§ 4 Holomorphie-Konvexität

Wir wollen weitere Beziehungen zwischen Pseudokonvexität und affiner Konvexität untersuchen. Zunächst stellen wir einige Eigenschaften konvexer Gebiete im $\mathbb{R}^N$ zusammen.

Sei $\mathscr{L}$ die Menge der affin-linearen Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N + b, \quad a_1, \ldots, a_N, b \in \mathbb{R}.$$

Ist M eine konvexe Menge und $\mathbf{x}_0$ ein Punkt, der nicht in M enthalten ist, so gibt es eine Funktion $f \in \mathscr{L}$ mit $f(\mathbf{x}_0) = 0$ und $f|_M < 0$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) < c\}$ ein konvexer Halbraum.

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine beliebige Teilmenge. Dann nennt man die Menge

$$H(M) := \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) \le \sup_M f, \text{ für alle } f \in \mathscr{L} \Big\}$$

die ***affin-konvexe Hülle*** von M.

4.1. Satz

Seien $M, M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^N$ beliebige Teilmengen. Dann gilt:

1. *$M \subset H(M)$.*
2. *$H(M)$ ist abgeschlossen und konvex.*
3. *$H(H(M)) = H(M)$.*
4. *Ist $M_1 \subset M_2$, so ist $H(M_1) \subset H(M_2)$.*
5. *Ist M abgeschlossen und konvex, so ist $H(M) = M$.*
6. *Ist M beschränkt, so ist $H(M)$ ebenfalls beschränkt.*

Beweis: (1) ist trivial.

(2) Ist $\mathbf{x}_0 \notin H(M)$, so gibt es ein $f \in \mathscr{L}$ mit $f(\mathbf{x}_0) > \sup_M f$. Weil f stetig ist, ist $f(\mathbf{x}) > \sup_M f$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}_0$. Deshalb ist $H(M)$ abgeschlossen.

Als Durchschnitt von konvexen Halbräumen $\{f < c\}$ mit $f \in \mathscr{L}$ ist $H(M)$ ebenfalls konvex.

(3) folgt aus (5).

(4) ist trivial.

(5) Sei M abgeschlossen und konvex. Ist $\mathbf{x}_0 \notin M$, so gibt es einen Punkt $\mathbf{y}_0 \in M$, so dass $\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, M) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ist. Sei $\mathbf{z}_0$ ein Punkt auf der offenen Strecke von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{y}_0$. Dann ist $\mathbf{z}_0 \notin M$, und es gibt eine Funktion $f \in \mathscr{L}$ mit $f(\mathbf{z}_0) = 0$ und $f|_M < 0$. Da $t \mapsto f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{y}_0)$ eine monotone Funktion ist, ist $f(\mathbf{x}_0) > 0$ und deshalb $\mathbf{x}_0 \notin H(M)$. Also ist $H(M) \subset M$ und damit $H(M) = M$.

(6) Ist M beschränkt, so gibt es ein $R > 0$, so dass M in der abgeschlossenen konvexen Menge $\overline{B_R(\mathbf{0})}$ enthalten ist. Also ist $H(M) \subset \overline{B_R(\mathbf{0})}$. ∎

Bemerkung: $H(M)$ ist die kleinste abgeschlossene konvexe Menge, die M enthält.

4.2. Satz

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann konvex, wenn mit $K \subset\subset G$ stets auch $H(K) \subset\subset G$ ist.

Beweis: Sei G ein konvexes Gebiet und $K \subset\subset G$ eine Teilmenge. Dann ist $H(K)$ abgeschlossen und in der beschränkten Menge $H(\overline{K})$ enthalten. Daher ist $H(K)$ kompakt, und man muss nur noch zeigen, daß $H(K) \subset G$ ist. Wenn es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in H(K) \setminus G$ gibt, dann gibt es auch eine Funktion $f \in \mathscr{L}$ mit $f(\mathbf{x}_0) = 0$ und $f|_G < 0$. Es folgt, dass $\sup_{\overline{K}} f < 0$ und $f(\mathbf{x}_0) > \sup_K f$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Relation $\mathbf{x}_0 \in H(K)$.

Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt. Wenn $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ zwei Punkte von G sind, dann ist $K := \{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\}$ eine relativ-kompakte Teilmenge von G. Es folgt, dass $H(K)$ in G enthalten ist. Da $H(K)$ abgeschlossen und konvex ist, muss auch die abgeschlossene Strecke von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{y}_0$ in G enthalten sein. Deshalb ist G konvex. ∎

Jetzt ersetzen wir affin-lineare Funktionen durch holomorphe Funktionen.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $K \subset G$ eine Teilmenge. Die Menge

$$\widehat{K} = \widehat{K}_G := \Big\{ \mathbf{z} \in G \,:\, |f(\mathbf{z})| \le \sup_K |f|, \text{ für alle } f \in \mathscr{O}(G) \Big\}$$

heißt die ***holomorph-konvexe Hülle*** von K in G.

