§ 5 Dolbeault-Theorie

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

Ist $U \subset X$ offen, so sei die Menge der beliebig oft diffenzierbaren reell- (bzw. komplex-) wertigen Funktionen auf U mit $\mathscr{E}(U)$ (bzw. $\mathscr{E}(U, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nun sei $a \in X$ fest gewählt.

Definition

Eine ***Derivation*** (oder ein ***Tangentialvektor***) in a ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $D : \mathscr{E}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

$$D(f \cdot g) = f(a) \cdot D(g) + g(a) \cdot D(f).$$

Die Menge der Derivationen (oder Tangentialvektoren) in a wird mit $T_a(X)$ bezeichnet.

Bemerkungen:

1. $T_a(X)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. Ist f eine (reelle) Konstante, so ist $D(f) = 0$,
   (denn $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) = 2D(1)$, also $D(1) = 0$ und damit $D(c) = D(c \cdot 1) = c \cdot D(1) = 0$).

3. Sei φ eine lokale Karte in a, $z_\nu = x_\nu + \mathrm{i}\, y_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, die zugehörigen Koordinaten. Dann sind die partiellen Ableitungen

   $$\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \frac{\partial}{\partial y_\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, n ,$$

   $$\text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x_\nu}(f) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y_\nu}(f) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial y_\nu}(\varphi(a))$$

   offensichtlich Derivationen in a.

5.1. Satz

Seien $U = U(a) \subset X$ eine offene Menge und $f, g \in \mathscr{E}(X)$ mit $f|_U = g|_U$. Dann ist $D(f) = D(g)$ für jede Derivation D in a.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $D(f) = 0$ ist, wenn $f|_U = 0$ ist. Dafür benutzen wir eine Funktion $g \in \mathscr{E}(X)$ mit $g|_{X \setminus U} = 1$ und $g|_V = 0$ für eine Umgebung $V = V(a) \subset\subset U$. Dann ist $g \cdot f = f$ und

$$D(f) = g(a) \cdot D(f) + D(g) \cdot f(a) = 0.$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Die Werte $D(f)$ einer Derivation in a auf den Funktionen $f \in \mathscr{E}(X)$ hängen also nur vom Verhalten von f in der Nähe des Punktes a ab, und zwar vom Keim von f in a.

Beschränken wir uns für den Augenblick auf den Fall $X = \mathbb{C}^n$ und $a = \mathbf{0}$. Eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion f besitzt in der Nähe des Nullpunktes eine Darstellung

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\mathbf{z})x_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(\mathbf{z})y_\nu,$$

mit $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen g_ν und h_ν, sowie $g_\nu(\mathbf{0}) = f_{x_\nu}(\mathbf{0})$ und $h_\nu(\mathbf{0}) = f_{y_\nu}(\mathbf{0})$. Ist D eine Derivation im Nullpunkt, so ist

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\mathbf{0}) \cdot D(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(\mathbf{0}) \cdot D(y_\nu) \\ &= \Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu}\Big)(f). \end{aligned}$$

mit $a_\nu := D(x_\nu)$ und $b_\nu := D(y_\nu)$.

Das zeigt, dass die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ und $\dfrac{\partial}{\partial y_\nu}$ ein Erzeugendensystem des Tangentialraums im Nullpunkt bilden. Sie bilden sogar eine Basis. Ist nämlich

$$D := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} = 0,$$

so ist $0 = D(x_\mu) = \sum_\nu a_\nu (x_\mu)_{x_\nu} + \sum_\nu b_\nu (x_\mu)_{y_\nu} = a_\mu$ und analog $b_\mu = 0$, für $\mu = 1, \ldots, n$.

Auf Mannigfaltigkeiten kann der Beweis mit Hilfe von lokalen Koordinaten entsprechend geführt werden. Auch dort bilden die partiellen Ableitungen eine Basis des Tangentialraumes, der damit ein $2n$-dimensionaler reeller Vektorraum ist.

5.2. Satz

Ist $D \in T_a(X)$, so wird durch $D^c(g + \mathrm{i}\,h) := D(g) + \mathrm{i}\,D(h)$ eine Abbildung $D^c : \mathscr{E}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert, für die gilt:

1. *D^c ist $\mathbb{C}$-linear.*
2. *Für $f_1, f_2 \in \mathscr{E}(X, \mathbb{C})$ ist $D^c(f_1 \cdot f_2) = f_1(a)\, D^c(f_2) + f_2(a) \cdot D^c(f_1)$.*
3. *Für $f \in \mathscr{E}(X, \mathbb{C})$ ist $D^c\big(\overline{f}\big) = \overline{D^c(f)}$.*

BEWEIS: Ist f eine komplexe Konstante, so ist offensichtlich $D^c(f) = 0$. Sei nun $f_1 = g + \mathrm{i}\,h$ und $f_2 = u + \mathrm{i}\,v$. Dann ist

$$\begin{aligned} D^c(f_1 \cdot f_2) &= D^c[(g + \mathrm{i}\,h)(u + \mathrm{i}\,v)] \\ &= D^c[(gu - hv) + \mathrm{i}\,(gv + hu)] \\ &= D(gu - hv) + \mathrm{i}\,D(gv + hu) \\ &= g(a)D(u) + u(a)D(g) - h(a)D(v) - v(a)D(h) \\ &\qquad + \mathrm{i}\,[g(a)D(v) + v(a)D(g) + h(a)D(u) + u(a)D(h)] \\ &= (g(a) + \mathrm{i}\,h(a))D(u) + (-h(a) + \mathrm{i}\,g(a))D(v) \\ &\qquad + (u(a) + \mathrm{i}\,v(a))D(g) + (-v(a) + \mathrm{i}\,u(a))D(h) \\ &= (g(a) + \mathrm{i}\,h(a))D^c(u + \mathrm{i}\,v) + (u(a) + \mathrm{i}\,v(a))D^c(g + \mathrm{i}\,h) \\ &= f_1(a)D(f_2) + f_2(a)D(f_1). \end{aligned}$$

Ist f_1 konstant, so ergibt die Produktregel die $\mathbb{C}$-Linearität von D^c.

Schließlich ist $D^c(\overline{g + \mathrm{i}\,h}) = D^c(g - \mathrm{i}\,h) = D(g) - \mathrm{i}\,D(h) = \overline{D^c(g + \mathrm{i}\,h)}$. ∎

D^c kann natürlich insbesondere auf alle Funktionen angewandt werden, die in der Nähe des Punktes a holomorph sind. Erstaunlicherweise gilt:

5.3. Satz

Eine Derivation $D \in T_a(X)$ ist durch die Werte von D^c auf den Funktionen f, die in einer Umgebung von a holomorph sind, festgelegt. Ist $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ eine lokale Karte in a, $c_\nu := D(z_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, so ist $D^c(f) = \mathbf{c} \cdot \nabla(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a))^\top$ für jede in a holomorphe Funktion $f \in \mathscr{E}(X, \mathbb{C})$. Umgekehrt gibt es zu jedem $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ genau eine Derivation mit dieser Eigenschaft.

