methode. Er beginnt mit irgendwelchen schwer durchschaubaren Aktionen und fügt dann Folgerung an Folgerung, bis irgendwann ganz überraschend das Ergebnis auftaucht. Man nennt so etwas einen *synthetischen Beweis*, im Gegensatz zum *analytischen Beweis*, bei dem die zu beweisende Aussage zerlegt und auf einfachere Aussagen zurückgeführt wird. Synthetische Beweise sind besonders schwer zu lesen und i.a. das Ergebnis einer vorangegangenen Analyse. ■

Wegen der brückenartigen Figur spricht man auch von der „Eselsbrücke“ („pons asinorum“). Es ist ein wenig verwunderlich, dass Euklid einen derartig komplizierten Weg gewählt hat. Auf Pappus, den letzten bedeutenden griechischen Mathematiker in Alexandria (um 300 n.Chr.), geht der folgende einfache Beweis zurück:

Es ist $AC = BC$, $BC = AC$ und $\angle ACB = \angle BCA$. Also ist $ABC \cong BAC$ und insbesondere $\angle BAC = \angle ABC$. Q.e.d!

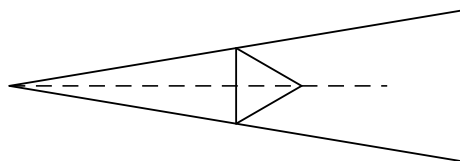
Proposition 6. *Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.*

Das ist die Umkehrung zu „Pons asinorum“.

Proposition 7 und 8 liefern den SSS-Kongruenzsatz. Der Beweis wird wieder mit Superposition geführt und ist entsprechend undurchsichtig.

Proposition 9. *Ein gegebener Winkel kann halbiert werden.*

Die folgende Skizze zeigt die Beweisidee:



Proposition 10. *Eine gegebene Strecke kann halbiert werden.*

Zum Beweis errichtet man ein gleichseitiges Dreieck über der Strecke und halbiert den Winkel an der Spitze. Die Winkelhalbierende trifft den gesuchten Mittelpunkt der Strecke. Dass sie das tut, benutzt wieder mal eine unbewiesene Annahme über Lagebeziehungen.

Proposition 11. *Auf einer gegebenen Strecke AB kann in einem gegebenen Punkt P eine Senkrechte errichtet werden.*

Dies ist die Stelle, wo ein rechter Winkel produziert wird, und wo sich Euklid auf sein Postulat IV bezieht, um das zu bestätigen. Zum Beweis trägt man auf der gegebenen Strecke auf beiden Seiten von P Punkte D und E im gleichen Abstand

an, errichtet darüber ein gleichseitiges Dreieck und halbiert wieder den Winkel an der Spitze. Die Winkelhalbierende trifft AB in P und steht dort auf AB senkrecht.

Proposition 12. *Von einem gegebenen Punkt aus kann man auf eine gegebene Gerade, auf der der Punkt nicht liegt, das Lot fällen.*

Den Beweis kann man sich im Stile der Schulgeometrie leicht überlegen (die Propositionen 1 bis 11 dürfen dabei benutzt werden). Allerdings werden dabei wieder allerlei Annahmen bezüglich der Anordnung der Punkte in der Ebene gemacht.

Proposition 13. *Nebenwinkel ergeben zusammen zwei Rechte.*

Proposition 14 ist die Umkehrung zu 13.

Proposition 15. *Scheitelwinkel sind gleich.*

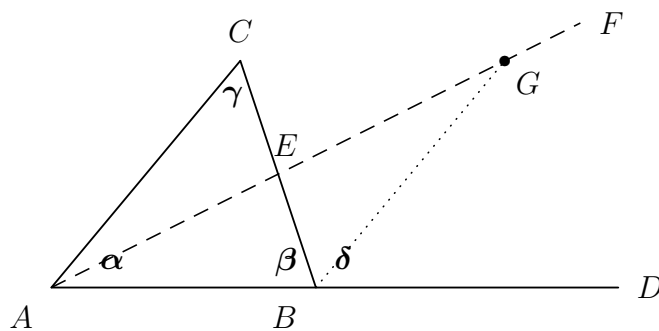
Proposition 16. (Außenwinkelsatz)

An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Dieser Satz gilt als einer der Höhepunkte des ersten Bandes.

BEWEIS:

1. Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Innenwinkeln α , β und γ .



2. Verlängere AB über B hinaus zu AD . Dadurch entsteht der Außenwinkel δ .

3. Halbiere BC und bezeichne den Mittelpunkt mit E .

4. Verlängere AE über E hinaus so weit zu AF , dass $EF > AE$ ist.

5. Schneide von EF eine Strecke $EG = AE$ ab und verbinde G mit B .

6. Es ist $\angle AEC = \angle BEG$ (Scheitelwinkel), also $AEC \cong BGE$ (SWS).

7. Also ist $\gamma = \angle EBG$, und da $\angle EBG < \delta$ ist, ist auch $\gamma < \delta$.

8. Analog zeigt man, dass α kleiner als der Scheitelwinkel von δ ist, und damit $\alpha < \delta$. ■

Auf die weiteren Sätze von Euklid soll hier zunächst nicht eingegangen werden.

1.4 Das Axiom von Pasch

Wir haben davon gesprochen, wo bei Euklid große Ungenauigkeiten liegen. 1863 äußerte Gauß bereits: „Es müssen solche Worte wie 'zwischen' auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.“

Der Mann, der das leistete, war Moritz Pasch (1843 - 1930). Er wurde in Breslau geboren, studierte in Berlin und lehrte später in Giessen. Zunächst arbeitete er über Algebraische Geometrie, später wandte er sich den Grundlagen der Geometrie zu, einem bis dahin kaum existenten Gebiet. Er stellte erstmals deutlich fest, dass jede axiomatische Theorie mit primitiven Termen beginnen muss. In der Geometrie entdeckte er zahlreiche Lücken bei Euklid, die darauf beruhten, dass unzulässige Annahmen über die Lage der Punkte zueinander gemacht wurden. Das führte zu den sogenannten „Anordnungsaxiomen“, die u.a. sicherstellen, dass eine Gerade die Ebene in zwei disjunkte Teile zerlegt. 1882 veröffentlichte Pasch seine „Vorlesungen über neuere Geometrie“.

Pasch hat sicherlich David Hilbert maßgeblich beeinflusst, der ab 1894 in mehreren Versionen unter dem Titel „Grundlagen der Geometrie“ das erste vollständige Axiomensystem der ebenen euklidischen Geometrie herausgab.

Wir wollen in der Vorlesung ein modernes Axiomensystem für die ebene Geometrie aufstellen, das noch ein klein wenig den Geist Euklids atmet. Parallel sollen andere Axiomensysteme betrachtet werden, allen voran das System von Hilbert.

Seit Hilbert fasst man die Axiome der Geometrie gerne in Gruppen zusammen. Wir beginnen mit der Gruppe der „Inzidenzaxiome“, die noch am ehesten wie bei Euklid aussehen.

