## § 3 Pseudokonvexität

### Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt ***pseudokonvex***, falls es eine streng plurisubharmonische $\mathcal{C}^\infty$-Ausschöpfungsfunktion für $G$ gibt.

**Bemerkungen:**

1. Nach dem Glättungs-Lemma ist klar: Ist $-\log \delta_G$ plurisubharmonisch, so ist $G$ pseudokonvex.
2. Pseudokonvexität ist invariant unter biholomorphen Transformationen.

### 3.1. Satz

*Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet, so genügt $G$ dem Kontinuitätsprinzip.*

Beweis: Sei $p : G \to \mathbb{R}$ eine streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion. Wir nehmen an, es gibt eine Familie $\{S_t \,:\, 0 \le t \le 1\}$ von analytischen Scheiben, gegeben durch eine stetige Abbildung $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$, so dass $\varphi$ holomorph in $\mathbb{D}$, $S_0 \subset G$ und $bS_t \subset G$ für jedes $t \in [0,1]$ ist, aber nicht alle $S_t$ in $G$ enthalten sind.

Die Funktionen $p \circ \varphi_t : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ sind für jedes $t$ mit $S_t \subset G$ subharmonisch. Aus dem Maximumprinzip folgt, dass $p|S_t \le \max_{bS_t} p$ für alle $t$ gilt.

Wir setzen $t_0 := \inf\{t \in [0,1] \,:\, S_t \not\subset G\}$. Dann ist $t_0 > 0$ und $S_{t_0} \subset \overline{G}$, und $S_{t_0}$ trifft $\partial G$ in wenigstens einem Punkt $\mathbf{z}_0$. Wir können eine monoton wachsende Folge $(t_\nu)$ finden, die gegen $t_0$ konvergiert, sowie eine Folge von Punkten $\mathbf{z}_\nu \in S_{t_\nu}$, die gegen $\mathbf{z}_0$ konvergiert (man wähle z.B. jeweils ein $\mathbf{z}_\nu \in S_{t_\nu}$, das von $\mathbf{z}_0$ minimalen Abstand hat. Weil $p$ eine Ausschöpfungsfunktion ist, konvergiert $p(\mathbf{z}_\nu)$ gegen $c_0 := \sup_G(p)$, aber weil die Vereinigung der $bS_t$ kompakt ist, gibt es ein $c < c_0$, so dass $p|_{bS_t} \le c$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Das ist ein Widerspruch. ∎

### 3.2. Folgerung

*Ist $G$ pseudokonvex, so ist $G$ Hartogs-konvex.*

### 3.3. Satz

*Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Hartogs-konvexes Gebiet, so ist $-\log \delta_G$ auf $G$ plurisubharmonisch.*

Beweis: Für $\mathbf{z} \in G$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ mit $\|\mathbf{u}\| = 1$ definieren wir

$$\delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}) := \sup\{t > 0 \,:\, \mathbf{z} + \tau\mathbf{u} \in G \text{ für } |\tau| \le t\}.$$

Dann ist $\delta_G(\mathbf{z}) = \inf\{\delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}) \,:\, \|\mathbf{u}\| = 1\}$, und es reicht zu zeigen, dass $-\log \delta_{G,\mathbf{u}}$ für jedes feste $\mathbf{u}$ plurisubharmonisch ist.

(a) Leider braucht $\delta_{G,\mathbf{u}}$ nicht stetig zu sein, die Funktion ist aber halbstetig nach unten:

Ist nämlich $\mathbf{z}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt und $c < \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0)$, so ist die kompakte Menge $K := \{\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \tau\mathbf{u} \,:\, |\tau| \le c\}$ in $G$ enthalten, und es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\{\mathbf{z} \,:\, \operatorname{dist}(K, \mathbf{z}) < \delta\} \subset G$ ist.

Für $\mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{z}_0)$ und $|\tau| \le c$ haben wir

$$\|(\mathbf{z} + \tau\mathbf{u}) - (\mathbf{z}_0 + \tau\mathbf{u})\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta, \text{ und daher } \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}) \ge c.$$

(b) Die Funktion $-\log \delta_{G,\mathbf{u}}$ ist halbstetig nach oben, und wir müssen zeigen, dass

$$s(\zeta) := -\log \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b})$$

für feste $\mathbf{u}, \mathbf{z}_0, \mathbf{b}$ subharmonisch ist.