BEWEIS: Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, dass $X = \mathbb{C}^n$ und $a = \mathbf{0}$ ist. Ist $D = \sum_{\nu=1}^n a_\nu\, \partial/\partial x_\nu + \sum_{\nu=1}^n b_\nu\, \partial/\partial y_\nu$ eine Derivation im Nullpunkt, so ist $D^c(z_\nu) = D(x_\nu) + \mathrm{i}\,D(y_\nu) = a_\nu + \mathrm{i}\,b_\nu =: c_\nu$. Deshalb ist D schon durch die Real- und Imaginärteile der Werte $D^c(z_\nu)$ festgelegt.

Wir erinnern uns nun an die Gleichungen des Wirtinger-Kalküls:

$$\begin{aligned} & f_{z_\nu} = \frac{1}{2}\big(f_{x_\nu} - \mathrm{i}\,f_{y_\nu}\big) \quad \text{und} \quad f_{\overline{z}_\nu} = \frac{1}{2}\big(f_{x_\nu} + \mathrm{i}\,f_{y_\nu}\big), \\ \text{bzw.} \quad & f_{x_\nu} = f_{z_\nu} + f_{\overline{z}_\nu} \quad \text{und} \quad f_{y_\nu} = \mathrm{i}\,(f_{z_\nu} - f_{\overline{z}_\nu}). \end{aligned}$$

Ist f eine beliebige holomorphe Funktion, also $f_{\overline{z}_\nu} = 0$, so ist $f_{x_\nu} = -\mathrm{i}\,f_{y_\nu}$ und damit $f_{z_\nu} = f_{x_\nu}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} D^c(f) &= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_{x_\nu}(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f_{y_\nu}(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_{z_\nu}(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \,\mathrm{i}\, f_{z_\nu}(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \mathrm{i}\, y_\nu) f_{z_\nu}(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{c} \cdot \nabla f(\mathbf{0})^\top . \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ gegeben, so gibt es natürlich einen Tangentialvektor mit den Koeffizienten $a_\nu = \mathrm{Re}(c_\nu)$ und $b_\nu = \mathrm{Im}(c_\nu)$. Dieser erfüllt die gewünschte Gleichung und ist wegen des ersten Teils des Beweises eindeutig bestimmt. ∎

Ist $D \in T_a(X)$, $a_\nu + \mathrm{i}\, b_\nu = c_\nu := D^c(z_\nu)$ und f eine beliebige $\mathscr{C}^\infty$-Funktion, so ist

$$\begin{aligned} D^c(f) &= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_{x_\nu}(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f_{y_\nu}(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \big(f_{z_\nu}(\mathbf{0}) + f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{0}) \big) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \,\mathrm{i}\, \big(f_{z_\nu}(\mathbf{0}) - f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{0}) \big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_{z_\nu}(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{c_\nu} f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

Formal kann man daher D immer in der Form

$$D = D^c = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{c_\nu} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}$$

schreiben. Speziell ist

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y_\nu} = \mathrm{i}\,\Big(\frac{\partial}{\partial z_\nu} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu} \Big).$$

Man beachte allerdings, dass die Wirtinger-Ableitungen $\partial/\partial z_\nu$ und $\partial/\partial \overline{z}_\nu$ keine Tangentialvektoren sind (obwohl sie auch die typischen Eigenschaften einer Derivation besitzen). Sie sind vielmehr Elemente des „komplexifizierten Tangentialraumes“ $T_a^c(X)$, auf den wir noch zurückkommen werden.

5.4. Satz

Der Tangentialraum $T_a(X)$ besitzt eine natürliche komplexe Struktur. Ist $D \in T_a(X)$ und $c \in \mathbb{C}$, so gibt es genau einen Tangentialvektor $cD \in T_a(X)$, so dass $(cD)^c(f) = c \cdot D^c(f)$ für jede in a holomorphe Funktion f gilt.

Beweis: Ist $D^c(z_\nu) = c_\nu$, so muss $(cD)^c(z_\nu) = cc_\nu$ sein. Also setzen wir

$$c\Big(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{c_\nu}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\Big) := \sum_{\nu=1}^{n} cc_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{cc_\nu}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}.$$

Speziell ist dann

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \mathrm{i}\Big(\frac{\partial}{\partial z_\nu} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\Big) = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial z_\nu} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{\partial}{\partial y_\nu} \quad \text{und} \quad \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y_\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Damit definiert die Multiplikation mit i einen Automorphismus $J : T_a(X) \to T_a(X)$ mit $J \circ J = -\mathrm{id}$. Es ist klar, dass der Tangentialraum damit zu einem (n-dimensionalen) komplexen Vektorraum wird. ■

Definition

Eine ***komplexe Derivation*** in a ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $D : \mathscr{E}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die gilt:

$$D(f \cdot g) = f(a) \cdot D(g) + g(a) \cdot D(f).$$

Die Menge der komplexen Derivationen in a wird mit $T_a^c(X)$ bezeichnet.

Eine komplexe Derivation D heißt ***reell***, falls $D(\overline{f}) = \overline{D(f)}$ für jede Funktion $f \in \mathscr{E}(X,\mathbb{C})$ gilt.

Die Wirtinger-Ableitungen $\partial/\partial z_\nu$ und $\partial/\partial \overline{z}_\nu$ gehören zu $T_a^c(X)$. Wie im reellen Fall kann man zeigen, dass sie eine Basis bilden. Also ist $\dim_{\mathbb{C}} T_a^c(X) = 2n$. Die Komplexifizierungen D^c von Elementen $D \in T_a(X)$ gehören ebenfalls zu $T_a^c(X)$. Sie bilden einen $2n$-dimensionalen reellen Untervektorraum des reell $4n$-dimensionalen Raumes. Ob sie auch einen komplexen Unterraum bilden, müssen wir noch untersuchen: Es ist

$$\Big(\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big)^c = \Big(\frac{\partial}{\partial y_\nu}\Big)^c = \mathrm{i}\,\big(\frac{\partial}{\partial z_\nu} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\big)$$

und

$$\mathrm{i}\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big)^c = \mathrm{i}\Big(\frac{\partial}{\partial z_\nu} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\Big).$$

Die komplexen Strukturen auf $T_a(X)$ und auf $T_a^c(X)$ passen also nicht zusammen, $T_a(X)$ ist **kein komplexer Unterraum** von $T_a^c(X)$!

5.5. Satz

Für eine komplexe Derivation $\widehat{D} = \sum_\nu c_\nu\, \partial/\partial z_\nu + \sum_\nu d_\nu\, \partial/\partial \overline{z}_\nu$ ist äquivalent:

1. *$d_\nu = \overline{c_\nu}$ für alle ν.*
2. *$\widehat{D}$ ist reell.*
3. *Es gibt ein $D \in T_a(X)$ mit $\widehat{D} = D^c$.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2): Leicht nachzurechnen, unter Verwendung des Wirtinger-Kalküls: Ist $\widehat{D} = \sum_\nu c_\nu \, \partial/\partial z_\nu + \sum_\nu \overline{c}_\nu \, \partial/\partial \overline{z}_\nu$ und $f \in \mathscr{E}(X, \mathbb{C})$, so ist

$$\begin{aligned}\widehat{D}(f) &= \sum_\nu c_\nu f_{z_\nu}(a) + \sum_\nu \overline{c}_\nu f_{\overline{z}_\nu}(a) \\ &= \sum_\nu \overline{\overline{c}_\nu \overline{f}_{\overline{z}_\nu}(a)} + \sum_\nu \overline{c_\nu \overline{f}_{z_\nu}(a)} \\ &= \overline{\widehat{D}(\overline{f})}.\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3): Für eine Funktion $f \in \mathscr{E}(X)$ sei $D(f) := \widehat{D}(f)$. Dann ist

$$\overline{D(f)} = \overline{\widehat{D}(f)} = \widehat{D}(\overline{f}) = \widehat{D}(f) = D(f),$$

also D reellwertig und damit ein reeller Tangentialvektor. Außerdem ist

$$D^c(g + \mathrm{i}\, h) = D(g) + \mathrm{i}\, D(h) = \widehat{D}(g) + \mathrm{i}\, \widehat{D}(h) = \widehat{D}(g + \mathrm{i}\, h),$$

weil $\widehat{D}$ $\mathbb{C}$-linear ist.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Es ist $d_\nu = \widehat{D}(\overline{z}_\nu) = D^c(\overline{z}_\nu) = \overline{D^c(z_\nu)} = \overline{\widehat{D}(z_\nu)} = \overline{c_\nu}$. ■