4.3. Satz

Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und sind K, K_1, K_2 Teilmengen von G, so gilt:

1. *$K \subset \widehat{K}$.*
2. *$\widehat{K}$ ist abgeschlossen in G.*

3. $\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.

4. *Ist* $K_1 \subset K_2$, *so ist* $\widehat{K}_1 \subset \widehat{K_2}$.

5. *Ist* K *beschränkt, so ist auch* $\widehat{K}$ *beschränkt.*

Beweis: (1) ist trivial.

(2) Sei $\mathbf{z}_0$ ein Punkt von $G \setminus \widehat{K}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf G mit $|f(\mathbf{z}_0)| > \sup_K |f|$. Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Ungleichung auf einer ganzen Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$. Also ist $G \setminus \widehat{K}$ offen.

(3) $\sup_{\widehat{K}} |f| \le \sup_K |f|$.

(4) ist trivial.

(5) Ist K beschränkt, so ist K in einem abgeschlossenen Polyzylinder $\overline{\mathsf{P}^n(\mathbf{0}, r)}$ enthalten. Die Koordinatenfunktionen z_ν sind auf G holomorph. Für $\mathbf{z} \in \widehat{K}$ ist $|z_\nu| \le \sup_K |z_\nu| \le r$. Also ist auch $\widehat{K}$ beschränkt. ∎

Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ wird ***holomorph-konvex*** genannt, wenn mit $K \subset\subset G$ auch $\widehat{K} \subset\subset G$ ist.

4.4. Beispiel

In $\mathbb{C}$ ist jedes Gebiet holomorph-konvex:

Sei $K \subset\subset G$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist $\widehat{K}$ beschränkt, und es bleibt zu zeigen, dass der Abschluss von $\widehat{K}$ in G enthalten ist.

Sei (z_ν) eine Folge in $\widehat{K}$, die gegen einen Punkt $z_0 \in \partial G$ konvergiert. Die Funktion $f(z) := 1/(z - z_0)$ ist holomorph in G. Weil die z_ν in $\widehat{K}$ liegen, ist $|f(z_\nu)| \le \sup_K |f| < \infty$ für alle ν, und andererseits strebt $|f(z_\nu)|$ gegen $+\infty$. Das ist ein Widerspruch!

In der Funktionentheorie von einer Veränderlichen wurde für kompakte Teilmengen $K \subset G$ gezeigt, dass $\widehat{K}$ die Vereinigung von K mit den in G relativ-kompakten Zusammenhangskomponenten von $G \setminus K$ ist. Daraus folgt in diesem Falle natürlich auch, dass $\widehat{K} \subset\subset G$ ist.

Im Falle $n \ge 2$ werden wir zeigen, dass es Gebiete gibt, die nicht holomorph-konvex sind. Allerdings gilt:

4.5. Satz

Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein affin-konvexes Gebiet, so ist G holomorph-konvex.

Beweis: Sei K relativ-kompakt in G. Dann ist $H(K) \subset\subset G$. Ist $\mathbf{z}_0$ ein Punkt in $G \setminus H(K)$, so gibt es eine affin-lineare Funktion $\lambda \in \mathscr{L}$ mit $\lambda(\mathbf{z}_0) > \sup_K \lambda$. Indem wir λ durch $\lambda - \lambda(\mathbf{0})$ ersetzen, können wir annehmen, dass λ eine homogen-lineare Funktion der Form

$$\lambda(\mathbf{z}) = 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n).$$

Dann ist $f(\mathbf{z}) := \exp(2\cdot(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n))$ holomorph auf G und $|f(\mathbf{z})| = \exp(\lambda(\mathbf{z}))$. Deshalb ist $|f(\mathbf{z}_0)| > \sup_K |f|$ und $\mathbf{z}_0 \in G \setminus \widehat{K}$. Weil $\widehat{K}$ eine Teilmenge von G ist, zeigt dies, dass $\widehat{K} \subset H(K)$ und damit $\widehat{K} \subset\subset G$ ist. ∎

Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\varepsilon > 0$ eine kleine reelle Zahl, so definieren wir

$$G_\varepsilon := \{\mathbf{z} \in G \,:\, \delta_G(\mathbf{z}) \geq \varepsilon\}.$$

Hier sind einige Eigenschaften der Menge G_ε:

1. Ist $\mathbf{z} \in G$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\delta_G(\mathbf{z}) \geq \varepsilon$ ist.
   Deshalb ist $G = \bigcup_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$.
2. Ist $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, so ist $G_{\varepsilon_1} \supset G_{\varepsilon_2}$.
3. G_ε ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$: Ist nämlich $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$, so ist entweder $\mathbf{z}_0 \in G$ und $\delta_G(\mathbf{z}_0) < \varepsilon$, oder $\mathbf{z}_0 \notin G$. Im letzteren Falle ist die Kugel $\mathsf{B}_\varepsilon(\mathbf{z}_0)$ in $\mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$ enthalten. Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus G_\varepsilon$ und $\delta := \delta_G(\mathbf{z}_0)$, so ist $\delta < \varepsilon$ und $\mathsf{B}_{\varepsilon-\delta}(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$. Also ist $\mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$ offen.