Primitive Terme „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ und „Inzidenz“:

Wir benutzen einige Begriffe aus der elementaren Mengenlehre (Element- und Teilmengenbeziehung, leere Menge, endliche Durchschnitte und Vereinigungen, Differenzen). Man könnte – wie bei Hilbert – auch darauf noch verzichten und alles mit den Methoden der formalen Logik beschreiben, aber das würde die ganze Darstellung recht schwerfällig machen.

Die **Ebene** ist eine Menge $\mathcal{E}$, ihre Elemente heißen **Punkte**. Gewisse Teilmengen von $\mathcal{E}$ werden **Geraden** genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man „ X liegt auf g “, oder auch „ g enthält X “.

Bei Hilbert ist von einer Beziehung (der „Inzidenz“) zwischen den primitiven Termen die Rede, die in gewissen Fällen erfüllt ist. Näheres regeln die Axiome.

Für die Inzidenz zwischen Punkten, Geraden und der Ebene gilt:

Inzidenz-Axiome:

I-1) Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.

I-2) Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.

Axiom I-1 entspricht dem Postulat I von Euklid, wobei zusätzlich die Eindeutigkeit gefordert wird. Das Axiom I-2 hätte Euklid sicher für überflüssig gehalten.

Definition:

1. Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnet AB die dadurch eindeutig bestimmte Gerade.
2. Punkte $A, B, C, \dots$, die auf einer Geraden liegen, heißen *kollinear*.

Offensichtlich ist $AB = BA$.

I-3) Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht kollinear sind.

Man nennt I-3 auch das „Dimensions-Axiom“. Eine Gerade enthält mindestens 2 verschiedene Punkte, eine Ebene mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und im Raum wird man die Existenz von 4 Punkten fordern, die nicht alle in einer Ebene liegen.

In Beweisen benötigt man oft eine Folgerung aus Axiom I-1:

Stimmen zwei Geraden in wenigstens zwei verschiedenen Punkten überein, so müssen sie gleich sein.

Daraus ergibt sich insbesondere:

4.1 Satz. *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Definition:

Haben die Geraden g und h genau einen Punkt X gemeinsam, so sagt man, „sie schneiden sich“ in X . Wenn sie gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man sie *parallel*.

Im Gegensatz dazu sind bei Euklid parallele Geraden immer verschieden.

4.2 Satz. *Es gibt mindestens drei paarweise verschiedene Geraden in $\mathcal{E}$.*

BEWEIS: Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind (Axiom I-3), so sind die drei Geraden AB , AC und BC paarweise verschieden. ■

Ein Modell für die Inzidenz-Axiome kann schnell angegeben werden. Man nehme für $\mathcal{E}$ eine beliebige Menge mit 3 Elementen A, B, C . Die Geraden seien die 2-elementigen Teilmengen $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ und $\{B, C\}$. Dieses Modell, das wir mit $\mathcal{M}_1$ bezeichnen wollen, zeigt schon die Widerspruchsfreiheit der Inzidenz-Axiome.

Als Modell $\mathcal{M}_2$ bezeichnen wir die gewöhnliche Ebene der analytischen Geometrie:

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Dieses Modell werden wir später genauer studieren.

Wenn wir als Ebene die Einheits-Sphäre

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

nehmen, und als Geraden die „Großkreise“, die sich als Schnitte von S^2 mit Ebenen durch den Nullpunkt ergeben, so sind die Inzidenz-Axiome nicht erfüllt! Es gehen z.B. durch Nord- und Südpol unendlich viele verschiedene „Längenkreise“. Man kann das Modell aber etwas modifizieren und bekommt dann ein echtes Modell $\mathcal{M}_3$:

Ein „projektiver Punkt“ soll eine 2-elementige Menge der Gestalt $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$ sein, mit $\mathbf{x} \in S^2$. Es wird also jeweils ein Punkt der Sphäre mit seinem Antipodenpunkt identifiziert. Als Ebene $\mathcal{E}$ nehmen wir die Menge aller projektiven Punkte. Da ein Großkreis mit jedem Punkt der Sphäre auch den entsprechenden Antipodenpunkt enthält, kann man sagen: Eine Gerade in $\mathcal{E}$ ist die Menge aller projektiven Punkte $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$, bei denen $\mathbf{x}$ einen Großkreis durchläuft. Eine solche „Gerade“ ist eine geschlossene Kurve, und man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Inzidenz-Axiome für das Modell $\mathcal{M}_3$ erfüllt sind.

Primitiver Term „zwischen“:

Wir kommen jetzt zu den von Pasch angestellten Überlegungen:

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ kann eine Beziehung $A - B - C$ bestehen. Ist dies der Fall, so sagt man: *B liegt zwischen A und C*.

Anordnungs-Axiome:

A-1) Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden und liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

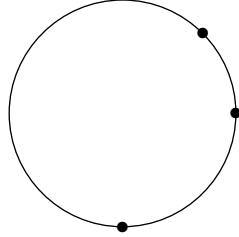
A-2) Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.

A-3) Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei folgenden Beziehungen:

$$A - B - C \quad \text{oder} \quad B - C - A \quad \text{oder} \quad C - A - B.$$

Die Axiome A-1 bis A-3 sind die Formulierungen ganz simpler und anschaulicher Sachverhalte. Von Euklid wären sie sicher als überflüssig abgetan worden. Weiter unten folgen noch zwei etwas weniger triviale Anordnungsaxiome.

Im Modell $\mathcal{M}_1$ sind die Axiome A-1 bis A-3 gegenstandslos, weil nie mehr als 2 Punkte auf einer Geraden liegen. Im Modell $\mathcal{M}_2$ kann man sie leicht verifizieren (siehe Abschnitt 1.6). Die Widerspruchsfreiheit ist damit gesichert. Im Modell $\mathcal{M}_3$ haben die Geraden kreisförmige Gestalt:



Dann liegt von drei Punkten auf einer Geraden **jeder** zwischen den beiden anderen. Also sind im Modell $\mathcal{M}_3$ die Anordnungsaxiome nicht erfüllt.

Definition:

Seien $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$.

1. $\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\}$ heißt *Strecke mit den Endpunkten* A und B .
2. $\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - B - X\}$ heißt der *Strahl von A in Richtung B* .

4.3 Satz. Sind $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$, so gilt:

1. $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset AB$.
2. $\overline{AB} = \overline{BA}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ und $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = AB$.

BEWEIS: 1) und 2) sind trivial. Außerdem ist offensichtlich

$$\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset AB.$$

Sei nun $X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Wäre $X \notin \overline{AB}$, so müsste zugleich $A - B - X$ und $B - A - X$ gelten. Das ist aber nicht möglich.

Ist $X \in AB$, so ist entweder $X \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, oder es muss $X - A - B$ oder $A - B - X$ gelten. In jedem Fall liegt X in $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. ■

Wie angekündigt, brauchen wir noch zwei weitere Anordnungsaxiome:

A-4) Für alle $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.

