Grundlagen der Geometrie

Vorlesungsausarbeitung

zum WS 2010/11

von Prof. Dr. K. Fritzsche

Inhalt

Kapitel 0

Grundlagen der Schulgeometrie

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit ebener Geometrie. Dabei geht es um Punkte, Geraden und ihre Positionen zueinander.

Folgende Bezeichnungsweisen sind üblich:

- ***Punkte*** werden mit Großbuchstaben bezeichnet: A, B, C, D, ...
- ***Geraden*** werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet: g, h, l, m, n, ...
- AB bezeichnet die ***Verbindungsstrecke*** der Punkte A und B, manchmal auch die Gerade durch A und B.
- $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet den von A ausgehenden ***Strahl*** in Richtung B.
- ABC bezeichnet das ***Dreieck*** mit den Ecken A, B und C, manchmal (in der Raumgeometrie) auch die Ebene durch A, B und C.

Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt, oder sie sind ***parallel***. Parallelität beinhaltet auch Gleichheit. Zwei verschiedene Geraden AB und AC bilden einen ***Winkel*** $\angle BAC$.

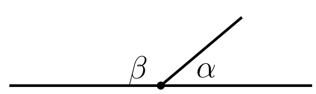
- Winkel werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet: α, β, γ, ...

Man unterscheidet:

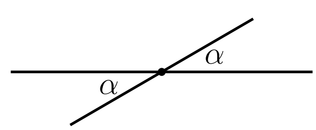
spitzer Winkel | rechter Winkel | stumpfer Winkel | gestreckter Winkel

Zur Definition des rechten Winkels kommen wir später. Jetzt erst mal begnügen wir uns mit dem Winkelmesser.

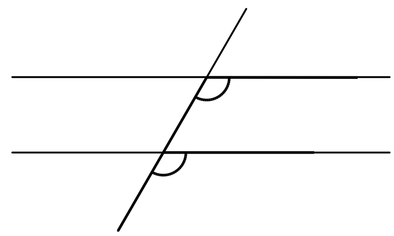
Nebenwinkel ergänzen sich zu $180°$:

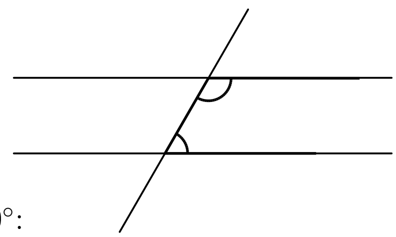


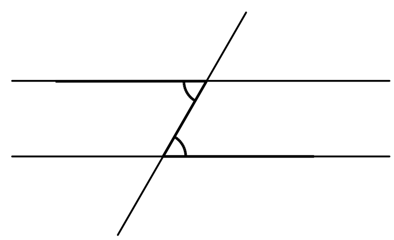
Scheitelwinkel sind gleich:



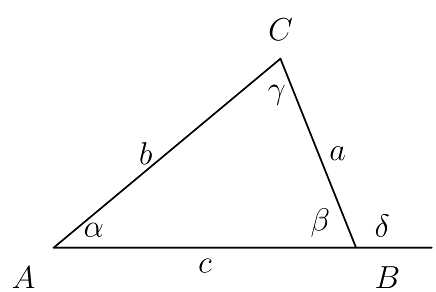
Von besonderer Bedeutung sind die Beziehungen zwischen Winkel an Parallelen. Hier unterscheidet man

1. ***F***- oder ***Stufenwinkel*** sind gleich: 

2. ***E***- oder ***Ergänzungswinkel*** ergänzen sich zu 180°: 

3. ***Z***- oder ***Wechselwinkel*** sind gleich: 

In einem Dreieck ergeben die drei Winkel zusammen immer 180°. Das ist ein zentraler Satz der euklidischen Geometrie. Ein beträchtlicher Teil der Vorlesung wird sich dem Problem widmen, was passiert, wenn dieses Ergebnis nicht mehr vorausgesetzt werden kann.