(c) Zunächst untersuchen wir den Fall, dass $\mathbf{u}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig sind:

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{u}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \ne 0.$$

Sei $G_0$ die Zusammenhangskomponente von 0 in $\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b} \in G\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b}) &= \sup\{t > 0 \,:\, \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b} + \tau\mathbf{u} \in G \text{ für } |\tau| \le t\} \\
&= \sup\{t > 0 \,:\, \zeta + \tau/\lambda \in G_0 \text{ für } |\tau| \le t\} \\
&= \sup\{t > 0 \,:\, \zeta + \tau/\lambda \in G_0 \text{ für } |\frac{\tau}{\lambda}| \le \frac{t}{|\lambda|}\} \\
&= \sup\{t = r|\lambda| > 0 \,:\, \zeta + \sigma \in G_0 \text{ für } |\sigma| \le r\} \\
&= |\lambda| \cdot \sup\{r > 0 \,:\, \zeta + \sigma \in G_0 \text{ für } |\sigma| \le r\} \\
&= |\lambda| \cdot \delta_{G_0}(\zeta),
\end{aligned}$$

und $-\log \delta_{G_0}$ ist subharmonisch.

(d) Jetzt nehmen wir an, dass $\mathbf{u}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängig sind. Da diese Vektoren festgehalten werden, können wir uns auf die folgende spezielle Situation beschränken:

$$n = 2, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1, \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{e}_2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
s(\zeta) &= -\log \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b}) \\
&= -\log \sup\{t > 0 \,:\, \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b} + \tau\mathbf{u} \in G \text{ für } |\tau| \le t\} \\
&= -\log \sup\{t > 0 \,:\, (\zeta, \tau) \in G \text{ für } |\tau| \le t\}.
\end{aligned}$$

Wir benutzen holomorphe Funktionen, um zu zeigen, dass $s$ subharmonisch ist.

Sei $G_0$ die Zusammenhangskomponente von 0 in $\{\zeta \in \mathbb{C} : \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{e}_1 \in G\} = \{\zeta \in \mathbb{C} : (\zeta, 0) \in G\}$. Gegeben seien reelle Zahlen $R > r > 0$, so dass $(\zeta, 0) \in G$ für $|\zeta| < R$ ist, sowie eine holomorphe Funktion $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$, so dass $s < h := \operatorname{Re} f$ auf $\partial D_r(0)$ ist. Wir müssen zeigen, dass $s < h$ auf $D_r(0)$ ist.

Wir haben die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} s(\zeta) < h(\zeta) &\iff \sup\{t > 0 : (\zeta, \tau) \in G \text{ für } |\tau| \le t\} > e^{-h(\zeta)} \\ &\iff \sup\{t > 0 : (\zeta, ct) \in G \text{ für } |c| \le 1\} > |e^{-f(\zeta)}| \\ &\iff \big(\zeta, c \cdot e^{-f(\zeta)}\big) \in G \text{ für } c \in \overline{\mathbb{D}}. \end{aligned}$$

(e) Wir definieren eine holomorphe Abbildung $\mathbf{F}$ durch

$$\mathbf{F}(z_1, z_2) := \big(rz_1, z_2 e^{-f(rz_1)}\big).$$

Dann ist $\mathbf{F}$ auf einer Umgebung des Einheitspolyzylinders $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}^2(\mathbf{0}, 1)$ wohldefiniert. Wir wissen schon:

1. $\mathbf{F}(z_1, z_2) \in G$ für $|z_1| = 1$ und $|z_2| \le 1$, weil $s(\zeta) < h(\zeta)$ auf $\partial D_r(0)$ ist.
2. $\mathbf{F}(z_1, 0) \in G$ für $|z_1| \le 1$, weil $(\zeta, 0) \in G$ für $|\zeta| \le r$ ist.

Es muss gezeigt werden, dass $\mathbf{F}(\mathsf{P}^2) \subset G$ ist. Deshalb werden wir eine geeignete Hartogs-Figur zu konstruieren. Zunächst halten wir fest:

$$J_{\mathbf{F}}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ * & e^{-f(rz_1)} \end{pmatrix}, \qquad \text{also } \det J_{\mathbf{F}}(z_1, z_2) \ne 0.$$

Aus dem Satz über die Umkehrabbildung folgt, dass $\mathbf{F}$ biholomorph ist.

Für $0 < \delta < 1$ definieren wir $\mathbf{h}_\delta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ durch $\mathbf{h}_\delta(z_1, z_2) := (z_1, \delta z_2)$, und dann wenden wir $\mathbf{h}_\delta$ auf die folgende kompakte Menge an:

$$C := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : (|z_1| \le 1,\ z_2 = 0) \text{ oder } (|z_1| = 1,\ |z_2| \le 1)\} \subset \overline{\mathsf{P}^2}.$$

Das ergibt die Menge

$$C_\delta := \mathbf{h}_\delta(C) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : (|z_1| \le 1,\ z_2 = 0) \text{ oder } (|z_1| = 1,\ |z_2| \le \delta)\}.$$

Es ist $\mathbf{F}(C_\delta) \subset G$, wie wir oben gesehen haben, und daher $C_\delta \subset \mathbf{F}^{-1}(G)$.