4.6. Lemma

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $K \subset G$ kompakt und f eine holomorphe Funktion auf G. Ist $K \subset G_\varepsilon$, so gibt es zu jedem δ mit $0 < \delta < \varepsilon$ eine Konstante $C > 0$, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\sup_K |D^\alpha f(\mathbf{z})| \leq \frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}} \cdot C.$$

Beweis: Für $0 < \delta < \varepsilon$ ist $G' := \{\mathbf{z} \in G \,:\, \mathrm{dist}(K, \mathbf{z}) < \delta\}$ offen und relativ-kompakt in G, und für jedes $\mathbf{z} \in K$ ist der abgeschlossene Polyzylinder $\overline{\mathsf{P}^n(\mathbf{z}, \delta)}$ in $\overline{G'} \subset G$ enthalten. Ist T der ausgezeichnete Rand des Polyzylinders und $|f| \leq C$ auf $\overline{G'}$, so folgt aus den Cauchy-Ungleichungen:

$$|D^\alpha f(\mathbf{z})| \leq \frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}} \cdot \sup_T |f| \leq \frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}} \cdot C.$$

∎

4.7. Satz von Cartan–Thullen

Ist G ein schwaches Holomorphiegebiet, so ist G holomorph-konvex.

Beweis: Sei $K \subset\subset G$. Wir wollen zeigen, dass $\widehat{K} \subset\subset G$ ist.

Sei $\varepsilon := \operatorname{dist}(K, \mathbb{C}^n \setminus G) \geq \operatorname{dist}(\overline{K}, \mathbb{C}^n \setminus G) > 0$. Offensichtlich liegt K in G_ε. Wir behaupten, dass die holomorph-konvexe Hülle $\widehat{K}$ sogar in G_ε liegt. Angenommen, das wäre nicht so. Dann gäbe es ein $\mathbf{z}_0 \in \widehat{K} \setminus G_\varepsilon$. Sei $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \varepsilon)$ und Q die Zusammenhangskomponente von $\mathbf{z}_0$ in $P \cap G$. Da P sowohl G als auch $\mathbb{C}^n \setminus G$ trifft, folgt aus dem Lemma über Randkomponenten (Lemma 1.20), dass es einen Punkt $\mathbf{z}_1 \in P \cap \partial Q \cap \partial G$ gibt. Dieser Punkt werde festgehalten.

Sei nun f eine holomorphe Funktion auf G. In einer Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ hat f eine Taylor-Entwicklung

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu, \text{ mit } a_\nu = \frac{1}{\nu!} D^\nu f(\mathbf{z}_0).$$

Die Funktion $\mathbf{z} \mapsto A_\nu(\mathbf{z}) := \frac{1}{\nu!} D^\nu f(\mathbf{z})$ ist holomorph auf G. Deshalb ist $|a_\nu| = |A_\nu(\mathbf{z}_0)| \leq \sup_K |A_\nu|$. Nach dem Lemma gibt es zu jedem δ mit $0 < \delta < \varepsilon$ ein $C > 0$, so dass $\sup_K |A_\nu| \leq C/\delta^{|\nu|}$ ist. Daraus folgt:

$$|a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu| \leq C \cdot \left(\frac{|z_1 - z_1^{(0)}|}{\delta} \right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{|z_n - z_n^{(0)}|}{\delta} \right)^{\nu_n}.$$

Ist $\mathbf{z}$ ein Punkt des Polyzylinders $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \delta)$ und $q_\nu = q_\nu(\mathbf{z}) := |z_\nu - z_\nu^{(0)}|/\delta$, so ist $q_\nu < 1$. Also wird die Taylorreihe von f in $\mathbf{z}_0$ auf P durch eine geometrische Reihe majorisiert, und sie konvergiert dort gegen eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$. Es ist $f = \widehat{f}$ nahe $\mathbf{z}_0$ und dann auch auf Q. Weil $\mathbf{z}_1$ in $P \cap \partial Q \cap \partial G$ liegt, kann f in $\mathbf{z}_1$ nicht vollständig singulär sein. Das ist ein Widerspruch, weil f eine beliebige holomorphe Funktion in G und G ein schwaches Holomorphiegebiet ist. ∎

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Ist G holomorph-konvex, so wollen wir eine holomorphe Funktion auf G konstruieren, die in jedem Randpunkt voll singulär wird. Dazu benutzen wir „normale Ausschöpfungen".