A-5) Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und l eine Gerade, die A, B und C nicht enthält. Ist $\overrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, so ist

$$\overrightarrow{AC} \cap l \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{BC} \cap l \neq \emptyset.$$

Das Axiom A-4 entspricht dem Postulat II von Euklid über die Verlängerbarkeit von Geraden über einen Punkt hinaus. Hier wird nur etwas genauer gesagt, was das bedeuten soll. Das Axiom A-5 bezeichnet man als **Pasch-Axiom**. Es schließt eine echte Lücke im Euklidischen Axiomensystem.

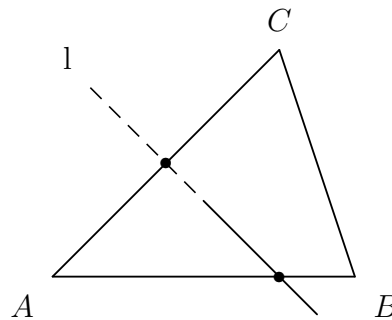
Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte, so heißt

$$ABC := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{AC}$$

das **Dreieck** mit den **Ecken** A, B und C und den **Seiten** $a = \overrightarrow{BC}$, $b = \overrightarrow{AC}$ und $c = \overrightarrow{AB}$.

Das Pasch-Axiom bedeutet nun anschaulich folgendes:

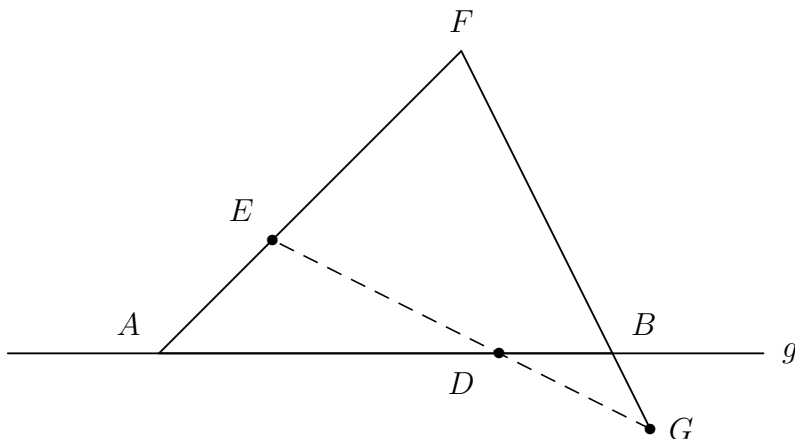
Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks trifft, aber keine der Ecken, so trifft die Gerade notwendigerweise noch eine andere Seite des Dreiecks.



4.4 Folgerung. Für beliebige Punkte $A \neq B$ gibt es ein D mit $A - D - B$.

BEWEIS: Sei $g = AB$ und E ein Punkt, der nicht auf g liegt (Axiom I-3).

Es gibt nach Axiom A-4 einen Punkt F mit $A - E - F$. Da $AE \cap g = \{A\}$ und $F \neq A$ ist, kann F nicht auf AB liegen und insbesondere nicht $= B$ sein. Also gibt es auch einen Punkt G mit $F - B - G$.



Wir wollen zeigen, dass EG einen Punkt zwischen A und B enthält. Zunächst trifft EG die Seite $\overline{AF}$ des Dreiecks ABF in E , aber nicht die Seite $\overline{BF}$, denn dann gäbe es neben G noch einen Punkt $\neq G$ von EG auf FB , und es wäre $EG = FB$, also $E \in FG$ und damit auch $EF = FG$ und $A \in FG$. Das würde bedeuten, dass $FG = g$ ist, was unmöglich ist.

Nach dem Axiom von Pasch trifft EG die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt D . Es ist $A - D - B$. ■

Bemerkung. Die Axiome A-1, A-2, A-3 und A-5 finden sich so mehr oder weniger auch bei Hilbert. Das Axiom A-4 fehlt dort, aber dafür steht die Aussage des gerade bewiesenen Satzes bei Hilbert unter den Axiomen.

4.5 Folgerung. *Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.*

BEWEIS: Schon jede Strecke $\overline{AB}$ enthält unendlich viele Punkte. Man kann nach dem gerade bewiesenen Satz einen Punkt P_1 mit $A - P_1 - B$ finden, dann einen Punkt P_2 mit $A - P_2 - P_1$ usw. ■

Man kann zur Anordnung eine Reihe von Hilfssätzen beweisen, wir zitieren hier nur zwei Ergebnisse ohne Beweis.

4.6 Satz (Erste 4er-Relation). *Ist $A - B - C$ und $B - C - D$, so ist auch $A - B - D$ und $A - C - D$.*

4.7 Satz (Zweite 4er-Relation). *Ist $A - B - C$ und $A - C - D$, so ist auch $B - C - D$ und $A - B - D$.*

Eine Gerade ℓ , die keine der Ecken eines Dreiecks ABC enthält, kann nicht durch alle drei Seiten dieses Dreiecks gehen. Wenn es nämlich Punkte X, Y, Z mit $A - X - B$, $B - Y - C$ und $C - Z - A$ gibt, so können diese nicht kollinear sein (Beweis: Übungsaufgabe), also nicht alle auf ℓ liegen.

Das Pasch-Axiom liefert somit:

4.8 Satz. Sei ℓ eine Gerade, A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf ℓ liegen und $\overline{AB} \cap \ell = \emptyset$. Dann gilt

1. Ist $\overline{BC} \cap \ell = \emptyset$, so ist auch $\overline{AC} \cap \ell = \emptyset$.
2. Ist $\overline{BC} \cap \ell \neq \emptyset$, so ist auch $\overline{AC} \cap \ell \neq \emptyset$.

Sei nun eine Gerade $g \subset \mathcal{E}$ festgehalten. Für Punkte $A, B \in \mathcal{E} \setminus g$ erklären wir eine Relation

$$A \sim B : \iff A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap g = \emptyset.$$

Wir sagen dafür auch: A und B liegen auf der gleichen Seite von g .

4.9 Satz. „Auf der gleichen Seite von g liegen“ ist eine Äquivalenzrelation.

BEWEIS: Offensichtlich ist $A \sim A$ (Reflexivität), und mit $A \sim B$ ist auch $B \sim A$ (Symmetrie). Die Relation ist aber auch transitiv: Sei $A \sim B$ und $B \sim C$. Ist $A = B$ oder $B = C$, so ist offensichtlich auch $A \sim C$. Wir können uns daher auf den Fall beschränken, dass A, B, C paarweise verschieden sind. Liegen A, B, C auf einer Geraden, so liegt einer der Punkte zwischen den beiden anderen. Es gelte etwa $A - B - C$. Dann ist $\overline{AC} = \overline{AB} \cup \overline{BC}$ und auch $A \sim C$. Liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden, so folgt die Transitivität aus dem vorigen Satz. ■

Liegen A und B nicht auf der gleichen Seite von g , so sagen wir, sie **liegen auf verschiedenen Seiten** von g . Wir wollen nun zeigen, dass jede Gerade genau zwei Seiten hat.