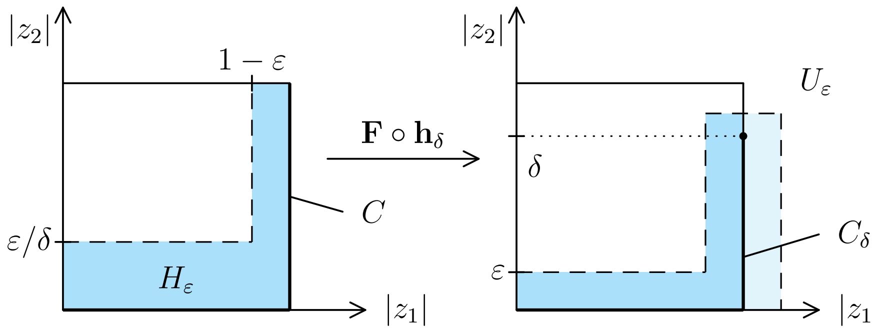
Für $0 < \varepsilon < \min(\delta, 1 - \delta)$ definieren wir eine Umgebung $U_\varepsilon$ von $C_\delta$ durch $U_\varepsilon :=$

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : (|z_1| < 1 + \varepsilon,\ |z_2| < \varepsilon) \text{ oder } (1 - \varepsilon < |z_1| < 1 + \varepsilon,\ |z_2| < \delta + \varepsilon)\}.$$

Wenn wir $\varepsilon$ klein genug wählen, ist $U_\varepsilon \subset \mathbf{F}^{-1}(G)$.

Schließlich setzen wir $\mathsf{H}_\varepsilon := \mathbf{h}_\delta^{-1}(U_\varepsilon \cap \mathsf{P}^2) \cap \mathsf{P}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_\varepsilon &= \{(z_1, z_2) \in \mathsf{P}^2 : (z_1, \delta z_2) \in U_\varepsilon \cap \mathsf{P}^2\} \\ &= \Big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \big(|z_1| < 1,\ |z_2| < \frac{\varepsilon}{\delta}\big) \text{ oder } (1 - \varepsilon < |z_1| < 1,\ |z_2| < 1)\Big\}. \end{aligned}$$




Da $(\mathsf{P}^2, \mathsf{H}_\varepsilon)$ eine euklidische Hartogs-Figur ist, ist $(\mathbf{F}\circ\mathbf{h}_\delta(\mathsf{P}^2), \mathbf{F}\circ\mathbf{h}_\delta(\mathsf{H}_\varepsilon))$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\mathbf{F}\circ\mathbf{h}_\delta(\mathsf{H}_\varepsilon) \subset \mathbf{F}(U_\varepsilon \cap \mathsf{P}^2) \subset G$. Da $G$ Hartogs-konvex ist, muss $\mathbf{F}\circ h_\delta(\mathsf{P}^2) \subset G$ sein. Das gilt für jedes $\delta < 1$. Weil $\mathsf{P}^2 = \bigcup_{0<\delta<1} \mathbf{h}_\delta(\mathsf{P}^2)$ ist, muss $\mathbf{F}(\mathsf{P}^2) \subset G$ sein. Damit ist alles gezeigt. ∎

## 3.4. Theorem

*Die folgenden Aussagen über ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ sind äquivalent:*

1. *$G$ genügt dem Kontinuitätsprinzip.*
2. *$G$ ist Hartogs-konvex.*
3. *$-\log \delta_G$ ist plurisubharmonisch auf $G$.*
4. *$G$ ist pseudokonvex.*

BEWEIS:

Die Aussagen (1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3) und (4) $\Longrightarrow$ (1) haben wir schon gezeigt, (3) $\Longrightarrow$ (4) folgt aus dem Glättungslemma. ∎

## 3.5. Satz

*Sind $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvexe Gebiete, so ist auch $G_1 \cap G_2$ pseudokonvex.*

BEWEIS: Die Aussage ist trivial, wenn man Hartogs-Konvexität benutzt. ∎

## 3.6. Satz

*Sei $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^n$ eine aufsteigende Folge pseudokonvexer Gebiete. Dann ist auch $G := \bigcup_{\nu=1}^\infty G_\nu$ pseudokonvex.*

BEWEIS: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Kontinuitätsprinzip, wenn man folgendes berücksichtigt: Ist $(S_t)$ eine Familie analytischer Scheiben, so sind die Mengen $S_0$ und $\bigcup_{0\le t\le 1} bS_t$ kompakt. ∎

### 3.7. Satz

*Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann pseudokonvex, wenn es eine offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von $\overline{G}$ gibt, so dass $U_\iota \cap G$ für jedes $\iota \in I$ pseudokonvex ist.*

BEWEIS:

„$\Longrightarrow$“ ist trivial, denn Kugeln und Polyzylinder sind pseudokonvex.