Definition

Eine ***normale Ausschöpfung*** von G ist eine Folge (K_ν) von kompakten Teilmengen von G so dass gilt:

1. $K_\nu \subset\subset (\overset{\circ}{K}_{\nu+1})$, für jedes ν.
2. $\bigcup_{\nu=1}^\infty K_\nu = G$.

4.8. Satz

Jedes Gebiet G im $\mathbb{C}^n$ besitzt eine normale Ausschöpfung. Ist G holomorph-konvex, so gibt es eine normale Ausschöpfung (K_ν) mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$ für alle ν.

Beweis: Im allgemeinen ergibt $K_\nu := \overline{\mathsf{P}^n(\mathbf{0},\nu)} \cap G_{1/\nu}$ eine normale Ausschöpfung. Ist G sogar holomorph-konvex, so ist $\widehat{K}_\nu \subset\subset G$ für alle ν. Induktiv konstruieren wir eine neue Ausschöpfung.

Sei $K_1^* := \widehat{K}_1$. Sind die kompakten Mengen $K_1^*, \ldots, K_{\nu-1}^*$ schon konstruiert, mit $\widehat{K}_j^* = K_j^*$ für $j = 1, \ldots, \nu - 1$, und $K_j^* \subset\subset (\overset{\circ}{K}{}_{j+1}^*)$, so gibt es ein $\lambda(\nu) \in \mathbb{N}$, so dass $K_{\nu-1}^* \subset \overset{\circ}{K}_{\lambda(\nu)}$ ist. Sei $K_\nu^* := \widehat{K}_{\lambda(\nu)}$.

Offensichtlich ist (K_ν^*) eine normale Ausschöpfung mit $\widehat{K}_\nu^* = K_\nu^*$. ∎

4.9. Satz

Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$, $\lambda(\mu)$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und $(\mathbf{z}_\mu)$ eine Folge von Punkten mit $\mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$.

Dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf G, so dass $|f(\mathbf{z}_\mu)|$ unbeschränkt ist.

Beweis: Die Funktion f wird als Grenzfunktion einer unendlichen Reihe $f = \sum_{\mu=1}^\infty f_\mu$ konstruiert. Induktiv definieren wir holomorphe Funktionen f_μ auf G, so daß gilt:

1. $|f_\mu|_{K_{\lambda(\mu)}} < 2^{-\mu}$ für $\mu \geq 1$.
2. $|f_\mu(\mathbf{z}_\mu)| > \mu + 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{\mu-1} |f_j(\mathbf{z}_\mu)|$ für $\mu \geq 2$.

Sei $f_1 := 0$. Dann nehmen wir für $\mu \geq 2$ an, dass $f_1, \ldots, f_{\mu-1}$ schon konstruiert worden sind. Da $\mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$ und $\widehat{K}_{\lambda(\mu)} = K_{\lambda(\mu)}$ ist, gibt es eine holomorphe Funktion g auf G, so dass $|g(\mathbf{z}_\mu)| > q := \sup_{K_{\lambda(\mu)}} |g|$ ist. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Konstante (z.B. mit $\varrho := 2/(q + |g(\mathbf{z}_\mu)|)$) können wir erreichen:

$$|g(\mathbf{z}_\mu)| > 1 > q.$$

Setzen wir $f_\mu := g^k$, mit einem genügend großen k, so hat f_μ die Eigenschaften (1) und (2).

Wir behaupten, dass $\sum_\mu f_\mu$ auf G kompakt konvergiert. Für den Beweis halten wir erst einmal fest, daß es zu einer beliebigen kompakten Teilmenge $K \subset G$ immer ein $\mu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $K \subset K_{\lambda(\mu_0)}$ ist. Nach Konstruktion gilt $\sup_K |f_\mu| < 2^{-\mu}$

für $\mu \geq \mu_0$. Da die geometrische Reihe $\sum_\mu 2^{-\mu}$ auf K eine Majorante der Reihe $\sum_\mu f_\mu$ ist, konvergiert die Reihe der f_μ normal auf K. Also ist $f = \sum_\mu f_\mu$ auf G holomorph. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{z}_\mu)| &\geq |f_\mu(\mathbf{z}_\mu)| - \sum_{\nu \neq \mu} |f_\nu(\mathbf{z}_\mu)| \\ &> \mu + 1 - \sum_{\nu > \mu} |f_\nu(\mathbf{z}_\mu)| \\ &> \mu + 1 - \sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu} \quad (\text{denn } \mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\nu)} \text{ für } \nu > \mu) \\ &\geq \mu \qquad (\text{denn } \sum_{\nu \geq 1} 2^{-\nu} = 1). \end{aligned}$$

Daraus folgt: $|f(\mathbf{z}_\mu)| \to \infty$ für $\mu \to \infty$. ∎

Als wichtige Konsequenz ergibt sich:

4.10. Theorem

Ein Gebiet G ist genau dann holomorph-konvex, wenn es zu jeder unendlichen und in G diskreten Menge D eine holomorphe Funktion f auf G gibt, so dass $|f|$ auf D unbeschränkt ist.