Der **Außenwinkelsatz** besagt, dass ein Außenwinkel (z.B. δ) gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel ist (hier also $\delta = \alpha + \gamma$).

Man nennt ein Dreieck ***spitzwinklig***, wenn alle drei Winkel spitz sind, bzw. ***rechtwinklig*** oder ***stumpfwinklig***, wenn einer der drei Winkel ein Rechter oder stumpf ist.

Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten (den „Schenkeln“) nennt man ***gleichschenklig***, ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten nennt man ***gleichseitig***. Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind die an der dritten Seite (der „Basis“) anliegenden

„Basiswinkel“ gleich. Dementsprechend betragen alle Winkel im gleichseitigen Dreieck 60°.

Zwei Dreiecke heißen ***kongruent***, wenn alle entsprechenden Seiten und Winkel gleich sind. Es gibt eine Reihe von „Kongruenzsätzen“, die besagen, dass man aus der Gleichheit dreier Größen schon auf die Kongruenz schließen kann.

1. **SSS**: Stimmen zwei Dreiecke in allen drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

2. **SWS**: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

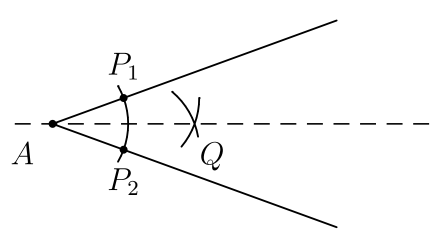
3. **SSW**: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem anliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

4. **WSW**: Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent.

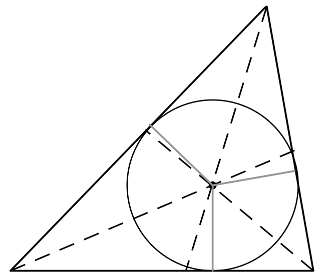
5. **SWW**: Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

Konstruktionen werden heute in der Schulgeometrie mit dem Geo-Dreieck durchgeführt (also mit einem Lineal mit Maßeinteilung und einem Winkelmesser). In der klassischen euklidischen Geometrie geht es dagegen um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung). Damit kommt der ***Kreis*** ins Spiel, in altmodischer Sprache „der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M (dem ***Mittelpunkt***) einen festen gegebenen Abstand (den ***Radius***) haben“. Mit Hilfe des Kreises, also des Zirkels, kann man einige wichtige Grundkonstruktionen durchführen:

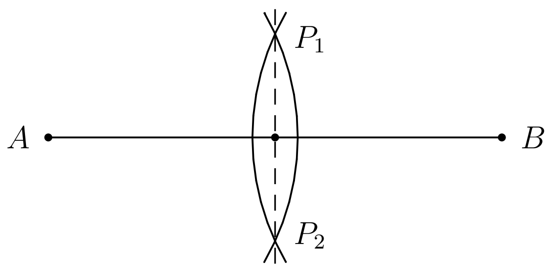
1. **Halbierung eines Winkels:** Ein Kreis um den Scheitel A des Winkels trifft die Schenkel in zwei Punkten P_1, P_2. Die Kreise um P_1 bzw. P_2 mit gleichem Radius treffen sich in einem Punkt Q. Die Verbindungsgerade AQ ist die ***Winkelhalbierende***.



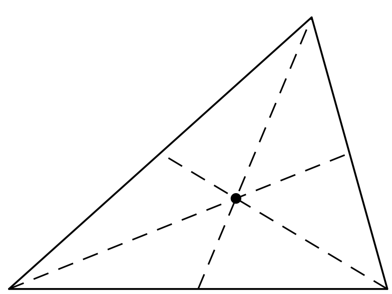
   Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des ***Inkreises***. Zum Beweis überlege man sich: Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den beiden Winkelschenkeln den gleichen Abstand haben.