Definition:

Ist $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade und $A \in \mathcal{E} \setminus g$, so heißt

$$H(g, A) := \{X \in \mathcal{E} \setminus g \mid X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } g \text{ wie } A\}$$

die durch A bestimmte **Seite** von g .

$H(l, A)$ ist nichts anderes als die Äquivalenzklasse von A bezüglich der oben betrachteten Äquivalenzrelation. Damit ist schon einmal klar, dass $\mathcal{E} \setminus g$ in disjunkte derartige Klassen zerfällt.

4.10 Satz. Jede Gerade hat genau zwei Seiten.

BEWEIS: Sei g die gegebene Gerade.

Es gibt einen Punkt A , der nicht auf g liegt (Axiom I-3).

Es gibt einen Punkt $O \in g$ (Axiom I-2).

Es gibt einen Punkt B mit $A - O - B$ (Axiom A-4).

Dann ist $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset$, also nicht $A \sim B$.

Demnach gibt es wenigstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

Seien A und B die Repräsentanten zweier verschiedener Äquivalenzklassen und C irgendein Punkt aus $\mathcal{E} \setminus l$. Ist $C = A$ oder $C = B$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $C \neq A$ und $C \neq B$. Wenn C nicht äquivalent zu A ist, dann ist $\overline{AC} \cap g \neq \emptyset$. Da außerdem $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset$ ist, muss $\overline{BC} \cap g = \emptyset$ sein, nach Pasch. Also ist C äquivalent zu B . Damit gibt es nur die beiden durch A und B repräsentierten Klassen. ■

Definition:

Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ heißt **konvex**, wenn gilt:

Für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \neq B$ ist $\overline{AB} \subset \mathcal{M}$.

4.11 Satz. Die Mengen $H(l, A)$ sind konvex.

BEWEIS: Sind $X, Y \in H(l, A)$, so ist $X \sim A$ und $Y \sim A$. Also ist auch $A \sim Y$ und dann $X \sim Y$. Das bedeutet, dass $\overline{XY} \subset \mathcal{E} \setminus l$ ist.

Sei $Z \in \overline{XY}$, $Z \neq X$ und $Z \neq Y$. Wir nehmen an, es gibt einen Punkt $R \in l$ mit $\overline{XZ} \cap l = \{R\}$. Dann ist $X - R - Z$ und $X - Z - Y$. Mit den 4er-Relationen folgt: $X - R - Y$. Aber das ist unmöglich. Also ist $X \sim Z$, und damit $A \sim Z$. Ganz $\overline{XY}$ liegt in $H(l, A)$. ■

Zusammenfassend erhalten wir den

4.12 Satz von Pasch. Eine Gerade ℓ teilt den Rest der Ebene in zwei disjunkte nicht-leere konvexe Teilmengen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$, so dass für $A \in \mathcal{H}_1$ und $B \in \mathcal{H}_2$ gilt: $\overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset$.

Die (eindeutig bestimmten) Teilmengen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ werden als die durch ℓ bestimmten **Halbebenen** oder **Seiten** bezeichnet.

So wie eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, so zerlegt ein Punkt eine Gerade in zwei Halbgeraden.

4.13 Satz. Wenn der Punkt O zwischen den beiden Punkten A und B liegt, dann gilt:

1. $AB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.
2. $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \{O\}$.

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. O teilt also die durch A und B bestimmte Gerade ℓ in die disjunkten Mengen $\{O\}$, $\overrightarrow{OA} \setminus \{O\}$ und $\overrightarrow{OB} \setminus \{O\}$,

und man kann sagen, wann zwei Punkte von ℓ auf der gleichen Seite oder auf zwei verschiedenen Seiten von O liegen.

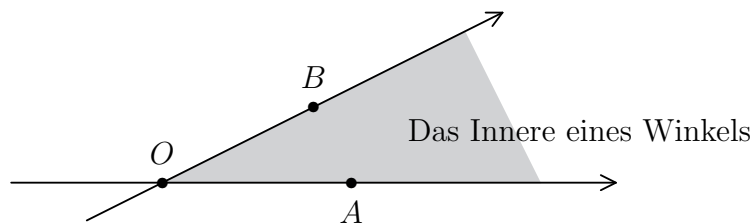
Definition:

Es seien O, A, B drei nicht-kollineare Punkte. Unter dem **Winkel** $\angle AOB$ versteht man die Vereinigung der Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$. Der Punkt O heißt **Scheitel** des Winkels, die beiden Strahlen heißen die **Schenkel** des Winkels.

Es kommt beim Winkel nicht auf die Reihenfolge der Schenkel an, und statt der Punkte A und B kann man auch beliebige andere Punkte auf den Schenkeln zur Beschreibung heranziehen.

Definition:

Sei $\alpha = \angle AOB$. Dann nennt man $I(\alpha) := H(OA, B) \cap H(OB, A)$ das **Innere** des Winkels α . Die Menge $A(\alpha)$ aller Punkte, die weder auf α noch in $I(\alpha)$ liegen, bezeichnet man als das **Äußere** des Winkels.

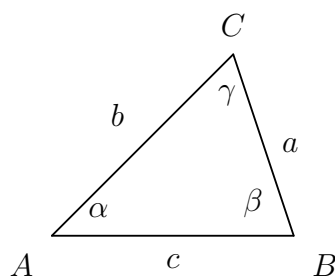


Das Innere eines Winkels ist immer eine echte nicht-leere konvexe Teilmenge einer Halbebene. Anschaulich bedeutet das, dass wir nur Winkel α mit $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ betrachten. Das Äußere eines Winkels ist niemals konvex.

Definition:

A, B, C seien drei nicht-kollineare Punkte. Unter den **Winkeln des Dreiecks** ABC versteht man die Winkel $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle ACB$.

Die Menge $I(ABC) := I(\alpha) \cap I(\beta) \cap I(\gamma)$ nennt man das **Innere des Dreiecks**. Die Menge $A(ABC)$ aller Punkte, die nicht auf dem Dreieck und nicht im Inneren liegen, bezeichnet man als das **Äußere des Dreiecks**.



Das Innere eines Dreiecks ist konvex, das Äußere nicht.

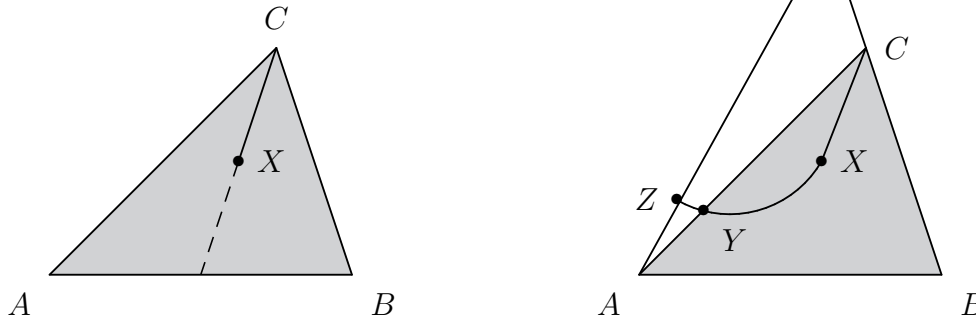
Jede Ecke eines Dreiecks gehört gleichzeitig zu zwei Seiten. Die dritte Seite, die die Ecke nicht enthält, nennt man auch *die der Ecke gegenüberliegende Seite*.