BEWEIS: (1) Sei G holomorph-konvex, $D \subset G$ unendlich und diskret. Außerdem sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$. Dann ist $K_\nu \cap D$ endlich (oder leer) für jedes $\nu \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Punkten $\mathbf{z}_\mu \in D$.

Sei $\mathbf{z}_1 \in D \setminus K_1$ beliebig und $\lambda(1) \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{z}_1$ in $K_{\lambda(1)+1}$ liegt. Es seien schon Punkte $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\mu-1}$ und Zahlen $\lambda(1), \ldots, \lambda(\mu-1)$ konstruiert, so dass gilt:

$$\mathbf{z}_\nu \in K_{\lambda(\nu)+1} \setminus K_{\lambda(\nu)}, \text{ for } \nu = 1, \ldots, \mu - 1.$$

Dann wählen wir $\mathbf{z}_\mu \in D \setminus K_{\lambda(\mu-1)+1}$ und $\lambda(\mu)$ minimal, so dass $\mathbf{z}_\mu$ in $K_{\lambda(\mu)+1}$ liegt. Nach dem obigen Satz gibt es eine holomorphe Funktion f auf G, so dass $|f(\mathbf{z}_\mu)| \to \infty$ für $\mu \to \infty$ gilt. Deshalb ist $|f|$ auf D unbeschränkt.

(2) Sei nun umgekehrt das Kriterium erfüllt und $K \subset\subset G$. Dann ist $\widehat{K} \subset G$, und wir müssen noch zeigen, dass $\widehat{K}$ kompakt ist. Sei $(\mathbf{z}_\nu)$ eine beliebige Folge von Punkten aus $\widehat{K}$. Dann gilt:

$$\sup\{|f(\mathbf{z}_\nu)| : \nu \in \mathbb{N}\} \leq \sup_K |f| < \infty, \text{ für alle } f \in \mathcal{O}(G).$$

Deshalb kann $\{\mathbf{z}_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ nicht diskret in G sein, die Folge $(\mathbf{z}_\nu)$ muss einen Häufungspunkt $\mathbf{z}_0$ in G besitzen. Da $|f(\mathbf{z}_0)| \leq \sup_K |f|$ ist, gehört $\mathbf{z}_0$ zu $\widehat{K}$. Also ist G holomorph-konvex. ∎

Wir wollen nun darangehen zu zeigen, dass jedes holomorph-konvexe Gebiet ein Holomorphiegebiet ist. Dafür konstruieren wir für ein beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ eine Folge, die sich gegen jeden Randpunkt des Gebietes häuft.

4.11. Satz

Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $\lambda(\mu)$ von natürlichen Zahlen und eine Folge von Punkten $(\mathbf{z}_\mu) \in G$, so dass gilt:

1. $\mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$, *für alle* μ.
2. *Ist* $\mathbf{z}_0$ *ein Randpunkt von* G *und* $U = U(\mathbf{z}_0)$ *eine offene zusammenhängende Umgebung, so enthält jede Zusammenhangskomponente von* $U \cap G$ *unendlich viele Punkte der Folge* $(\mathbf{z}_\mu)$.

Beweis: Dies ist ein rein topologisches Resultat, da wir keine Annahme über G machen. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

(1) Sei $\mathscr{B} = \{B_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}\}$ das abzählbare System der Kugeln mit rationalem Mittelpunkt und rationalem Radius, die ∂G treffen. Jeder Durchschnitt $B_\nu \cap G$ hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Auf diese Weise erhalten wir eine abzählbare Familie

$$\mathscr{C} = \{C_\mu \,:\, \exists\, B \in \mathscr{B}, \text{ so dass } C_\mu \text{ eine Zusammenhangskomponente von } B \cap G \text{ ist}\}.$$

(2) Die Folgen $\lambda(\mu)$ und $(\mathbf{z}_\mu)$ werden induktiv konstruiert. Zunächst wird $\mathbf{z}_1 \in C_1 \setminus K_1$ beliebig gewählt. Dann gibt es genau eine Zahl $\lambda(1)$ mit $\mathbf{z}_1 \in K_{\lambda(1)+1} \setminus K_{\lambda(1)}$.

Nun seien $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\mu-1}$ und $\lambda(1), \ldots, \lambda(\mu-1)$ schon konstruiert, so dass gilt:

$$\lambda(j) > \lambda(j-1) \text{ und } \mathbf{z}_j \in C_j \cap (K_{\lambda(j)+1} \setminus K_{\lambda(j)}), \text{ für } j = 1, \ldots, \mu-1.$$

C_μ ist definitionsgemäß eine Zusammenhangskomponente von $B_{\nu(\mu)} \cap G$, für ein geeignetes $\nu(\mu) \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $B_{\nu(\mu)} \cap \partial G \neq \varnothing$, also $B_{\nu(\mu)} \cap G \neq \varnothing$ und $B_{\nu(\mu)} \cap (\mathbb{C}^n \setminus G) \neq \varnothing$. Aus dem Lemma über Randkomponenten folgt nun, dass ein $\mathbf{w} \in B_{\nu(\mu)} \cap \partial C_\mu \cap \partial G$ existiert.