Die andere Richtung („$\Longleftarrow$“) wird in zwei Schritten gezeigt. Zunächst nehmen wir an, dass $G$ beschränkt ist.

Zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ gibt es eine offene Menge $U_\iota$, so dass $\mathbf{z}_0 \in U_\iota$ und $G \cap U_\iota$ pseudokonvex ist. Wir wählen dann eine so kleine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset U_\iota$, dass $\operatorname{dist}(\mathbf{z}, \partial U_\iota) > \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0)$ für jedes $\mathbf{z} \in W \cap G$ ist. Offensichtlich liegt $\mathbf{z}_0$ in $\partial(G \cap U_\iota)$.

Weil $\mathbb{C}^n \setminus G \cap U_\iota = (\mathbb{C}^n \setminus G) \cup (\mathbb{C}^n \setminus U_\iota)$ ist, muss jeder Randpunkt von $G \cap U_\iota$ entweder in $\partial G$ oder in $\partial U_\iota$ liegen. Ist $\mathbf{z} \in W \cap G$, so muss der Punkt auf $\partial(G \cap U_\iota)$, der $\mathbf{z}$ am nächsten liegt, auf dem Rand von $G$ liegen. Also ist $\delta_G(\mathbf{z}) = \delta_{G \cap U_\iota}(\mathbf{z})$ für jeden Punkt $\mathbf{z} \in W \cap G$. Daraus folgt, dass es eine offene Umgebung $U = U(\partial G)$ gibt, so dass $-\log \delta_G$ auf $U \cap G$ plurisubharmonisch ist. Wir definieren

$$c := \sup\{-\log \delta_G(\mathbf{z}) \,:\, \mathbf{z} \in G \setminus U\},$$

und

$$p(\mathbf{z}) := \max\bigl(-\log \delta_G(\mathbf{z}), \|z\|^2 + c + 1\bigr).$$

Dann ist $p$ eine plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion, und nach dem Glättungslemma ist $G$ pseudokonvex.

Ist $G$ unbeschränkt, so schreiben wir $G$ als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Gebieten $G_\nu := \mathsf{B}_\nu(\mathbf{0}) \cap G$. Jedes $G_\nu$ ist beschränkt und erfüllt (mit der Überdeckung $U_{\iota,\nu} := U_\iota \cap \mathsf{B}_\nu(\mathbf{0})$) die nötigen Voraussetzungen, ist also pseudokonvex. Dann ist auch $G$ ein pseudokonvexes Gebiet. ∎

### Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Der Rand von $G$ heißt ***glatt*** in $\mathbf{z}_0 \in \partial G$, falls es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ und eine Funktion $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$ gibt, so dass gilt

1. $U \cap G = \{\mathbf{z} \in U \,:\, \varrho(\mathbf{z}) < 0\}$.
2. $(d\varrho)_\mathbf{z} \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$.

Die Funktion $\varrho$ heißt eine ***lokale Randfunktion***.

**Bemerkung:** Mit dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass $U \cap \partial G = \{\mathbf{z} \in U : \varrho(\mathbf{z}) = 0\}$ eine $(2n-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $U$ ist (zu den Details siehe Analysis 3).

### 3.8. Lemma

*Ist $\partial G$ in $\mathbf{z}_0$ glatt und sind $\varrho_1, \varrho_2$ zwei lokale Randfunktionen auf $U = U(\mathbf{z}_0)$, so gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $h$ auf $U$, so dass gilt:*

1. *$h > 0$ auf $U$.*
2. *$\varrho_1 = h \cdot \varrho_2$ auf $U$.*
3. *$(d\varrho_1)_\mathbf{z} = h(\mathbf{z}) \cdot (d\varrho_2)_\mathbf{z}$ für $\mathbf{z} \in U \cap \partial G$.*

Beweis: Siehe Analysis 3! ∎

### 3.9. Satz

*Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann ist $\partial G$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, und es gibt eine globale Randfunktion.*

Beweis: Wir finden offene Mengen $V_i \subset\subset U_i \subset \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, N$, so dass gilt:

1. $\{V_1, \ldots, V_N\}$ ist eine offene Überdeckung von $\partial G$.
2. Für jedes $i$ gibt es eine lokale Randfunktion $\varrho_i$ für $G$ auf $U_i$.
3. Für jedes $i$ gibt es eine glatte Funktion $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_i|_{V_i} \equiv 1$, $\varphi_i|_{\mathbb{C}^n \setminus U_i} \equiv 0$ und $\varphi_i \geq 0$ im allgemeinen.