4.14 Folgerung. *Eine Gerade, die durch eine Ecke und einen inneren Punkt eines Dreiecks geht, schneidet die der Ecke gegenüberliegende Seite.*

BEWEIS: Gegeben sei das Dreieck ABC und ein Punkt $X \in I(ABC)$. Wir betrachten die Gerade $l = CX$. Würde l zwei Ecken des Dreiecks ABC enthalten, so könnte X nicht im Innern des Dreiecks liegen. Also befinden sich die Punkte A und B nicht auf l .

Nach Axiom A-4 gibt es ein S mit $B-C-S$. Dann liegen B und S auf verschiedenen Seiten von AC . Außerdem liegt S auf der Geraden BC und damit nicht im Innern des Dreiecks.

Es ist nun ein neues Dreieck entstanden, nämlich ABS . Da $BS \cap l = \{C\}$ ist, trifft l die Seite $\overline{BS}$ des neuen Dreiecks, aber keine der Ecken. Nach Pasch muss l dann noch eine andere Seite treffen. Ist dies die Seite $\overline{AB}$, so sind wir fertig. Also nehmen wir an: $l \cap \overline{AB} = \emptyset$ und $l \cap \overline{AS} \neq \emptyset$.



Es gibt dann ein Z mit $A-Z-S$ und $Z \in l$.

Da $SA \neq CA$ ist, treffen sich SA und CA nur im Punkte A . Wegen $S-Z-A$ liegen S und Z auf der gleichen Seite von AC und damit Z im Äußeren von ABC .

Weil nun Z und X auf verschiedenen Seiten von AC liegen, gibt es ein $Y \in AC$ mit $Z-Y-X$ (und damit $\overline{ZX} \cap AC = \{Y\}$).

Mit Z und X liegt auch Y auf l .

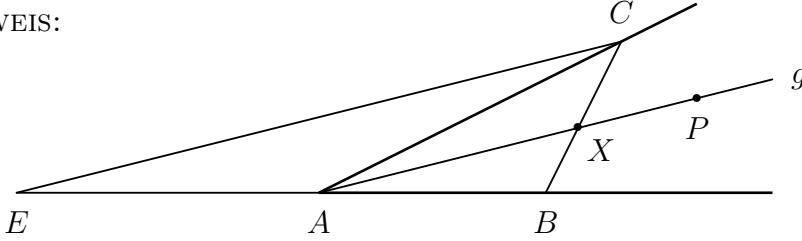
Weil X im Innern von ABC liegt, sind X und A auf der gleichen Seite von $BC = BS$. Aus der Beziehung $A-Z-S$ folgt, dass auch A und Z auf der gleichen Seite von BS liegen. Also sind schließlich auch X und Z auf der gleichen Seite von BS . Insbesondere ist $Y \neq C$. Also ist $AC = YC = l$. Das kann aber nicht sein! Die Annahme war demnach falsch. ■

Wir wollen die Lage eines Punktes relativ zu einem Winkel untersuchen:

4.15 Querbalken-Theorem. Sei $\alpha := \angle BAC$. Dann gilt:

$$P \in I(\alpha) \iff \exists X \in AP \text{ mit } B - X - C.$$

BEWEIS:



Man wähle einen Punkt E mit $E - A - B$. Die Gerade $g = AP$ trifft die Seite $\overline{EB}$ des Dreiecks EBC im Punkt A . Liegt B auf g , so ist $g = AB$. Aber das kann wegen $P \in I(\alpha)$ nicht sein. Und analog folgert man, dass auch C nicht auf g liegen kann. Schließlich kann auch E nicht auf g liegen, denn dann wäre $g = AE = AB$. Nach Pasch muss g noch eine Seite des Dreiecks EBC treffen.

Wir nehmen an, dass g die Seite $\overline{EC}$ in einem inneren Punkt Y trifft. Mit P liegen auch alle Punkte $X \neq A$ von $\overrightarrow{AP}$ in $H(AB, C) \cap H(AC, B)$. Weil E und B auf verschiedenen Seiten von AC liegen, liegen auch Y und P auf verschiedenen Seiten von AC . Es muss also $Y - A - P$ gelten. Daraus folgt, dass Y nicht in $H(AB, C)$ liegt. Das ist aber ein Widerspruch! Also trifft g die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt X .

Umgekehrt sei die Beziehung $B - X - C$ vorausgesetzt. Dann liegt X in $H(AB, C) \cap H(AC, B)$, also in $I(\alpha)$. ■

Man beachte aber: Ist $P \in I(\alpha)$, so braucht es keine Punkte $B' \in \overrightarrow{AB}$ und $C' \in \overrightarrow{AC}$ zu geben, so dass $P \in \overline{B'C'}$ liegt.

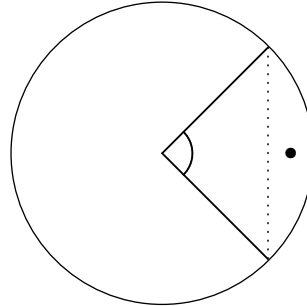
Um das zu belegen, konstruieren wir ein weiteres Modell: Im Modell $\mathcal{M}_4$ benutzen wir als Ebene die Menge

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

also das Innere des Einheitskreises. Und als Geraden nehmen wir einfach diejenigen Abschnitte von gewöhnlichen Geraden im $\mathbb{R}^2$, die innerhalb von $\mathcal{D}$ liegen.

Dann ist sofort klar, dass die Inzidenz-Axiome gelten, und man sieht leicht, dass auch die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

Es gibt jedoch bei diesem Modell Punkte im Innern eines Winkels, die nicht auf einer Sehne liegen:



1.5 Modelle

Im Jahre 1637 veröffentlichte der französische Philosoph René Descartes als Anhang zum „Discours de la méthode . . .“ ein Werk über Geometrie, in dem er die Algebraisierung der Geometrie anstrebte. Er versuchte durch Wahl eines Ursprungs in der Ebene Punkte und geometrische Örter mit Hilfe von Koordinaten zu beschreiben. Ähnliches hatte auch schon Pierre de Fermat versucht.

Es dauerte noch lange, bis eine saubere Darstellung der reellen Zahlen zur Verfügung stand, aber heute kennen wir natürlich das klassische Beispiel eines Modells der ebenen euklidischen Geometrie, es ist unser Modell $\mathcal{M}_2$.

Als Ebene $\mathcal{E}$ benutzt man die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller Paare von reellen Zahlen. Eine Gerade in $\mathcal{E}$ ist eine Menge der Form

$$g = \{(x, y) \in \mathcal{E} : ax + by = q\}, \text{ mit } (a, b) \neq (0, 0).$$

Ist $b = 0$, so ist $g = \{(x, y) : x = c\}$ (mit $c = q/a$) eine sogenannte „vertikale“ Gerade. Ist $b \neq 0$, so ist $g = \{(x, y) : y = mx + t\}$ (mit Steigung $m = -a/b$ und Achsenabschnitt $t = q/b$) eine „schräge Gerade“ (mit $m = 0$ sind die „horizontalen“ Geraden Spezialfälle der schrägen Geraden). Eine vertikale Gerade kann nicht schräg sein, und umgekehrt.