Wegen $K_{\lambda(\mu-1)+1} \subset\subset G$ und $\mathbf{w} \in \partial G$ ist $\mathbb{C}^n \setminus K_{\lambda(\mu-1)+1}$ eine offene Umgebung von $\mathbf{w}$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\mathbf{z}_\mu \in C_\mu \cap (\mathbb{C}^n \setminus K_{\lambda(\mu-1)+1})$ und $\lambda(\mu) > \lambda(\mu-1)$ minimal, so dass $\mathbf{z}_\mu \in C_\mu \cap (K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)})$ ist.

(3) Nun zeigen wir, dass die Bedingung (2) des Satzes erfüllt ist. Sei $\mathbf{z}_0$ ein Punkt von ∂G, $U = U(\mathbf{z}_0)$ eine offene zusammenhängende Umgebung und Q eine Zusammenhangskomponente von $U \cap G$. Wir nehmen an, dass nur endlich viele $\mathbf{z}_\mu$ in Q liegen, etwa $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$. Dann sind

$$U^* := U \setminus \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\} \quad \text{und} \quad Q^* := Q \setminus \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$$

offene zusammenhängende Mengen, die kein $\mathbf{z}_\mu$ enthalten. Offensichtlich ist Q^* eine Zusammenhangskomponente von $G \cap U^*$.

Weil $G \cap U^* \neq \varnothing$ und $(\mathbb{C}^n \setminus G) \cap U^* \neq \varnothing$ ist, gibt es einen Punkt $\mathbf{w}_0$ in $U^* \cap \partial Q^* \cap \partial G$ und eine Kugel $B_\nu \subset U^*$ mit $B_\nu \in \mathcal{B}$ und $\mathbf{w}_0 \in B_\nu$. Dann ist $B_\nu \cap G \subset U^* \cap G$. Außerdem muss $B_\nu \cap G$ einen Punkt $\mathbf{w}_1 \in Q^*$ enthalten. Die Zusammenhangskomponente C^* von $\mathbf{w}_1$ in $B_\nu \cap G$ ist eine Teilmenge der Zusammenhangskomponente von $\mathbf{w}_1$ in $U^* \cap G$. Aber C^* ist ein Element C_{μ_0} von $\mathscr{C}$. Nach Konstruktion enthält es den Punkt $\mathbf{z}_{\mu_0}$. Das ist ein Widerspruch. Also liegen unendlich viele Glieder der Folge in Q. ∎

4.12. Satz

Ist G holomorph-konvex, so ist G ein Holomorphiegebiet.

BEWEIS: Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$. Wir wählen Folgen $\lambda(\mu) \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{z}_\mu \in G$, so dass die $\mathbf{z}_\mu$ in $K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$ liegen. Wir können annehmen, dass es für jeden Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$, jede offene zusammenhängende Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und jede Zusammenhangskomponente Q von $U \cap G$ unendlich viele $\mathbf{z}_\mu$ in Q gibt.

Sei nun f auf G holomorph und auf $D := \{\mathbf{z}_\mu : \mu \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt. Es ist klar, dass f in jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ voll singulär wird. ∎

Bemerkung: Es ist nicht erforderlich, dass eine vollständig singuläre holomorphe Funktion unbeschränkt ist. 1978 zeigte D. Catlin in seiner Dissertation, dass es zu jedem holomorph-konvexen Gebiet $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit glattem Rand eine holomorphe Funktion auf G gibt, die auf einer Umgebung von $\overline{G}$ beliebig oft differenzierbar (und damit auf G beschränkt) ist und in jedem Punkt des Randes von G voll singulär wird.

4.13. Satz

Jedes Gebiet in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist ein Holomorphiegebiet.

BEWEIS: Klar, denn jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist holomorph-konvex. ∎

4.14. Theorem

Die folgenden Aussagen über Gebiete $G \in \mathbb{C}^n$ sind äquivalent:

1. *G ist ein schwaches Holomorphiegebiet.*
2. *G ist holomorph-konvex.*
3. *Zu jeder unendlichen diskreten Teilmenge $D \subset G$ gibt es eine holomorphe Funktion f auf G, so daß $|f|$ auf D unbeschränkt ist.*

4. G ist ein Holomorphiegebiet.

Wir haben alle Äquivalenzen in den vergangenen Abschnitten bewiesen. Außerdem wissen wir, daß jedes Holomorphiegebiet pseudokonvex ist. Was fehlt, ist ein Beweis des Levi-Problems: Jedes pseudokonvexe Gebiet ist holomorph-konvex. Dazu fehlen uns bis jetzt aber die Mittel.