Definition

Die Räume

$$\begin{aligned} T'_a(X) &= T^{1,0}_a(X) &:=& \{D \in T^c_a(X) : D(\overline{f}) = 0 \text{ für holomorphes } f\} \\ \text{und} \quad T''_a(X) &= T^{0,1}_a(X) &:=& \{D \in T^c_a(X) : D(f) = 0 \text{ für holomorphes } f\} \end{aligned}$$

bezeichnet man als ***holomorphen*** bzw. ***antiholomorphen Tangentialraum*** in a.

Eine komplexe Derivation $D = \sum_\nu c_\nu \partial/\partial z_\nu + \sum_\nu d_\nu \partial/\partial \overline{z}_\nu$ liegt genau dann in $T^{1,0}_a(X)$ (bzw. in $T^{0,1}_a(X)$), wenn alle $d_\nu = 0$ (bzw. alle $c_\nu = 0$) sind. Daraus folgt:

$$T^c_a(X) = T^{1,0}_a(X) \oplus T^{0,1}_a(X).$$

Man beachte: Die Räume $T_a(X)$ und $T^{1,0}_a(X)$ sind zwar (als $\mathbb{C}$-Vektorräume) isomorph, aber in $T^c_a(X)$ ist $T_a(X) \cap T^{1,0}_a(X) = \{0\}$.

Definition

$T^*_a(X) := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(T_a(X), \mathbb{R})$ heißt der (reelle) ***Cotangentialraum*** in a.

$T^{*c}_a(X) := T^*_a(X) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(T_a(X), \mathbb{C})$ heißt der ***komplexifizierte Cotangentialraum*** in a.

Dann ist $T_a^*(X)$ ein $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $T_a^{*c}(X)$ ein $2n$-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition

Sei $a \in X$, $U = U(a) \subset X$ und $f \in \mathscr{E}(U, \mathbb{C})$. Dann wird das ***totale Differential*** $(\mathrm{d}f)_a \in T_a^{*c}(X)$ definiert durch

$$(\mathrm{d}f)_a(D) := D^c(f) = D(\operatorname{Re} f) + \mathsf{i}\, D(\operatorname{Im} f).$$

Es ist offensichtlich $\mathrm{d}(g + \mathsf{i}\, h)_a = (\mathrm{d}g)_a + \mathsf{i}\,(\mathrm{d}h)_a$, und speziell gilt:

$$\mathrm{d}z_\nu = \mathrm{d}x_\nu + \mathsf{i}\,\mathrm{d}y_\nu \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\overline{z}_\nu = \mathrm{d}x_\nu - \mathsf{i}\,\mathrm{d}y_\nu, \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\,.$$

Ist $D = \sum_\nu c_\nu \partial/\partial z_\nu + \sum_\nu \overline{c}_\nu \partial/\partial \overline{z}_\nu \in T_a(X)$, so ist

$$(\mathrm{d}f)_a(D) = \sum_\nu c_\nu \cdot f_{z_\nu}(z_0) + \sum_\nu \overline{c}_\nu \cdot f_{\overline{z}_\nu}(z_0).$$

Insbesondere ist $(\mathrm{d}z_\nu)_a(D) = c_\nu$ und $(\mathrm{d}\overline{z}_\nu)_a(D) = \overline{c}_\nu$. Daraus folgt: $dz_\nu := (\mathrm{d}z_\nu)_a$ ist $\mathbb{C}$-linear, und $d\overline{z}_\nu := (\mathrm{d}\overline{z}_\nu)_a$ ist $\mathbb{C}$-antilinear.

5.6. Satz

$\{dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n\}$ ist die zu $\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}\}$ duale Basis von $T_a^*(X)$ über $\mathbb{R}$.

Beweis: Klar! ∎

5.7. Satz

Ist $\widehat{D} \in T_a^c(X)$, so gibt es eindeutig bestimmte Derivationen $D_1, D_2 \in T_a(X)$, so dass gilt:

$$\widehat{D} = D_1^c + \mathsf{i}\; D_2^c.$$

Das bedeutet, dass $T_a^c(X) = T_a(X) \oplus \mathsf{i}\, T_a(X)$ ist, wobei die Multiplikation mit i innerhalb der komplexen Struktur auf $T_a^c(X)$ durchgeführt wird.

Beweis: Wird $\widehat{D}$ durch ein Paar von Vektoren $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ bestimmt, so sind Vektoren $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ gesucht, so dass gilt:

$$(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{c}}) + \mathsf{i}\,(\mathbf{d}, \overline{\mathbf{d}}) = (\mathbf{e}, \mathbf{f}).$$

Diese Gleichung kann man auflösen:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} + \overline{\mathbf{f}}) \quad \text{und} \quad \mathbf{d} = \frac{\mathsf{i}}{2}(\overline{\mathbf{f}} - \mathbf{e}).$$

Das ergibt die Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung. ∎

5.8. Satz

Die Abbildung $T_a^{*c}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_a^c(X), \mathbb{C})$ *mit* $\omega \mapsto \omega^c$ *und*

$$\omega^c\big((D_1)^c + \mathsf{i}\,(D_2)^c\big) := \omega(D_1) + \mathsf{i}\,\omega(D_2)$$

ist ein $\mathbb{C}$*-Vektorraum–Isomorphismus, und* $\{dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$ *die duale Basis zu* $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\}$ *von* $T_a^{*c}(X)$ *über* $\mathbb{C}$.

BEWEIS: 1) $\omega \mapsto \omega^c$ ist offensichtlich $\mathbb{R}$-linear. Ist $\omega^c = 0$, so ist $\omega(D) = \omega^c(D^c) = 0$ für jedes $D \in T_a(X)$. Also ist $\omega \mapsto \omega^c$ injektiv.