Sei $\varphi := \sum_i \varphi_i$ (also $\varphi > 0$ auf $\partial G$) und $\psi_i := \varphi_i/\varphi$. Dann ist $\sum_i \psi_i \equiv 1$ auf $\partial G$. Man nennt das System der Funktionen $\psi_i$ bekanntlich eine *Teilung der Eins* auf $\partial G$.

Die Funktion $\varrho := \sum_{i=1}^N \psi_i \varrho_i$ ist jetzt eine globale Randunktion für $G$. Die Details sind leicht zu überprüfen. ∎

Sei nun $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $\varrho : U = U(\partial G) \to \mathbb{R}$ eine globale Randfunktion. In jedem $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ ist der *reelle Tangentialraum* an den Rand gegeben durch

$$T_{\mathbf{z}_0}(\partial G) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : (d\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v}) = 0\}.$$

Das ist ein $(2n-1)$-dimensionaler reeller Unterraum von $\mathbb{C}^n$.

Dabei ist

$$(d\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v}) = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_{z_\nu}(\mathbf{z}_0)v_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0)\overline{v_\nu} = (\partial\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v}) + (\overline{\partial}\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v})$$

und

$$(d\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\,\mathrm{i}\,\mathbf{v}) = \mathrm{i}\,\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_{z_\nu}(\mathbf{z}_0)v_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0)\overline{v_\nu}\Big).$$

Den Raum

$$H_{\mathbf{z}_0}(\partial G) := T_{\mathbf{z}_0}(\partial G) \cap \mathrm{i}\,T_{\mathbf{z}_0}(\partial G) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \,:\, (\partial\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v}) = 0\}$$

nennt man den ***komplexen*** (oder ***holomorphen***) ***Tangentialraum*** des Randes in $\mathbf{z}_0$. Er ist ein $(n-1)$-dimensionaler komplexer Unterraum[1] des $\mathbb{C}^n$.

## Definition

Ein Gebiet $G$ erfüllt in $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ die ***Levi-Bedingung*** (bzw. die ***strikte Levi-Bedingung***), falls $\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}_0}\varrho$ positiv semidefinit (bzw. positiv definit) auf $H_{\mathbf{z}_0}(\partial G)$ ist.

$G$ heißt ***Levi-konvex*** (bzw. ***strikt Levi-konvex***), falls $G$ in jedem Punkt $\mathbf{z} \in \partial G$ die Levi-Bedingung (bzw. die strikte Levi-Bedingung) erfüllt.

**Bemerkung:** Die Levi-Bedingungen hängen nicht von der Wahl der Randfunktion ab, und sie sind invariant unter biholomorphen Transformationen:

Ist nämlich $\varrho_1 = h \cdot \varrho_2$, mit $h > 0$, dann gilt für $\mathbf{z} \in \partial G$:

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}(\varrho_1)(\mathbf{w}) = h(\mathbf{z}) \cdot \mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}(\varrho_2)(\mathbf{w}) + 2\,\mathrm{Re}\{(\overline{\partial}h)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}) \cdot (\partial\varrho_2)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})\}.$$

Deshalb unterscheiden sich die Levi-Formen von $\varrho_1$ und $\varrho_2$ auf $H_{\mathbf{z}}(\partial G)$ nur durch eine positive Konstante.

Wir wollen jetzt eine Verbindung zwischen der Levi-Konvexität und der gewöhnlichen Konvexität herstellen. Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $U = U(\mathbf{a})$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mindestens $\mathcal{C}^2$, so ist die quadratische Form

$$\mathrm{Hess}_{\mathbf{a}}(\varphi)(\mathbf{w}) := \sum_{\nu,\mu} \varphi_{x_\nu x_\mu}(\mathbf{a})w_\nu w_\mu$$

bekannt als die ***Hesse-Form*** von $\varphi$ in $\mathbf{a}$.

## 3.10. Satz

*Sei $G \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und $\varrho$ eine globale Randfunktion für $G$. Das Gebiet $G$ ist genau dann konvex, wenn für jedes $\mathbf{x} \in \partial G$ die Hesse-Form $\mathrm{Hess}_{\mathbf{x}}(\varrho)$ auf $T_{\mathbf{x}}(\partial G)$ positiv semidefinit ist.*

[1] $H_{\mathbf{z}}(\partial G)$ wird oft auch mit $T^{1,0}_{\mathbf{z}}(\partial G)$ bezeichnet.