Jede affin-konvexe offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist ein Holomorphiegebiet. Das n-fache kartesische Produkt ebener Gebiete ist ein weiteres Beispiel:

4.15. Satz

Sind $G_1, \ldots, G_n \subset \mathbb{C}$ beliebige Gebiete, so ist $G := G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Holomorphiegebiet.

Beweis: Sei $D = \{\mathbf{z}_\mu = (z_1^\mu, \ldots, z_n^\mu) \,:\, \mu \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche diskrete Teilmenge von G. Dann gibt es ein i, so dass (z_i^μ) keinen Häufungspunkt in G_i hat, und es gibt eine holomorphe Funktion f auf G_i mit $\lim_{\mu\to\infty} \bigl| f(z_i^\mu) \bigr| = \infty$. Die Funktion $\widehat{f}$, definiert durch $\widehat{f}(z_1, \ldots, z_n) := f(z_i)$, ist auf G holomorph und auf D unbeschränkt. ■

Bemerkung: Der gleiche Beweis zeigt, dass jedes kartesische Produkt von Holomorphiegebieten wieder ein Holomorphiegebiet ist.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet. Wir wollen Kriterien dafür angeben, dass G ein Holomorphiegebiet ist. Dazu definieren wir eine Abbildung log vom absoluten Raum $\mathscr{V}$ in den $\mathbb{R}^n$ durch

$$\log(r_1, \ldots, r_n) := (\log r_1, \ldots, \log r_n).$$

Definition

Ein Reinhardtsches Gebiet G heißt ***logarithmisch konvex***, falls $\log \tau(G \cap (\mathbb{C}^*)^n)$ ein affin-konvexes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung: Ist $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in G$, so ist $\log \tau(\mathbf{z}) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$. Ist $\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^*)^n$, so ist $|z_i| > 0$ für alle i, und $\log \tau(\mathbf{z})$ ist tatsächlich ein Element von $\mathbb{R}^n$.

4.16. Satz

Das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ist logarithmisch konvex.

BEWEIS: Sei G das Konvergenzgebiet von $S(\mathbf{z})$ und $M := \log\tau(G\cap(\mathbb{C}^*)^n) \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ und Punkte $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in G\cap(\mathbb{C}^*)^n$ mit $\log\tau(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ und $\log\tau(\mathbf{w}) = \mathbf{y}$. Ist $\lambda > 1$ klein genug, so gehören $\lambda\mathbf{z}$ und $\lambda\mathbf{w}$ noch zu $G\cap(\mathbb{C}^*)^n$. Da $S(\mathbf{z})$ in $\lambda\mathbf{z}$ und $\lambda\mathbf{w}$ konvergiert, gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$|a_\nu| \cdot \lambda^{|\nu|} \cdot |\mathbf{z}^\nu| \le C \quad \text{und} \quad |a_\nu| \cdot \lambda^{|\nu|} \cdot |\mathbf{w}^\nu| \le C, \text{ für jedes } \nu \in \mathbb{N}_0^n.$$

Also ist

$$|a_\nu| \cdot \lambda^{|\nu|} \cdot |\mathbf{z}^\nu|^t \cdot |\mathbf{w}^\nu|^{1-t} \le C, \text{ für jedes } \nu \text{ und } 0 \le t \le 1.$$

Aus dem Abel'schen Lemma folgt, dass $S(\mathbf{z})$ in einer Umgebung von

$$\mathbf{z}_t := \left(|z_1|^t|w_1|^{1-t}, \dots, |z_n|^t|w_n|^{1-t}\right)$$

konvergiert. Das bedeutet, dass $\mathbf{z}_t \in G$ und $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} = \log\tau(\mathbf{z}_t) \in M$ ist, für $0 \le t \le 1$. Daher ist M konvex. ∎

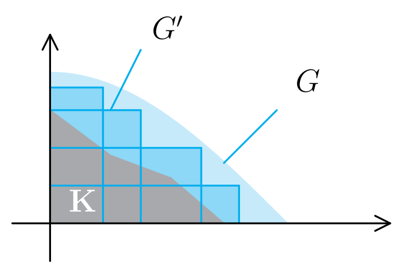
4.17. Satz

Sei G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet. Ist G logarithmisch konvex, so ist G holomorph-konvex.

BEWEIS: Sei K eine relativ-kompakte Teilmenge von G. Da G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet und $\overline{K}$ eine kompakte Teilmenge von G ist, gibt es Punkte $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$, so dass gilt:

$$K \subset G' := \bigcup_{i=1}^k \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{q}_i) \subset G,$$

wobei $\mathbf{q}_i := \tau(\mathbf{z}_i)$ ist.