2) Wegen

$$\begin{aligned}
(\mathsf{i}\,\omega)^c\big((D_1)^c + \mathsf{i}\,(D_2)^c\big) &= (\mathsf{i}\,\omega)(D_1) + \mathsf{i}\,(\mathsf{i}\,\omega)(D_2) \\
&= \mathsf{i} \cdot \omega(D_1) - \omega(D_2) \\
&= \mathsf{i} \cdot [\omega(D_1) + \mathsf{i} \cdot \omega(D_2)] \\
&= \mathsf{i} \cdot [\omega^c\big((D_1)^c + \mathsf{i}\,(D_2)^c\big)]
\end{aligned}$$

ist $(\mathsf{i}\,\omega)^c = \mathsf{i} \cdot \omega^c$, die Abbildung $\omega \mapsto \omega^c$ also $\mathbb{C}$-linear. Da die Dimensionen der beiden beteiligten Räume gleich sind, sind diese isomorph. ∎

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}f)_a &= \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a)dx_\nu + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu}(a)dy_\nu \\
&= \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(a)dz_\nu + \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(a)d\overline{z}_\nu \quad .
\end{aligned}$$

Definition

Die ***Dolbeault-Differentiale*** $(\partial f)_a$ und $(\overline{\partial} f)_a$ sind gegeben durch

$$(\partial f)_a := \sum_\nu f_{z_\nu}(a)\,dz_\nu \quad \text{und} \quad (\overline{\partial} f)_a := \sum_\nu f_{\overline{z}_\nu}(a)\,d\overline{z}_\nu.$$

Dann gilt:

1. $(\partial f)_a$ ist $\mathbb{C}$-linear und $(\overline{\partial} f)_a$ ist $\mathbb{C}$-antilinear auf $T_a(X)$.
2. $(\mathrm{d}f)_a = (\partial f)_a + (\overline{\partial} f)_a$
3. f ist genau dann komplex differenzierbar in a, wenn $(\overline{\partial} f)_a = 0$ ist.

Im Folgenden beschränken wir uns auf den $\mathbb{C}^n$ und setzen $T_{\mathbf{z}} := T_{\mathbf{z}}(\mathbb{C}^n)$.

Definition

Eine ***r-dimensionale komplexwertige Differentialform*** in $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ ist eine alternierende r-fach $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung

$$\varphi : \underbrace{T_{\mathbf{z}} \times \ldots \times T_{\mathbf{z}}}_{r\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Die Menge aller dieser Differentialformen wird mit $\mathbf{A}^r_{\mathbf{z}}$ bezeichnet. Außerdem setzen wir $\mathbf{A}^0_{\mathbf{z}} := \mathbb{C}$.

Es ist dann $\mathbf{A}^1_{\mathbf{z}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbf{z}}, \mathbb{C}) = T^{*\,c}_{\mathbf{z}}$. Definiert man

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{1,0}_{\mathbf{z}} &:= \{\varphi \in \mathbf{A}^1_{\mathbf{z}} \,:\, \varphi(\mathrm{i}\,\xi) = \mathrm{i}\,\varphi(\xi)\} \\ \text{und} \quad \mathbf{A}^{0,1}_{\mathbf{z}} &:= \{\varphi \in \mathbf{A}^1_{\mathbf{z}} \mid \varphi(\mathrm{i}\,\xi) = -\mathrm{i}\,\varphi(\xi)\}, \end{aligned}$$

so folgt, dass $\mathbf{A}^{1,0}_{\mathbf{z}} \cap \mathbf{A}^{0,1}_{\mathbf{z}} = \{0\}$ ist.

Ist $\xi = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \dfrac{\partial}{\partial z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{c}_\nu \dfrac{\partial}{\partial z_\nu} \in T_z$, so ist $dz_\nu(\xi) = c_\nu$ und $d\overline{z}_\nu(\xi) = \overline{c}_\nu$, also

$$dz_\nu(\mathrm{i}\cdot\xi) = \mathrm{i}\; dz_\nu(\xi) \quad \text{und} \quad d\overline{z}_\nu(\mathrm{i}\cdot\xi) = -\,\mathrm{i}\; d\overline{z}_\nu(\xi).$$

Damit ist $\mathrm{d}z_\nu \in \mathbf{A}^{1,0}_{\mathbf{z}}$, $d\overline{z}_\nu \in \mathbf{A}^{0,1}_{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{A}^1_{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{1,0}_{\mathbf{z}} \oplus \mathbf{A}^{0,1}_{\mathbf{z}}$.

Wir erinnern uns an das **Dachprodukt**:
Sei $\varphi \in \mathbf{A}^r_{\mathbf{z}}$ und $\psi \in \mathbf{A}^s_{\mathbf{z}}$. Dann wird $\varphi \wedge \psi \in \mathbf{A}^{r+s}_{\mathbf{z}}$ definiert durch

$$\varphi \wedge \psi(\xi_1, \ldots, \xi_{r+s}) := \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in Sr+s} \mathrm{sign}(\sigma)\varphi(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(r)})\psi(\xi_{\sigma(r+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(r+s)}).$$

Speziell folgt für 1-Formen: $\varphi \wedge \psi(\xi, \eta) := \varphi(\xi)\psi(\eta) - \varphi(\eta)\psi(\xi)$.

Definition

Eine Form $\varphi \in \mathbf{A}^r_{\mathbf{z}}$ heißt ***Form vom Typ*** (p, q), falls für alle $c \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\varphi(c\xi_1, \ldots, c\xi_r) = c^p \overline{c}^q \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r) \quad , \qquad \forall\, \xi_1, \ldots, \xi_r \in T_z.$$

Behauptung: Ist $\varphi \in \mathbf{A}^r_{\mathbf{z}}$, $\varphi \not\equiv 0$, vom Typ (p, q), so ist der Typ eindeutig bestimmt, und es ist $p + q = r$.

Beweis: Es sei φ auch noch vom Typ (p', q'). Wir wählen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ so, dass $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r) \neq 0$ ist. Dann gilt:

$$\varphi(c\xi_1, \ldots, c\xi_r) = c^p\overline{c}^q\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r) = c^{p'}\overline{c}^{q'}\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r) \quad , \quad \forall\, c \in \mathbb{C}.$$

Das ist eine Polynomgleichung in c, also ist $p = p'$, $q = q'$. Wählt man c reell, so folgt außerdem $p + q = r$. ∎

5.9. Beispiele

A. Es ist $\mathrm{d}z_\nu(c \cdot \xi) = c \cdot \mathrm{d}z_\nu(\xi)$, also $\mathrm{d}z_\nu$ vom Typ $(1, 0)$.

B. Sei φ eine r-Form, $p + q = r$, $\varphi \not\equiv 0$, vom Typ (p, q).

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \overline{\varphi}(c\xi_1, \ldots, c\xi_r) &= \overline{\varphi(c\xi_1, \ldots, c\xi_r)} \\ &= \overline{c^p\overline{c}^q\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_r)} = c^q\overline{c}^p\overline{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_r).\end{aligned}$$

Also ist $\overline{\varphi}$ vom Typ (q, p). Speziell ist $d\overline{z}_\nu$ vom Typ $(0, 1)$.

C. Für $q, n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbf{J}_{q,n} := \{(j_1, \ldots, j_q) \in \mathbb{N}^q \,:\, 1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n\}$$

die Menge der aufsteigend geordneten Multi-Indizes I mit $|I| = q$. Ist $I \in \mathbf{J}_{p,n}$ und $J \in \mathbf{J}_{q,n}$, so ist

$$\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J := dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_q}$$

vom Typ (p, q).

5.10. Satz

Ist $\varphi \in \mathbf{A}^r_{\mathbf{z}}$, $\varphi \neq 0$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung $\varphi = \sum_{p+q=r} \varphi^{(p,q)}$, wobei die $\varphi^{(p,q)}$ jeweils Formen vom Typ (p, q) sind.