Die Inzidenz-Axiome sind erfüllt:

- Gegeben seien zwei Punkte $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Ist $x_1 = x_2 =: x_0$, so verbindet die vertikale Gerade $x = x_0$ die beiden Punkte. Ist $x_1 \neq x_2$, so verbindet die Gerade $y = mx + t$ mit

$$m := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad t := y_1 - mx_1 = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$$

die Punkte.

- Sei $ax + by = q$ eine beliebige Gerade g . Ist die Gerade vertikal, also $b = 0$, so liegen z.B. die Punkte $(q/a, 0)$ und $(q/a, 1)$ auf g . Ist g schräg, also $b \neq 0$, so liegen $(q/a, 0)$ und $((q - b)/a, 1)$ auf g .
- Die Ebene enthält die drei paarweise verschiedenen Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$, die nicht auf einer Geraden liegen.

Bevor wir zeigen, dass in $\mathcal{M}_2$ die Anordnungsaxiome gelten, betrachten wir noch ein ganz anderes Axiomensystem.

Im Jahre 1932 stellte George D. Birkhoff ein neues Axiomensystem für die Euklidische Geometrie vor (Annals of Mathematics, vol. 33: „A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor“), das sich stark auf die reellen Zahlen bezieht und Lineal und Winkelmesser benutzt. Dieses Axiomensystem wurde später

(1959) von Saunders MacLane abgewandelt (The American Mathematical Monthly, vol. 66: „Metric Postulates for Plane Geometry“). In den 60ern erstellte die School Mathematics Study Group (MSG) ein Axiomensystem für den Gebrauch in High School Kursen, das aus 22 Axiomen besteht und eine Mischung aus den Auffassungen von Hilbert und Birkhoff darstellt. Die 22 Axiome sind alles andere als unabhängig, erlauben aber einen schnellen Zugang zu den wesentlichen Inhalten der Geometrie ohne den Umweg über unzählige Hilfssätze.

Im Axiomensystem von Birkhoff werden Punkte und Geraden wie üblich als undefinierte Begriffe eingeführt, hinzu kommen noch zwei undefinierte reelle Funktionen:

- Je zwei Punkten A, B wird eine reelle Zahl $d(A, B) \geq 0$ zugeordnet, ihr „Abstand“, mit $d(A, B) = d(B, A)$.
- Je drei paarweise verschiedenen (angeordneten) Punkten A, O, B wird ihr „Winkelmaß“ $\angle AOB$ zugeordnet, eine reelle Zahl $\text{mod } 2\pi$.

Zwei reelle Zahlen x, y heißen „kongruent modulo 2π “ (in Zeichen $x \equiv y \pmod{2\pi}$), falls $x - y$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation, und die Äquivalenzklassen nennt man reelle Zahlen modulo 2π . Alle Winkel von 0 bis 2π sind möglich.

Nun wird gefordert:

Postulat I (Axiom vom Lineal):

Zu jeder Geraden ℓ gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi_\ell : \ell \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|\varphi_\ell(B) - \varphi_\ell(A)| = d(A, B) \quad \text{für alle } A, B.$$

Postulat II (Inzidenz-Axiom):

Zu je zwei gegebenen Punkten $P \neq Q$ gibt es genau eine Gerade ℓ mit $P, Q \in \ell$.

Der Begriff der Strecke kann nun leicht eingeführt werden. Sind $P \neq Q$ zwei Punkte, so bestimmen sie genau eine Gerade ℓ , und zu der gibt es ein „Lineal“ $\varphi_\ell : \ell \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $p = \varphi_\ell(P) < \varphi_\ell(Q) = q$, so setze man $\overline{PQ} = \varphi_\ell^{-1}([p, q])$. Wir werden weiter unten sehen, dass die Definition unabhängig von der Auswahl des Lineals ist.

Strahlen (Halbgeraden) werden analog eingeführt. Dann kann man jedem Punkt O die Menge $\mathcal{S}_O$ der von O ausgehenden Strahlen zuordnen.

Postulat III (Axiom vom Winkelmesser):

Zu jedem Punkt O gibt es eine bijektive Abbildung $\theta : \mathcal{S}_O \rightarrow \mathbb{R} \text{ mod } 2\pi$ mit folgender Eigenschaft: Sind $\ell, m \in \mathcal{S}_O$ und $A \neq O$ und $B \neq O$ Punkte mit $A \in \ell$, $B \in m$, so ist

$$\theta(m) - \theta(\ell) \pmod{2\pi} = \angle AOB.$$

Wenn B auf einer Geraden s mit $O \notin s$ stetig variiert (und der Strahl von O aus durch B mit m_B bezeichnet wird), so variiert auch $\theta(m_B)$ in $\mathbb{R}$ stetig.

Ein Dreieck besteht aus den drei Strecken, die die Eckpunkte des Dreiecks verbinden.

Postulat IV (Ähnlichkeitsaxiom):

Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Gibt es eine Konstante $k > 0$, so dass $d(A', B') = k \cdot d(A, B)$, $d(A', C') = k \cdot d(A, C)$ und $\angle B'A'C' = \angle BAC$, so ist $d(B', C') = k \cdot d(B, C)$, $\angle C'B'A' = \angle CBA$ und $\angle A'C'B' = \angle ACB$.

Auf die Postulate III und IV werden wir jetzt nicht näher eingehen, wir wollen zunächst nur zeigen, dass die Postulate I und II im Modell $\mathcal{M}_2$ erfüllt sind. Als Funktion d benutzen wir die euklidische Standard-Metrik:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Die bijektiven Abbildungen φ_ℓ kann man dann folgendermaßen definieren:

- Sei $\ell = \{(x, y) : x = x_0\}$ eine vertikale Gerade: Dann setze man $\varphi_\ell^{-1}(t) := (x_0, t)$, also $\varphi_\ell : (x_0, y) \mapsto y$.
- Ist $\ell = \{(x, y) : y = mx + q\}$ eine schräge Gerade, so setze man

$$\varphi_\ell^{-1}(t) := \left(\frac{t}{\sqrt{1+m^2}}, m \cdot \frac{t}{\sqrt{1+m^2}} + q \right),$$

$$\text{also } \varphi_\ell : (x, mx + q) \mapsto x\sqrt{1+m^2}.$$

Der Grund für die unerwartet komplizierte Definition der Lineale wird gleich klar werden. Es seien zwei Punkte $A \neq B$ gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade, die A und B verbindet. Der vertikale Fall ist trivial, deshalb betrachten wir nur den Fall, dass es reelle Zahlen $m \neq 0$ und q gibt, so dass gilt:

$$A = (t_1, mt_1 + q) \quad \text{und} \quad B = (t_2, mt_2 + q).$$

Dann ist $\ell = \{(x, y) : y = mx + q\}$ und $d(A, B) = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + (mt_2 - mt_1)^2} = |t_2 - t_1| \cdot \sqrt{1+m^2}$, also

$$|\varphi_\ell(B) - \varphi_\ell(A)| = |t_2\sqrt{1+m^2} - t_1\sqrt{1+m^2}| = |t_2 - t_1|\sqrt{1+m^2} = d(A, B).$$

Postulat I und II sind somit erfüllt, und wir können nun eine „Zwischen“-Beziehung einführen. Dazu müssen wir erst mal untersuchen, was ein Wechsel des Lineals bewirkt.