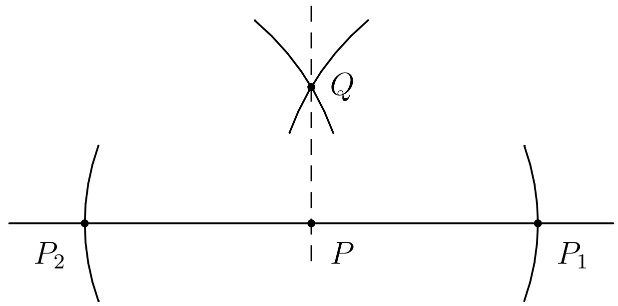
2. **Halbierung einer Strecke:** Um die Strecke AB zu halbieren, schlägt man Kreise mit gleichem Radius um A und B, die sich in zwei Punkten P_1 und P_2 treffen. Die Verbindungsgerade von P_1 und P_2 trifft AB im Mittelpunkt der Strecke.



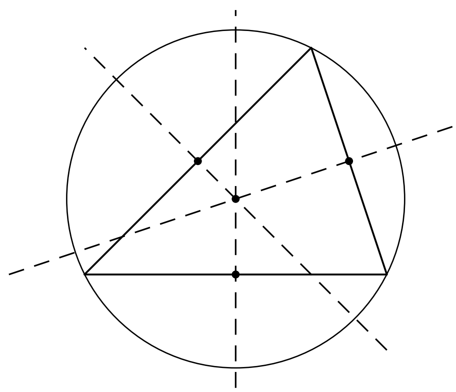
Die Geraden, die durch eine Ecke eines Dreiecks und die Mitte der gegenüberliegenden Seite gehen, nennt man ***Seitenhalbierende***. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt, dem ***Schwerpunkt*** des Dreiecks.



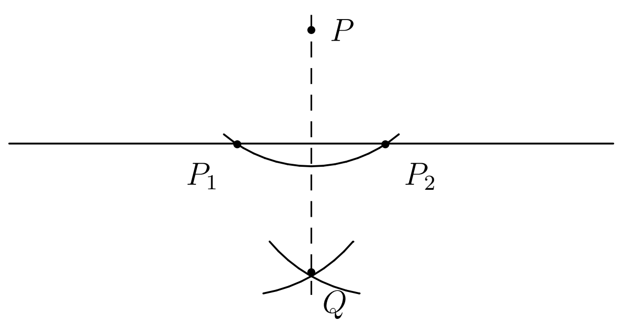
3. **Errichten einer Senkrechten:** Um in einem Punkt P die Senkrechte zu einer gegebenen Geraden zu errichten, schneidet man die Gerade mit einem Kreis um P. So erhält man zwei Punkte P_1, P_2. Die Kreise um P_1 und P_2 mit gleichem Radius schneiden sich in einem Punkt Q. Die Gerade durch P und Q ist die gesuchte Senkrechte.



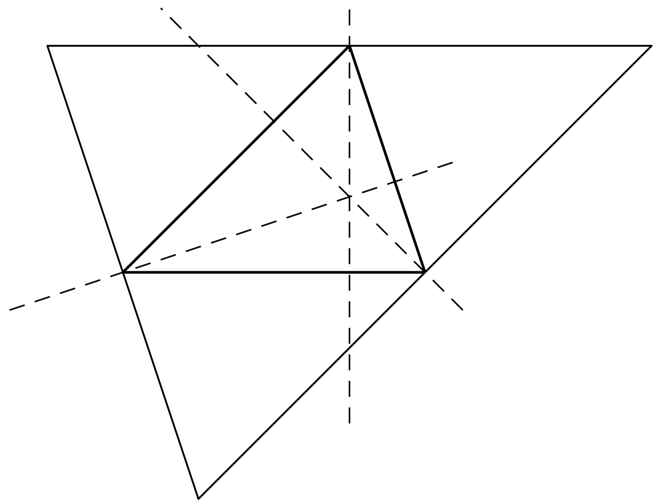
Errichtet man im Mittelpunkt einer Seite eines Dreiecks die Senkrechte, so erhält man eine ***Mittelsenkrechte***. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des ***Umkreises***. Beim Beweis beachte man, dass die Mittelsenkrechte zu einer Seite der geometrische Ort aller Punkte ist, die von den beiden Endpunkten der Seite den gleichen Abstand haben.