Beweis: 1) Eindeutigkeit: Sei $\varphi = \sum_{p+q=r} \varphi^{(p,q)} = \sum_{p+q=r} \widetilde{\varphi}^{(p,q)}$. Wir setzen $\psi := \varphi^{(p,q)} - \widetilde{\varphi}^{(p,q)}$. Dann ist $\sum_{p+q=r} \psi^{(p,q)} = 0$, also

$$0 = \sum_{p+q=r} \psi^{(p,q)}(c \cdot \xi_1, \ldots, c \cdot \xi_r) = \sum_{p+q=r} c^p\overline{c}^q\psi^{(p,q)}(\xi_1, \ldots, \xi_r).$$

Dies ist eine Polynomgleichung in c, die nur erfüllt sein kann, wenn $\psi^{(p,q)}(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0$, also $\psi^{(p,q)} = 0$ für alle (p, q) ist.

2) Existenz: Da $\{dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$ eine Basis von $\mathbf{A}^1_{\mathbf{z}}$ ist, bilden die Elemente

$$\{\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \mid I \in \mathbf{J}_{p,n},\ J \in \mathbf{J}_{q,n} \text{ und } p + q = r\}$$

eine Basis von $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}^r$. ∎

Eine Form φ der Dimension r hat also eine eindeutig bestimmte Darstellung der Gestalt

$$\varphi = \sum_{p+q=r} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{I,J} \, \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

mit Koeffizienten $a_{I,J} \in \mathbb{C}$. Setzt man $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}^{p,q} := \{\varphi \in \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^r \,:\, \varphi \text{ vom Typ } (p,q)\}$, so ist $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}^r = \bigoplus\limits_{p+q=r} \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^{p,q}$.

Definition

Sei $B \in \mathbb{C}^n$ offen. Ist für jedes $\mathbf{z} \in B$ eine Differentialform

$$\varphi(\mathbf{z}) = \sum_{p+q=r} \sum_{|I|=p,|J|=q} a_{I,J}(\mathbf{z}) \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \in \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^r$$

gegeben, so nennt man φ eine r***-Form auf*** B.

φ heißt ***Form der Klasse*** $\mathscr{C}^k$, falls alle Koeffizienten $a_{I,J}$ Funktionen aus $\mathscr{C}^k$ sind. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_r^k(B) &:= \{r - \text{Formen der Klasse } \mathscr{C}^k\}. \\ \text{und} \quad \mathscr{E}_{(p,q)}^k(B) &:= \{(p,q) - \text{Formen der Klasse } \mathscr{C}^k\}. \end{aligned}$$

Analog definiert man $\mathscr{E}_r^\infty(B)$ und $\mathscr{E}_{(p,q)}^\infty(B)$.

Definition

Sei $\varphi = \sum\limits_{|I|=p,|J|=q} a_{I,J} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \in \mathscr{E}_{(p,q)}^k(B) \subset \mathscr{E}_r^k(B)$.

Dann führt man die Operatoren ∂, $\overline{\partial}$ und d folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned} \partial\varphi &:= \sum_{|I|=p,|J|=q} \partial a_{I,J} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \in \mathscr{E}_{(p+1,q)}^{k-1}(B), \\ \overline{\partial}\varphi &:= \sum_{|I|=p,|J|=q} \overline{\partial} a_{I,J} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \in \mathscr{E}_{(p,q+1)}^{k-1}(B) \\ \text{und} \quad \mathrm{d}\varphi &:= \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi = \sum_{|I|=p,|J|=q} \mathrm{d}a_{I,J} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J. \end{aligned}$$

Auf beliebigen Formen setzt man die Operatoren linear fort.

5.11. Satz

1. $\partial^2 := \partial \circ \partial = 0$, $\overline{\partial}^2 = \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$ *und* $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.
2. $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.
3. *Ist* φ *eine* r*-Form, so ist*
$$\begin{aligned} \partial(\varphi \wedge \psi) &= \partial\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge \partial\psi, \\ \overline{\partial}(\varphi \wedge \psi) &= \overline{\partial}\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge \overline{\partial}\psi \\ \textit{und} \quad \mathrm{d}(\varphi \wedge \psi) &= \mathrm{d}\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge \mathrm{d}\psi. \end{aligned}$$
4. *Es ist* $\overline{\partial\varphi} = \overline{\partial}\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\partial}\varphi} = \partial\overline{\varphi}$ *und* $\overline{\mathrm{d}\varphi} = \mathrm{d}\overline{\varphi}$ *(d.h.,* d *ist* ***reell****).*

Beweis: 1) Sei $\omega = \sum_I a_I \mathrm{d}u_I$, mit reellen Koordinaten $u_1, \ldots, u_{2n}$. Dann ist natürlich $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$ und daher

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = (\partial + \overline{\partial}) \circ (\partial + \overline{\partial}) &= \partial \circ \partial + \partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial + \overline{\partial} \circ \overline{\partial} \\ &= \partial^2 + \overline{\partial}^2 + (\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial). \end{aligned}$$

Ist ω vom Typ (p, q), so ist

$$\begin{aligned} \partial^2\omega &\quad \text{vom Typ} \quad (p+2, q), \\ \overline{\partial}^2\omega &\quad \text{vom Typ} \quad (p, q+2) \\ \text{und } (\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial)\omega &\quad \text{vom Typ} \quad (p+1, q+1). \end{aligned}$$

Daraus folgt (1) und (2).

3) Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big((a\,\mathrm{d}u_I) \wedge (b\,\mathrm{d}u_J)\big) &= \mathrm{d}(ab\,\mathrm{d}u_I \wedge \mathrm{d}u_J) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(ab)}{\partial u_\nu}\, du_\nu \wedge \mathrm{d}u_I \wedge \mathrm{d}u_J \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial u_\nu}\, du_\nu \wedge \mathrm{d}u_I \wedge (b\,\mathrm{d}u_J) + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b}{\partial u_\nu}\, du_\nu \wedge (a\,\mathrm{d}u_I) \wedge \mathrm{d}u_J \\ &= \mathrm{d}(a\,\mathrm{d}u_I) \wedge (b\,\mathrm{d}u_J) + (-1)^{|I|}(a\,\mathrm{d}u_I) \wedge \mathrm{d}(b\,\mathrm{d}u_J). \end{aligned}$$

Setzt man $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$ ein, so liefert der Typen-Vergleich (3).

4) Sei $\varphi = a_{IJ}\,\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$. Dann ist $\overline{\varphi} = \overline{a}_{IJ}\,\mathrm{d}\overline{z}_I \wedge \mathrm{d}z_J$, also

$$\begin{aligned} \partial\overline{\varphi} &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \overline{a}_{IJ}}{\partial z_\nu}\, dz_\nu \wedge \mathrm{d}\overline{z}_I \wedge \mathrm{d}z_J \\ \text{und} \quad \overline{\partial}\varphi &= \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \overline{z}_\mu}\, d\overline{z}_\mu \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\overline{\overline{\partial}\varphi} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \overline{a}_{IJ}}{\partial z_\nu}\, dz_\nu \wedge \mathrm{d}\overline{z}_I \wedge \mathrm{d}z_J = \partial\overline{\varphi}$$

und deshalb

$$\overline{\partial}\overline{\varphi} = \overline{\overline{\overline{\partial}\overline{\varphi}}} = \overline{\partial\overline{\overline{\varphi}}} = \overline{\partial\varphi}$$

$$\text{und} \quad \mathrm{d}\overline{\varphi} = \partial\overline{\varphi} + \overline{\partial}\overline{\varphi} = \overline{\overline{\partial}\varphi} + \overline{\partial\varphi} = \overline{\overline{\partial}\varphi + \partial\varphi} = \overline{\mathrm{d}\varphi}.$$

■

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. $\Omega^p(B) := \{\varphi \in \mathscr{E}^\infty_{p,0}(B) \mid \overline{\partial}\varphi = 0\}$ heißt ***Raum der holomorphen*** p***-Formen auf*** B.