BEWEIS: Sei $G$ konvex und $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine affine (reelle) Hyperebene $H = \mathbf{x}_0 + E$ mit $H \cap G = \varnothing$. Ist $\mathbf{v} \in E$ und $f(t) := \varrho(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$, so ist $f(0) = 0$ und $f(t) \geq 0$ sonst. Also liegt in $t = 0$ ein Minimum vor, und es ist $0 = f'(0) = (d\varrho)_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})$, also $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(\partial G)$. Aus Dimensionsgründen muss $E = T_{\mathbf{x}_0}(\partial G)$ sein. Außerdem ist $f''(0) = \mathrm{Hess}_{\mathbf{x}_0}(\varrho)(\mathbf{w})$. Wegen des Minimums ist $f''(0) \geq 0$ und die Hesse-Form damit positiv semidefinit.

Sei nun umgekehrt das Kriterium erfüllt. O.B.d.A sei $\mathbf{0} \in G$. Wir definieren $\varrho_\varepsilon$ durch

$$\varrho_\varepsilon(\mathbf{x}) := \varrho(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|^2.$$

Die Menge $G_\varepsilon := \{\mathbf{x} : \varrho_\varepsilon(\mathbf{x}) < 0\} = \{\mathbf{x} : \varrho(\mathbf{x}) < -\varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|^2\}$ ist offen, für $\varepsilon' < \varepsilon$ ist $G_\varepsilon \subset G_{\varepsilon'} \subset\subset G$, und es ist $\bigcup_{\varepsilon>0} G_\varepsilon = G$. Deshalb reicht es zu zeigen, dass $G_\varepsilon$ konvex ist.

Zunächst überlegen wir uns, dass $G_\varepsilon$ für kleines $\varepsilon$ ein Gebiet ist. Wäre das nicht der Fall, dann gäbe es eine monoton fallend gegen 0 konvergente Folge $(\varepsilon_\nu)$ und Punkte $\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu \in G_\nu := G_{\varepsilon_\nu}$, die man nicht in $G_\nu$ miteinander verbinden kann. Weil $\overline{G}$ kompakt ist, kann man annehmen, dass $(\mathbf{x}_\nu)$ gegen ein $\mathbf{x}_0$ und $(\mathbf{y}_\nu)$ gegen ein $\mathbf{y}_0$ konvergiert. O.B.d.A seien die Folgen $\mathrm{dist}(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_0)$ und $\mathrm{dist}(\mathbf{y}_\nu, \mathbf{y}_0)$ monoton fallend.

1. Fall: Sind $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ Punkte von $G$, so kann man kleine abgeschlossene Kugeln $K_1, K_2$ um diese Punkte finden, die noch ganz in $G$ liegen. Sei $\mathbf{x}_\nu \in K_1$, $\mathbf{y}_\nu \in K_2$ und $K$ die Spur eines Verbindungsweges von $\mathbf{x}_\nu$ nach $\mathbf{y}_\nu$ in $G$. Dann gibt es ein $\mu > \nu$, so dass $K_1$, $K_2$ und $K$ ganz in $G_\mu$ liegen. Da man $\mathbf{x}_\mu$ mit $\mathbf{x}_\nu$ in $K_1$ (und damit in $G_\mu$) miteinander verbinden kann (und analog $\mathbf{y}_\mu$ mit $\mathbf{y}_\nu$), erhält man einen Widerspruch.

2. Fall: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial G$. Nach Wahl geeigneter Koordinaten kann man eine Produktumgebung $U = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ von $\mathbf{x}_0$ und eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion $g : U' \to U''$ finden, so dass $G \cap U = \{(\mathbf{x}', x_n) : x_n < g(\mathbf{x}')\}$ ist. Ist $\varepsilon$ klein genug, so unterscheidet sich $\varrho_\varepsilon$ von $\varrho$ nur sehr wenig, und $G_\varepsilon \cap U$ ist immer noch zusammenhängend. Verbindet man ein $\mathbf{x}_\nu \in U$ mit einem $\mathbf{y}_\nu$ und wählt man $\varepsilon_\mu$ so klein, dass der Verbindungsweg ganz in $G_\mu$ liegt, so kann man $\mathbf{x}_\mu$ in $G_\mu \cap U$ mit $\mathbf{x}_\nu$ verbinden. Dies führt wieder zu einem Widerspruch, genauso wie die Möglichkeit, dass $\mathbf{y}_0$ in $\partial G$ liegt. Für kleines $\varepsilon$ ist $G_\varepsilon$ tatsächlich ein Gebiet.