5.1 Hilfssatz. *Sei ℓ eine Gerade. Sind $\varphi : \ell \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi : \ell \rightarrow \mathbb{R}$ zwei „Lineale“ im Sinne der Birkhoff'schen Postulate, so gibt es eine Konstante c , so dass entweder $\psi(A) = \varphi(A) + c$ oder $\psi(A) = -\varphi(A) + c$ für alle $A \in \ell$ gilt.*

BEWEIS: Man kann einen Punkt $P_0 \in \ell$ mit $\psi(P_0) = 0$ wählen. Es sei $p := \varphi(P_0)$. Dann gilt für beliebiges $A \in \ell$, $A \neq P_0$:

$$|\psi(A)| = |\psi(A) - \psi(P_0)| = d(P_0, A) = |\varphi(A) - \varphi(P_0)| = |\varphi(A) - p|,$$

also $\psi(A) = \varepsilon(\varphi(A) - p)$ mit $\varepsilon = \varepsilon(A) \in \{\pm 1\}$.

Wir wollen zeigen, dass ε nicht von A abhängt. Dazu nehmen wir an, dass es Punkte $A_1, A_2 \neq P_0$ auf ℓ gibt, so dass $\varepsilon(A_1) = 1$ und $\varepsilon(A_2) = -1$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} |\varphi(A_2) - \varphi(A_1)| &= d(A_1, A_2) = |\psi(A_2) - \psi(A_1)| \\ &= |-\varphi(A_2) + p - \varphi(A_1) + p| = |\varphi(A_2) + \varphi(A_1) - 2p|, \end{aligned}$$

also $\varphi(A_2) - \varphi(A_1) = \pm(\varphi(A_2) + \varphi(A_1) - 2p)$. Es muss also entweder $\varphi(A_1) = p$ oder $\varphi(A_2) = p$ sein, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $A_1 \neq P_0$ und $A_2 \neq P_0$ ist. Also ist immer $\varepsilon = 1$ oder immer $\varepsilon = -1$, und man kann $c := -p\varepsilon$ wählen. ■

Sind nun A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden ℓ , so definiert man:

$$A - B - C : \Longleftrightarrow \exists \varphi_\ell \text{ mit } \varphi_\ell(A) < \varphi_\ell(B) < \varphi_\ell(C).$$

Da mit φ_ℓ auch $\varphi_\ell^* := -\varphi_\ell$ ein Lineal für ℓ ist, gilt:

$$A - B - C \Longleftrightarrow C - B - A.$$

Ist $\varphi(A) < \varphi(B) < \varphi(C)$ und $\psi(P) = \varphi(P) + c$ für alle $P \in \ell$, so ist auch $\psi(A) < \psi(B) < \psi(C)$. Ist dagegen $\psi(P) = -\varphi(P) + c$, so ist $\psi(C) < \psi(B) < \psi(A)$. Also ist die Beziehung $A - B - C$ wohldefiniert.

5.2 Satz. Für drei paarweise verschiedene Punkte A, B, C auf einer Geraden gilt $A - B - C$ genau dann, wenn $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ ist.

BEWEIS: a) Sei φ ein Lineal für die durch A, B, C bestimmte Gerade ℓ . Gilt $A - B - C$, so kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\varphi(A) < \varphi(B) < \varphi(C)$ ist. Dann folgt:

$$\begin{aligned} d(A, C) &= |\varphi(C) - \varphi(A)| = \varphi(C) - \varphi(A) \\ &= (\varphi(C) - \varphi(B)) + (\varphi(B) - \varphi(A)) \\ &= |\varphi(C) - \varphi(B)| + |\varphi(B) - \varphi(A)| = d(B, C) + d(A, B). \end{aligned}$$

b) Sei umgekehrt $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ für drei (paarweise verschiedene) Punkte von ℓ , φ ein Lineal für ℓ , $a := \varphi(A)$, $b := \varphi(B)$ und $c := \varphi(C)$. Die drei Zahlen a, b, c sind auch paarweise verschieden, und eine muss zwischen den beiden anderen liegen. Ist $a < c < b$, so ist $d(A, B) = |b - a| = b - a = b - c + c - a = d(C, B) + d(A, C) = d(C, B) + d(A, B) + d(B, C)$, also $d(B, C) = 0$, Widerspruch! Vertauschung von A und B zeigt, dass auch $b < c < a$ nicht gelten kann. Die Fälle $b < a < c$ und $c < a < b$ schließt man analog aus.

Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass b zwischen a und c liegt, also $A - B - C$ gilt. ■

Sind also die Postulate I und II des Birkhoff'schen Systems (wie etwa im Modell $\mathcal{M}_2$) erfüllt, so gelten auch die Anordnungsaxiome A-1 bis A-3.

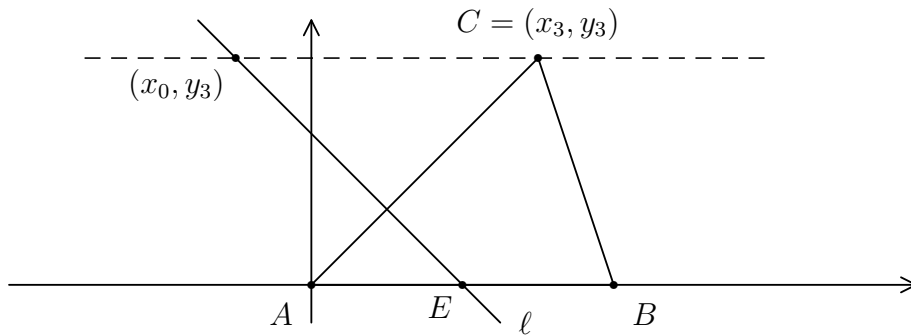
Nun seien zwei Punkte $A \neq B$ gegeben und ℓ die Gerade durch A und B . Dann gibt es ein Lineal $\varphi_\ell : \ell \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $a := \varphi_\ell(A) < \varphi_\ell(B) =: b$ ist. Wählt man irgend eine Zahl $c > b$ und setzt $C := \varphi_\ell^{-1}(c)$, so gilt $A - B - C$. Das liefert das Anordnungsaxiom A-4.