Es ist $\overline{\partial}\varphi = \overline{\partial}\Big(\sum_I a_I \mathrm{d}z_I\Big) = \sum_I \overline{\partial}a_I \wedge \mathrm{d}z_I = \sum_I \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial \overline{z}_\mu}\, d\overline{z}_\mu \wedge \mathrm{d}z_I$. Also gilt:

$$\varphi \in \Omega^p(B) \iff \varphi = \sum_{|I|=p} a_I\, \mathrm{d}z_I, \quad a_I \text{ holomorph auf } B.$$

Speziell ist $\Omega^0(B) = \mathscr{O}(B)$.

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subset G$ eine kompakte Teilmenge und $\varphi = f\, dx \wedge dy$, so setzt man $\int_K \varphi := \int_K f(x + \mathrm{i}\, y)\, dx\, dy$. Hat K stückweise glatten Rand und ist $\omega = f\, dz + g\, d\overline{z}$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf G, so besagt der Satz von Stokes:

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

Dabei ist $d\omega = (g_z - f_{\overline{z}})\, dz \wedge d\overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,(f_{\overline{z}} - g_z)\, dx \wedge dy$.

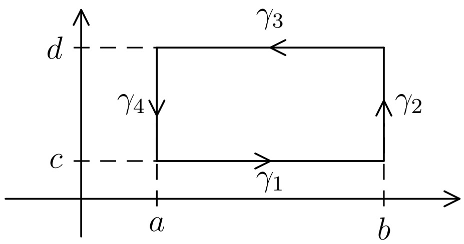
Wir brauchen hier den Satz von Stokes nur in einer sehr einfachen Form. Für diesen Fall soll auch der Beweis vorgestellt werden.

5.12. Lemma („Mini-Stokes")

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $R \subset\subset G$ ein (achsenparalleles) Rechteck und $f \in \mathscr{C}^1(G)$. Dann gilt:

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\partial R} f(z)\, dz.$$

BEWEIS: Sei $R = [a, b] \times [c, d]$. Dann wird ∂R durch vier Kurven parametrisiert, nämlich



$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &:= t + \mathsf{i}\,c, \quad a \le t \le b,\\
\gamma_2(t) &:= b + \mathsf{i}\,t, \quad c \le t \le d,\\
\gamma_3(t) &:= (a+b-t) + \mathsf{i}\,d, \quad a \le t \le b,\\
\gamma_4(t) &:= a + \mathsf{i}\,(c+d-t), \quad c \le t \le d.
\end{aligned}$$

Setzen wir $\varphi_x(y) := f(x + \mathsf{i}\,y)$ und $\psi_y(x) := f(x + \mathsf{i}\,y)$, so ist

$$\varphi_x'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x + \mathsf{i}\,y) \quad \text{und} \quad \psi_y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \mathsf{i}\,y).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_R \frac{\partial f}{\partial y}(x + \mathsf{i}\,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x + \mathsf{i}\,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d \varphi_x'(y)\,dy\,dx\\
&= \int_a^b (\varphi_x(d) - \varphi_x(c))\,dx = \int_a^b (f(x + \mathsf{i}\,d) - f(x + \mathsf{i}\,c))\,dx\\
&= -\int_b^a f(x + \mathsf{i}\,d)\,dx - \int_a^b f(x + \mathsf{i}\,c)\,dx\\
&= -(\int_a^b f(a+b-t+\mathsf{i}\,d)(-1)\,dt + \int_a^b f(t + \mathsf{i}\,c)\,dt)\\
&= -(\int_a^b f(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)\,dt + \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt)\\
&= -(\int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz),
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\int_R \frac{\partial f}{\partial x}(x + \mathsf{i}\,y)\,dx\,dy &= \int_c^d (f(b + \mathsf{i}\,y) - f(a + \mathsf{i}\,y))\,dy\\
&= -\mathsf{i}\int_c^d f(b + \mathsf{i}\,t)\,\mathsf{i}\,dt - \mathsf{i}\int_c^d f(a + \mathsf{i}\,(c+d-t))(-\mathsf{i}\,)\,dt\\
&= -\mathsf{i}\cdot(\int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz),
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_R f_{\overline{z}}\,d\overline{z} \wedge dz &= 2\,\mathsf{i}\int_R f_{\overline{z}}\,dx \wedge dy = 2\,\mathsf{i}\int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x + \mathsf{i}\,y)\,dx\,dy\\
&= \mathsf{i}\int_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathsf{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy\\
&= \mathsf{i}\,(-\mathsf{i}\,)\int_{\gamma_2+\gamma_4} f(z)\,dz - (-1)\int_{\gamma_1+\gamma_3} f(z)\,dz\\
&= \int_{\partial R} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

■

5.13. Lemma

R und R' seien zwei abgeschlossene Rechtecke in $\mathbb{C}$ mit $R' \subset \mathring{R}$.

Ist U eine offene Umgebung von $R \setminus \mathring{R}'$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, so gilt:

$$\int_{R \setminus R'} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\partial R} f(z)\, dz - \int_{\partial R'} f(z)\, dz.$$

BEWEIS: Sei $K := R \setminus \mathring{R}'$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion φ mit kompaktem Träger in U, so daß $\varphi|_K \equiv 1$ ist. Wir setzen

$$g(z) := \begin{cases} \varphi(z) \cdot f(z) & \text{für } z \in U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann können wir das vorige Lemma auf die Funktion g anwenden und erhalten:

$$\int_R \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\partial R} g(z)\, dz = \int_{\partial R} f(z)\, dz$$

und

$$\int_{R'} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(x + \mathrm{i}\, y)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\partial R'} g(z)\, dz = \int_{\partial R'} f(z)\, dz,$$

also

$$\int_{R \setminus R'} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\partial R} f(z)\, dz - \int_{\partial R'} f(z)\, dz.$$

Aber auf $R \setminus R'$ ist $g(z) = f(z)$. ■

5.14. Lemma

Es ist $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon < |z| < 1} \frac{1}{|z|}\, dxdy < \infty$.

BEWEIS: Wir führen Polarkoordinaten ein:

$$F(r, \theta) := (r \cos \theta,\ r \sin \theta).$$

Dann ist $\det J_{\mathbb{R},F}(z) = r$ und nach der Transformationsformel

$$\int\limits_{\varepsilon < |z| < 1} \frac{1}{|z|}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r} \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon)\, d\theta = 2\pi(1 - \varepsilon).$$

■

5.15. Inhomogene Cauchy'sche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathscr{C}^1(G)$ und $R \subset\subset G$ ein offenes Rechteck. Dann gilt für $z \in R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_R \frac{(\partial f/\partial \overline{\zeta})\,(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

BEWEIS: Sei $z \in R$, $Q_r \subset\subset R$ ein kleines Quadrat mit Seitenlänge r um z und K_r der negativ orientierte Rand von Q_r. Setzt man $G_r := R \setminus \overline{Q_r}$, so ist $\partial G_r = \partial R + K_r$.