Die Hesse-Form von $\varrho_\varepsilon$ ist für jedes $\mathbf{x} \in \partial G$ auf $T_{\mathbf{x}}(\partial G)$ positiv definit. Das gilt dann aber sogar auf einer ganzen Umgebung $U$ von $\partial G$. Ist $\varepsilon$ klein genug, so ist $\partial G_\varepsilon \subset U$. Nun sei $\varepsilon$ so gewählt und

$$S := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G_\varepsilon \times G_\varepsilon : t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in G_\varepsilon, \text{ für } 0 < t < 1\}.$$

Dann ist $S$ eine offene Teilmenge des Gebietes $G_\varepsilon \times G_\varepsilon$. Wir wollen zeigen, dass $S$ auch eine abgeschlossene Teilmenge ist. Sei $(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)$ eine Folge in $S$, die gegen einen Punkt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in G_\varepsilon \times G_\varepsilon$ konvergiert. Wir nehmen an, dass $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ nicht in $S$ liegt. Dann gibt es ein $t_0 \in (0,1)$ mit $t_0\mathbf{x}_0 + (1-t_0)\mathbf{y}_0 \in \partial G_\varepsilon$. Also hat die

Funktion $t \mapsto \varrho_\varepsilon \circ \alpha(t)$ mit $\alpha(t) := t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{y}_0$ ein Maximum in $t_0$. Daher gilt: $(\varrho_\varepsilon \circ \alpha)''(t_0) \le 0$ und $\mathrm{Hess}_{\alpha(t_0)}(\varrho_\varepsilon)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \le 0$. Das ist ein Widerspruch, es muss $S = G_\varepsilon \times G_\varepsilon$ und damit $G_\varepsilon$ konvex sein. ∎

Ein Gebiet $G = \{\varrho < 0\}$ heißt ***strikt konvex*** in $\mathbf{x}_0 \in \partial G$, falls $\mathrm{Hess}_{\mathbf{x}_0}(\varrho)$ positiv definit ist. Diese Eigenschaft ist unabhängig von $\varrho$ und invariant unter affinen Transformationen.

Jetzt kehren wir zur Levi-Konvexität zurück.

### 3.11. Lemma

*Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R})$. Dann ist*

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varphi(\mathbf{w}) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Hess}_{\mathbf{z}}\varphi(\mathbf{w}) + \mathrm{Hess}_{\mathbf{z}}\varphi(\mathrm{i}\,\mathbf{w})\right).$$

Beweis: Sei $\alpha_1(t) := \mathbf{z} + t\cdot\mathbf{w}$ und $\alpha_2(s) := \mathbf{z} + s\cdot(\mathrm{i}\,\mathbf{w})$, für $t, s \in \mathbb{R}$, sowie $\alpha(\zeta) := \mathbf{z} + \zeta\mathbf{w}$, für $\zeta \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varphi(\mathbf{w}) &= \frac{\partial^2(f\circ\alpha)}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}}(0) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2(f\circ\alpha)}{\partial t^2}(0) + \frac{\partial^2(f\circ\alpha)}{\partial s^2}(0)\right] \\
&= \frac{1}{4}\Big[(f\circ\alpha_1)''(0) + (f\circ\alpha_2)''(0)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{Hess}_{\mathbf{z}}\varphi(\mathbf{w}) + \mathrm{Hess}_{\mathbf{z}}\varphi(\mathrm{i}\,\mathbf{w})\Big].
\end{aligned}$$

∎

### 3.12. Theorem

*Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$G$ ist strikt Levi-konvex.*
2. *Es gibt eine offene Umgebung $U = U(\partial G)$ und eine streng plurisubharmonische Funktion $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$, so daß $U \cap G = \{\mathbf{z} \in U \,:\, \varrho(\mathbf{z}) < 0\}$ und $(d\varrho)_{\mathbf{z}} \ne 0$ für $\mathbf{z} \in U$ gilt.*
3. *Zu jedem $\mathbf{z} \in \partial G$ gibt es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{z}) \subset \mathbb{C}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\mathbf{F} : W \to V$, so dass $\mathbf{F}(W \cap G)$ konvex (und sogar strikt konvex) in jedem Punkt von $\mathbf{F}(W \cap \partial G)$ ist.*

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Wir wählen eine globale Randfunktion $\varrho$ für $G$ und eine offene Umgebung $U = U(\partial G)$, so dass $\varrho$ auf $U$ definiert und $(d\varrho)_{\mathbf{z}} \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$ ist. Sei $A > 0$ eine reelle Konstante und $\varrho_A := e^{A\varrho} - 1$. Dann ist $\varrho_A$ ebenfalls eine globale Randfunktion und

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho_A(\mathbf{w}) = Ae^{A\varrho(\mathbf{z})}\left[\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho(\mathbf{w}) + A|(\partial\varrho)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})|^2\right].$$

Die Menge $K := \partial G \times S^{2n-1}$ ist kompakt und

$$K_0 := \{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in K \,:\, \mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho(\mathbf{w}) \leq 0\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge. Da $\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho$ positiv definit auf $H_{\mathbf{z}}(\partial G)$ ist, ist $(\partial\varrho)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}) \neq 0$ für $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in K_0$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} M &:= \min_K \mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho(\mathbf{w}) \;>\; -\infty \\ \text{und} \quad C &:= \min_{K_0} |(\partial\varrho)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})|^2 \;>\; 0. \end{aligned}$$

Wir wählen $A$ so groß, dass $A \cdot C + M > 0$ ist. Dann folgt:

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho_A(\mathbf{w}) = A \cdot [\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho(\mathbf{w}) + A|(\partial\varrho)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})|^2] \geq A \cdot (M + AC) > 0$$

für $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in K_0$, und

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho_A(\mathbf{w}) > A^2 \cdot |(\partial\varrho)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})|^2 \geq 0$$

für $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in K \setminus K_0$.