4. **Fällen des Lotes:** Um von einem Punkt P außerhalb einer Geraden g das Lot auf g zu fällen, zeichnet man einen Kreis um P, der g in zwei Punkten P_1 und P_2 trifft. Zwei Kreise um P_1 und P_2 mit gleichem Radius treffen sich in einem Punkt Q, und die Gerade durch Q und P ist das gewünschte Lot.



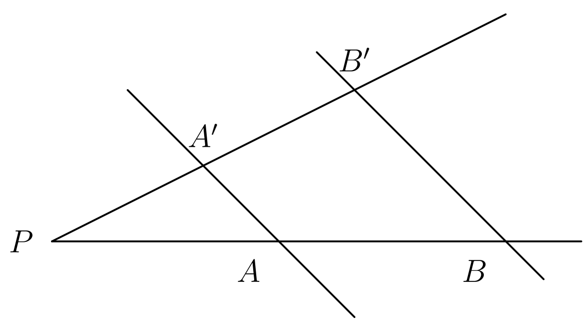
Fällt man in einem Dreieck von einer Ecke das Lot auf die gegenüberliegende Seite, so erhält man eine ***Höhe***. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem ***Höhenschnittpunkt***. Zum Beweis: Zieht man durch die drei Ecken des gegebenen Dreiecks ABC Parallelen, so bilden diese ein größeres Dreieck, das sich aus vier zu ABC kongruenten Dreiecken zusammensetzt. Die Höhen des ursprünglichen Dreiecks sind die Mittelsenkrechten des großen Dreiecks.



Man kann nun auch zu den Kongruenzsätzen jeweils Verfahren angeben, wie man aus den gegebenen drei Stücken das Dreieck konstruieren kann.

Auf die Sätze von Thales und Pythagoras gehen wir später ein. Erinnert werden soll hier noch an die ***Strahlensätze:***

Zwei sich in einem Punkt P schneidende Geraden m und n werden von zwei parallelen Geraden p und q in Punkten A, A' bzw. B, B' getroffen.

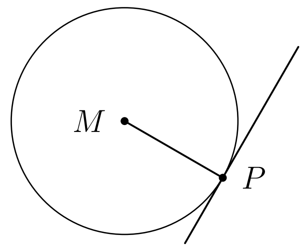


Dann gilt:

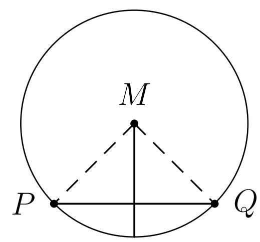
1. $PA : AB = PA' : A'B'$
2. $PA : PB = PA' : PB'$
3. $AA' : BB' = PA : PB$

Trifft eine Gerade einen Kreis mit Mittelpunkt M, so gibt es zwei Möglichkeiten:

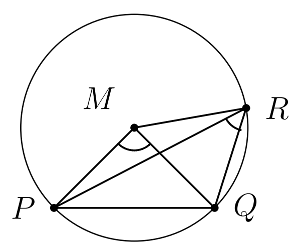
1. Die Gerade berührt den Kreis in einem Punkt P, ist also die ***Tangente*** an den Kreis im Punkt P. Dann steht der Radius MP auf der Tangenten senkrecht.



2. Die Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten P und Q. Man nennt PQ eine ***Sehne***. Das Lot vom Mittelpunkt M auf die Sehne halbiert die Sehne und den ***Zentrumswinkel*** $\angle PMQ$.



Ist R ein Punkt auf der Peripherie des Kreises, so nennt man den Winkel $\angle PRQ$ einen ***Peripheriewinkel*** über der Sehne PQ. Jeder solche Peripheriewinkel ist halb so groß wie der Zentrumswinkel über der Sehne.



Beim Beweis beachte man, dass MP, MQ und MR Radien sind und dass deshalb in der Figur mehrere gleichschenklige Dreiecke auftreten.