Die 1-Form

$$\omega(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

ist eine $\mathscr{C}^1$-Form auf einer Umgebung von $\overline{G_r}$. Aus dem „Mini-Stokes" folgt, dass $\int_{\partial G_r} \omega(z) = \int_{G_r} \mathrm{d}\omega(z)$ ist, mit

$$\mathrm{d}\omega(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \cdot \frac{(\partial f/\partial \overline{\zeta})\,(\zeta)}{\zeta - z}\, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta.$$

Wir wollen nun den Grenzwert für $r \longrightarrow 0$ betrachten. Um zu sehen, dass $\mathrm{d}\omega(z)$ dabei integrierbar bleibt, reicht es, die Integrierbarkeit von $\dfrac{1}{|z|}\, dz \wedge d\overline{z}$ nahe $z = 0$ nachzuweisen. Das ist aber oben schon geschehen. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{G_r} \mathrm{d}\omega(z) \quad &\to \quad \int_R \mathrm{d}\omega(z) \qquad \text{für } r \to 0 \\
\text{und} \quad \int_{\partial G_r} \omega(z) \quad &= \quad \int_{\partial R} \omega(z) + \int_{K_r} \omega(z), \qquad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$\int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{K_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{K_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \text{und}$$

$$\Big|\, \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \cdot \int_{K_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \,\Big| \le 4r \cdot \frac{2}{r} \cdot \sup_{\zeta \in K_r} |f(\zeta) - f(z)| \to 0 \text{ für } r \to 0.$$

Zusammen ergibt das:

$$\begin{aligned}
\int_R \mathrm{d}\omega(z) \quad &= \quad \int_{\partial R} \omega(z) + \lim_{r \to 0} \int_{K_r} \omega(z) \\
&= \quad \int_{\partial R} \omega(z) + \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \cdot \int_{K_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \quad \int_{\partial R} \omega(z) + f(z) \cdot n(K_r, z) \;=\; \int_{\partial R} \omega(z) - f(z).
\end{aligned}$$

Weil $d\overline{\zeta} \wedge d\zeta = -d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$ ist, folgt die Behauptung. ∎

5.16. Lösung des $\overline{\partial}$-Problems in $\mathbb{C}$

Sei $f \in \mathscr{C}_0^1(\mathbb{C})$ und $R \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Rechteck mit $\mathrm{Tr}(f) \subset R$. *Dann ist*

$$u(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_R \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

eine $\mathscr{C}^1$-Funktion auf $\mathbb{C}$ und $u_{\overline{z}} = f$.

BEWEIS: Da $\mathrm{Tr}(f)$ in R liegt, ist $u(z) := \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ festgehalten und $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $T(\zeta) := \zeta - z$. Ist $\varepsilon > 0$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} &= \int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{f(T(\zeta) + z)}{T(\zeta)}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(0)} \frac{f(\zeta + z)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta + z)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(0)} \frac{f(\zeta + z)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta + z)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert. Da der Integrand kompakten Träger hat und stetig differenzierbar von z abhängt, folgt aus den Sätzen über Parameterintegrale, dass auch u stetig differenzierbar ist, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\mathbb{C}} \frac{(\partial f/\partial \overline{z})\,(\zeta + z)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\mathbb{C}} \frac{(\partial f/\partial \overline{\zeta})\,(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{R} \frac{(\partial f/\partial \overline{\zeta})\,(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= f(z) \quad \text{(wegen der inhomogenen Cauchy'schen Integralformel).} \end{aligned}$$

∎

5.17. Folgerung

Sei $G \subset\subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $U = U(\overline{G})$ eine beschränkte offene Umgebung, $P \subset\subset Q \subset \mathbb{C}^n$ zwei konzentrische Polyzylinder und $f = f(z, \mathbf{w})$ eine $\mathscr{C}^1$-Funktion auf $U \times Q$, die holomorph in $\mathbf{w}$ ist.

Dann gibt es eine stetig differenzierbare Funktion u auf $U \times Q$, die in $\mathbf{w}$ holomorph ist, so dass $u_{\overline{z}} = f$ auf $G \times P$ gilt.

Beweis: Wir setzen $u(z, \mathbf{w}) := \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_G \frac{f(\zeta, \mathbf{w})}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$. Die Existenz des Integrals folgt wie üblich.

Sei nun $z_0 \in G$ ein beliebiger Punkt und $D := D_\varepsilon(z_0)$ eine kleine Kreisscheibe um z_0 mit $D \subset\subset G$. Es gibt eine beliebig oft differenzierbare Funktion ϱ auf $\mathbb{C}$ mit

1. $0 \le \varrho \le 1$,
2. $\varrho|_D \equiv 1$,
3. $\mathrm{Tr}(\varrho) \subset\subset G$.

Wir definieren $f_1(z, \mathbf{w}) := \varrho(z) \cdot f(z, \mathbf{w})$ and $f_2 := f - f_1$. Dann ist f_1 eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{C} \times Q$ mit $f_1|_{D \times Q} = f|_{D \times Q}$ und f_2 eine stetig differenzierbare Funktion auf $U \times Q$ mit $f_2|_{D \times Q} = 0$.

Sei R ein Rechteck mit $U \subset\subset R$, sowie

$$u_1(z, \mathbf{w}) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_G \frac{f_1(\zeta, \mathbf{w})}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_R \frac{f_1(\zeta, \mathbf{w})}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

und

$$u_2(z, \mathbf{w}) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_G \frac{f_2(\zeta, \mathbf{w})}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{G \setminus D} \frac{f_2(\zeta, \mathbf{w})}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Offensichtlich ist $u_1 + u_2 = u$. Nach dem vorigen Satz ist u_1 eine $\mathscr{C}^1$-Funktion auf $\mathbb{C} \times Q$ mit $(u_1)_{\overline{z}} = f_1$.

Der Integrand von u_2 ist für $z \in D$ auf $(G \setminus D) \times P$ stetig und beschränkt. Für festes $(\zeta, \mathbf{w}) \in (G \setminus D) \times P$ ist er außerdem auf D holomorph in z. Nach den Sätzen über Parameterintegrale ist u_2 deshalb auf $D \times P$ stetig differenzierbar, und dort ist $(u_2)_{\overline{z}} = 0$. Also ist u auf $D \times P$ stetig differenzierbar und dort $u_{\overline{z}} = (u_1)_{\overline{z}} = f_1 = f$. Da z_0 beliebig war, folgt die stetige Differenzierbarkeit und die Gleichung $u_{\overline{z}} = f$ auf ganz $G \times P$. Die Holomorphie von u in $\mathbf{w}$ ergibt sich ebenfalls aus den Sätzen über Parameterintegrale. ∎

5.18. Der Hartogs'sche Kugelsatz

Sei $n \geq 2$, $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $K \subset G$ kompakt und $G \setminus K$ zusammenhängend. Dann ist jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G \setminus K)$ nach G holomorph fortsetzbar.

BEWEIS: Sei $U = U(K) \subset\subset G$ und $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(G)$ mit $\varphi|_U \equiv 1$. Dann setzen wir

$$\psi_k(\mathbf{z}) := f(\mathbf{z}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_k}(\mathbf{z}), \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Offensichtlich ist

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \overline{z}_l} = f \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial \overline{z}_k} \quad \text{für alle } l, k,$$

und außerdem haben die ψ_k alle kompakten Träger.