Unser Inzidenz-Axiom I-1 entspricht dem Birkhoff'schen Postulat II. Das Axiom I-2 folgt offensichtlich aus Postulat I. Das Axiom I-3 (die Existenz von drei nicht-kollinearen Punkten) kann man aus Postulat III herleiten (man wähle einen Punkt O , zwei von O ausgehende Strahlen, die nicht auf einer Geraden liegen, sowie Punkte $A, B \neq O$ auf diesen beiden Strahlen). Möchte man Postulat III nicht heranziehen, so muss man das Axiom I-3 zusätzlich fordern.

Wo stehen wir? Wir haben gezeigt, dass Postulat I und II im Modell $\mathcal{M}_2$ erfüllt sind, und wir haben gezeigt, dass man aus der Gültigkeit von Postulat I und II die Axiome I-1 bis I-3 und A-1 bis A-4 herleiten kann. Somit gelten auch diese Axiome in $\mathcal{M}_2$.

Das Pasch-Axiom wollen wir direkt in $\mathcal{M}_2$ nachweisen.

Wir betrachten drei nicht-kollineare Punkte A, B, C , sowie eine Gerade ℓ , die A, B und C nicht enthält. O.B.d.A. sei $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ und $C = (x_3, y_3)$ mit $y_3 > 0$. Die Gerade ℓ treffe $\overline{AB}$ im Punkte $E = (e, 0)$ mit $0 < e < b$. Ist ℓ vertikal, so kann man ℓ durch $\psi(t) := (e, t) = (e + tu, tv)$ mit $(u, v) = (0, 1)$ parametrisieren. Dann ist $\psi(0) = E$. Ist ℓ schräg, so kann man ℓ durch $\varphi(t) := (t, mt + q) = (e + (t - e)u, (t - e)v)$ mit $(u, v) = (1, m)$ parametrisieren (denn es muss $me + q = 0$ sein). In diesem Fall ist $\varphi(e) = E$. Da man φ durch $\psi(s) := \varphi(e + s)$ ersetzen kann, kann man die Parametrisierung von ℓ immer in der Form $\psi(t) = (e + tu, tv)$ geben, mit $v \neq 0$. O.B.d.A. sei $v > 0$ (sonst muss man mit negativen Parametern arbeiten).



Ist $t_0 := y_3/v > 0$, so ist $\psi(t_0) = (x_0, y_3)$ mit $x_0 = e + t_0u$. Es muss $x_0 \neq x_3$ sein, weil ℓ nicht den Punkt C enthält. O.B.d.A. sei $x_0 < x_3$.

Die Seite $\overline{AC}$ wird durch $\varphi(s) := (sx_3, sy_3)$ mit $0 \leq s \leq 1$ parametrisiert, und wegen $u = (x_0 - e)/t_0$ und $v = y_3/t_0$ ist $\psi(t) := (e + t \frac{x_0 - e}{t_0}, t \frac{y_3}{t_0})$.

Sei $s_0 := \frac{e}{x_3 - x_0 + e}$ und $t_0^* := t_0 s_0$. Dann ist $0 < s_0 < 1$ und

$$\begin{aligned}
\varphi(s_0) &= (s_0x_3, s_0y_3) = \left(\frac{ex_3}{x_3 - x_0 + e}, \frac{ey_3}{x_3 - x_0 + e} \right) \\
&= \left(e + \left[\frac{ex_3}{x_3 - x_0 + e} - e \right], \frac{t_0e}{x_3 - x_0 + e} \cdot \frac{y_3}{t_0} \right) \\
&= \left(e + \frac{t_0e}{x_3 - x_0 + e} \left[\frac{x_3}{t_0} - \frac{x_3 - x_0 + e}{t_0} \right], \frac{t_0e}{x_3 - x_0 + e} \cdot \frac{y_3}{t_0} \right) \\
&= \left(e + t_0^* \cdot \frac{x_0 - e}{t_0}, t_0^* \cdot \frac{y_3}{t_0} \right) = \psi(t_0^*).
\end{aligned}$$

Also trifft ℓ die Seite $\overline{AC}$. Damit ist gezeigt, dass Axiom A-5 erfüllt ist. Der $\mathbb{R}^2$ ist ein Modell für die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome.

Wir machen nun ein kleines Gedankenexperiment. Wir lassen den alten Pythagoras ein Modell für die Ebene konstruieren:

Ausgangspunkt sei die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, zu Ehren der von den Pythagoräern gelehrt Harmonie der Zahlen. Dies kann aber nicht als Modell reichen, denn es gibt ja auch irrationale Längen, die z.B. als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Katheten auftreten können. Normiert man eine Kathete zu 1 und hat die zweite Kathete die Länge ω , so hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1 + \omega^2}$. Will man die Hypotenuse entlang der positiven x -Achse antragen, so müssen solche irrationalen Zahlen auch zugelassen werden.

Ist K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ und $\alpha \in K$, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$, so setzen wir

$$K(\sqrt{\alpha}) := \{a + b\sqrt{\alpha} \mid a, b \in K\}. \quad (,K \text{ adjungiert } \sqrt{\alpha}\text{,})$$

Man rechnet leicht nach, dass $K(\sqrt{\alpha})$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, d.h. die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ führen aus $K(\sqrt{\alpha})$ nicht heraus. Aber es gilt noch mehr: Ist $x := a + b\sqrt{\alpha} \neq 0$, so muss $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sein, und damit auch $a - b\sqrt{\alpha} \neq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{a - b\sqrt{\alpha}}{(a + b\sqrt{\alpha})(a - b\sqrt{\alpha})} \\
&= \frac{a}{a^2 - b^2\alpha} - \frac{b}{a^2 - b^2\alpha}\sqrt{\alpha}.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $K(\sqrt{\alpha})$ sogar ein Körper ist. Man nennt $K(\sqrt{\alpha})$ eine **quadratische Körpererweiterung** von K . Diese Erweiterung ist zugleich ein 2-dimensionaler K -Vektorraum, mit der Basis $\{1, \sqrt{\alpha}\}$.

Definition:

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt **pythagoräisch**, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{1 + \omega_i^2})$ mit $\omega_i \in K_{i-1}$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine pythagoräische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\omega \mapsto \sqrt{1 + \omega^2}$ anwendet.

Mit $\text{Pyth}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge aller pythagoräischen Zahlen.

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\text{Pyth}(\mathbb{Q})$ ein Körper ist.

Dann gewinnt man ein neues Modell $\mathcal{M}_5$ mit der Ebene

$$\mathcal{E}_p := \text{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \text{Pyth}(\mathbb{Q}).$$

Die Geraden seien die Mengen der Gestalt

$$g = \{(x, y) \in \mathcal{E}_p : ax + by = r\}, \quad a, b, r \in \text{Pyth}(\mathbb{Q}), \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Inzidenz-Axiome erfüllt sind. Die Größen a, b, r der Geraden durch zwei gegebene Punkte erhält man über rein rationale Operationen.

Die Zwischen-Beziehung vererbt sich von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathcal{E}$, und es ist klar, dass dann auch das Pasch-Axiom gilt.

Natürlich ist die pythagoräische Ebene kein Modell für das Axiomensystem von Birkhoff, denn das benutzt ausdrücklich die reellen Zahlen als Modell für Geraden.