Wir betrachten die Menge $\mathscr{M} = \{m(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\nu \, : \, \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ von Monomen, die eine Teilmenge von $\mathscr{O}(G)$ ist. Für $\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{q}_i)$ und $m \in \mathscr{M}$ haben wir:

$$|m(\mathbf{z})| = |\mathbf{z}^\nu| < \mathbf{q}_i^\nu = |m(\mathbf{q}_i)|.$$

Sei $Z := \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$. Für $\mathbf{z} \in \widehat{K}$ folgt dann:

$$|m(\mathbf{z})| \le \sup_K |m| \le \sup_{G'} |m| \le \sup_Z |m|, \text{ für alle } m \in \mathscr{M}.$$

Nehmen wir an, dass $\widehat{K}$ nicht relativ kompakt in G liegt. Dann hat $\widehat{K}$ einen Häufungspunkt in $\mathbf{z}_0$ in ∂G und es folgt, dass $|m(\mathbf{z}_0)| \le \sup_Z |m|$ für alle $m \in \mathscr{M}$ gilt.

Sei $h(\mathbf{z}) := \log\tau(\mathbf{z})$, für $\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^*)^n$. Da G logarithmisch konvex ist, ist das Gebiet $G_0 := h(G \cap (\mathbb{C}^*)^n) \subset \mathbb{R}^n$ affin konvex. Für den Augenblick nehmen wir an, dass

$\mathbf{z}_0 \in (\mathbb{C}^*)^n$ ist. Dann liegt $\mathbf{x}_0 := h(\mathbf{z}_0)$ in ∂G_0, und es gibt eine reelle Linearform $\lambda(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, so dass $\lambda(\mathbf{x}) < \lambda(\mathbf{x}_0)$ für $\mathbf{x} \in G_0$ ist.

Sei $\mathbf{x} = h(\mathbf{z})$ ein Punkt von G_0 und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $u_j \le x_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist $e^{u_j} \le e^{x_j} = |z_j|$ und deshalb (weil G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet ist) $\mathbf{w} = (e^{u_1}, \ldots, e^{u_n}) \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ und $\mathbf{u} = h(\mathbf{w}) \in G_0$. Insbesondere ist

$$\mathbf{x} - n\mathbf{e}_j \in G_0 \text{ und } \lambda(\mathbf{x}) - na_j = \lambda(\mathbf{x} - n\mathbf{e}_j) < \lambda(\mathbf{x}_0), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Deshalb ist $a_j \ge 0$ für $j = 1, \ldots, n$ (denn sonst müsste $\lambda(\mathbf{x}_0) > \lambda(\mathbf{x}) - na_j$ beliebig groß werden).

Jetzt wählen wir rationale Zahlen $r_j > a_j$ und setzen $\widetilde{\lambda}(\mathbf{x}) := r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$. Wenn wir die r_j genügend nahe bei den a_j wählen, dann gilt die Ungleichung $\widetilde{\lambda}(\log \mathbf{q}_i) < \widetilde{\lambda}(\mathbf{x}_0)$ für $i = 1, \ldots, k$, und sie gilt auch noch, wenn man mit dem gemeinsamen Nenner der r_j multipliziert. Deshalb können wir annehmen, dass die r_j natürliche Zahlen sind, und wir können ein spezielles Monom m_0 durch $m_0(\mathbf{z}) := z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}$ definieren. Dann ist

$$|m_0(\mathbf{z}_i)| = e^{\widetilde{\lambda}(\log \mathbf{q}_i)} < e^{\widetilde{\lambda}(\mathbf{x}_0)} = |m_0(\mathbf{z}_0)|, \text{ für } i = 1, \ldots, k.$$

Also ist $|m_0(\mathbf{z}_0)| > \sup_Z |m_0|$, und das ist ein Widerspruch.

Ist $\mathbf{z}_0 \notin (\mathbb{C}^*)^n$, dann können wir nach einer Permutation der Koordinaten annehmen, dass $z_1^{(0)} \cdots z_l^{(0)} \ne 0$ und $z_{l+1}^{(0)} = \cdots = z_n^{(0)} = 0$ ist (mit $l \ge 1$, weil $\mathbf{z}_0 \ne \mathbf{0}$ ist). Wir können auf den Raum $\mathbb{C}^l$ projizieren und mit Monomen in den Variablen $z_1, \ldots, z_l$ arbeiten. Der Beweis geht dann wie oben durch. ∎

Jetzt erhalten wir folgendes Resultat:

4.18. Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *G ist das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe.*
2. *G ist logarithmisch konvex.*
3. *G ist holomorph-konvex.*
4. *G ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen: Ist G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet und ein Holomorphiegebiet, so ist G das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe. Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion f, die auf G holomorph und in jedem Randpunkt voll singulär ist. Wir haben im vorigen Semester gezeigt, dass es zu jeder holomorphen Funktion auf einem eigentlichen Reinhardtschen Gebiet eine Potenzreihe $S(\mathbf{z})$ gibt, die auf G gegen f konvergiert. Wegen des Identitätssatzes kann sie auf keinem echt größeren Gebiet konvergieren. ∎