Sei $\mathbf{z}'' = (z_2, \ldots, z_n)$ fest und

$$u(z_1, \mathbf{z}'') := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_1(\zeta, \mathbf{z}'')}{\zeta - z_1} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Nach Satz 5.15 ist u stetig differenzierbar in z_1 und $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}_1} = \psi_1$.

Für $k \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}(z_1, \mathbf{z}'') &= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{(\partial \psi_1 / \partial \overline{z}_k)(\zeta, \mathbf{z}'')}{\zeta - z_1} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{(\partial \psi_k / \partial \overline{z}_1)(\zeta, \mathbf{z}'')}{\zeta - z_1} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\
&= \psi_k(z_1, \mathbf{z}'').
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der inhomogenen Cauchy'schen Integralformel, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass ψ_k kompakten Träger in G hat.

Weil der Träger von ψ_k in dem von φ liegt, ist

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}(\mathbf{z}) = 0 \text{ für } \mathbf{z} \notin T := \mathrm{Tr}(\varphi) \text{ und } k = 1, \ldots, n.$$

Das bedeutet, dass u dort holomorph ist.

Andererseits ist $u(z_1, \mathbf{z}'') = 0$, wenn $|\mathbf{z}''|$ hinreichend groß ist, denn für solche $\mathbf{z}''$ ist $\psi_1(\zeta, \mathbf{z}'') = 0$, unabhängig von ζ. Also verschwindet u auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente Z von $\mathbb{C}^n \setminus T$. Man kann eine offene und nicht-leere Teilmenge V von $Z \cap (G \setminus T) \subset G \setminus K$ finden. Nach unserer Konstruktion ist $u|_V \equiv 0$.

Sei jetzt

$$\widehat{f} := \begin{cases} (1 - \varphi) \cdot f + u & \text{auf } G \setminus K \\ u & \text{auf } U. \end{cases}$$

Dann ist $\widehat{f}$ auf ganz G definiert und stetig differenzierbar, und es gilt:

1. $\dfrac{\partial\widehat{f}}{\partial\overline{z}_k} = -f\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}_k} + \dfrac{\partial u}{\partial\overline{z}_k} = -\psi_k + \psi_k = 0$ auf $G\setminus K$.

2. $\dfrac{\partial\widehat{f}}{\partial\overline{z}_k} = \dfrac{\partial u}{\partial\overline{z}_k} = \psi_k = 0$ auf U, weil dort $\varphi\equiv 1$ ist.

3. $\widehat{f}|_V = f|_V$.

Weil $\widehat{f}$ auf G holomorph ist, folgt aus dem Identitätssatz, dass $\widehat{f}|_{G\setminus K} = f$ ist. Damit ist $\widehat{f}$ die gewünschte holomorphe Fortsetzung. ∎

5.19. Lemma von Dolbeault

Sei $P = \mathbf{P}(0)$ ein Polyzylinder, $P' = P'(0) \subset\subset P$. Ist $\varphi\in\mathscr{E}^\infty_{(p,q)}(P)$ mit $\overline{\partial}\varphi = 0$ und $q>0$, so gibt es ein $\psi\in\mathscr{E}^\infty_{(p,q-1)}(P')$ mit $\overline{\partial}\psi = \varphi|_{P'}$.

Beweis: oBdA. sei $p=0$.

φ enthalte **nicht** die Differentiale $d\overline{z}_{k+1},\dots,d\overline{z}_n$. Wir führen dann **Induktion nach k:**

$\underline{k=0}$: Wegen der Voraussetzung $q>0$ ist die Aussage leer.

$\underline{k-1\to k}$: Wir schreiben φ in der Form

$$\varphi = d\overline{z}_k\wedge g + h,\quad \text{mit } g\in\mathscr{E}^\infty_{(0,q-1)}(P) \text{ und } h\in\mathscr{E}^\infty_{(0,q)}(P),$$

so dass g und h beide **nicht** $d\overline{z}_k,\dots,d\overline{z}_n$ enthalten. Dabei sei $\mathscr{E}^\infty_{(0,0)}(P) := \mathscr{C}^\infty(P)$.

Sei $g = \displaystyle\sum_{|J|=q-1}^{*} g_J \mathrm{d}\overline{z}_J$, wobei $\sum^*$ bedeuten soll, dass $d\overline{z}_k,\dots,d\overline{z}_n$ nicht vorkommen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\partial}\varphi &= (-1)^{q-1}\,d\overline{z}_k\wedge\overline{\partial}g + \overline{\partial}h \\ &= (-1)^{q-1}\wedge\sum_{|J|=q-1}^{*}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g_J}{\partial\overline{z}_\nu}\,d\overline{z}_\nu\wedge\mathrm{d}\overline{z}_J + \overline{\partial}h, \end{aligned}$$

also $\dfrac{\partial g_J}{\partial\overline{z}_\nu} = 0$ für $\nu>k$. Damit ist g_J in $z_{k+1},\dots,z_n$ holomorph.

Wir wählen nun einen Polyzylinder $P''(0)$ mit $P'\subset\subset P''\subset\subset P$. Es gibt Funktionen $G_J\in\mathscr{C}^\infty(P)$, holomorph in $z_{k+1},\dots,z_n$, s.d. $\dfrac{\partial G_J}{\partial\overline{z}_k} = g_J$ auf P'' ist. Sei $\gamma := \displaystyle\sum_{|J|=q-1}^{*} G_J\,\mathrm{d}\overline{z}_J\in\mathscr{E}^\infty_{(0,q-1)}(P)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\gamma &= \sum_{|J|=q-1}^{*} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial G_J}{\partial \overline{z}_\nu}\, d\overline{z}_\nu \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \\ &= \underbrace{\sum_{|J|=q-1}^{*} \sum_{\nu<k} \frac{\partial G_J}{\partial \overline{z}_\nu}\, d\overline{z}_\nu \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J}_{:=\,\eta\ (\text{enthält } d\overline{z}_k,\,\ldots,\,d\overline{z}_n\ \textbf{nicht})} + \sum_{|J|=q-1}^{*} g_J\, d\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \quad \text{auf } P''.\end{aligned}$$

Also ist $\overline{\partial}\gamma = d\overline{z}_k \wedge g + \eta$, und $h - \eta = (\varphi - d\overline{z}_k \wedge g) - (\overline{\partial}\gamma - d\overline{z}_k \wedge g) = \varphi - \overline{\partial}\gamma$ enthält nicht $d\overline{z}_k, \ldots, d\overline{z}_n$. Da $\overline{\partial}(h - \eta) = \overline{\partial}(\varphi - \overline{\partial}\gamma) = \overline{\partial}\varphi - \overline{\partial}\overline{\partial}\gamma = 0$ ist, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$\exists\, v \in \mathscr{E}^{\infty}_{(p,q-1)}(P') \text{ mit } \overline{\partial}v = h - \eta = \varphi - \overline{\partial}\gamma.$$

Setzt man $\psi := v + \gamma \in \mathscr{E}^{\infty}_{(p,q-1)}(P')$, so ist $\overline{\partial}\psi = \overline{\partial}v + \overline{\partial}\gamma = \varphi$. ∎