Also ist $\mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho_A(\mathbf{w}) > 0$ für jedes $\mathbf{z} \in \partial G$ und jedes $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Aus Stetigkeitsgründen ist $\varrho_A$ dann sogar in einer Umgebung von $\partial G$ streng plurisubharmonisch.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Wir betrachten einen Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ und machen einige einfache (biholomorphe) Koordinatentransformationen. Die Definitheit der Leviform bleibt dabei unberührt.

a) Durch die Translation $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ ersetzen wir $\mathbf{z}_0$ durch den Ursprung, und eine Permutation der Koordinaten sichert, dass in den neuen Koordinaten $\varrho_{w_1}(\mathbf{0}) \neq 0$ ist.

b) Die lineare Transformation

$$\mathbf{L} : \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u} = \big(\varrho_{w_1}(\mathbf{0})w_1 + \cdots + \varrho_{w_n}(\mathbf{0})w_n, w_2, \ldots, w_n\big)$$

ist dann biholomorph. Setzt man $\varrho_1 := \varrho \circ \mathbf{L}^{-1}$, so ist $\varrho_1 \circ \mathbf{L} = \varrho$, also $\nabla\varrho_1(\mathbf{0}) \cdot J_{\mathbf{L}}(\mathbf{0}) = \nabla\varrho(\mathbf{0})$ und damit (nach Taylor)

$$\begin{aligned}
\varrho_1(\mathbf{u}) &= \varrho(0) + \sum_{\nu=1}^{n} (\varrho_1)_{u_\nu}(\mathbf{0}) u_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} (\varrho_1)_{\overline{u}_\nu}(\mathbf{0}) \overline{u}_\nu + \text{ Terme vom Grad } \geq 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{u} \cdot \nabla \varrho_1(\mathbf{0})^\top\right) + \text{ Terme vom Grad } \geq 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{w} \cdot J_{\mathbf{L}}(\mathbf{0})^\top \cdot \nabla \varrho_1(\mathbf{0})^\top\right) + \text{ Terme vom Grad } \geq 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{w} \cdot \nabla \varrho(\mathbf{0})^\top\right) + \text{ Terme vom Grad } \geq 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}(u_1) + \text{ Terme vom Grad } \geq 2.
\end{aligned}$$

Die neue Funktion $\varrho_1$ bezeichnen wir nun wieder mit $\varrho$.

c) Schließlich schreiben wir

$$\varrho(\mathbf{u}) = 2\,\mathrm{Re}\big(u_1 + Q(\mathbf{u})\big) + \mathrm{Lev}_{\mathbf{0}}\varrho(\mathbf{u}) + \text{ Terme vom Grad } \geq 3,$$

wobei $Q$ ein quadratisches holomorphes Polynom ist. Wir machen die biholomorphe Transformation

$$\mathbf{S} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} = (u_1 + Q(\mathbf{u}), u_2, \ldots, u_n),$$

mit $J_{\mathbf{S}}(\mathbf{0}) = E_n$. Nennen wir die neue Funktion $\varrho_2 := \varrho \circ \mathbf{S}^{-1}$ wieder $\varrho$, so folgt:

$$\varrho(\mathbf{v}) = 2\,\mathrm{Re}(v_1) + \mathrm{Lev}_{\mathbf{0}}\varrho(\mathbf{v}) + \text{ Terme vom Grad } \geq 3.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Taylor-Entwicklung ist aber auch

$$\varrho(\mathbf{v}) = D\varrho(\mathbf{0})(\mathbf{v}) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{\mathbf{0}}(\varrho)(\mathbf{v}) + \text{ Terme der Ordnung } \geq 3\,,$$

und deshalb $\mathrm{Hess}_{\mathbf{0}}(\varrho)(\mathbf{v}) = 2 \cdot \mathrm{Lev}_{\mathbf{0}}\varrho(\mathbf{v}) > 0$ für $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (in neuen Koordinaten). Das funktioniert alles in einer Umgebung, die konvex gewählt werden kann.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Dies folgt aus dem obigen Lemma:

$$\mathrm{Hess}_{\mathbf{z}}(\varrho) > 0 \text{ auf } T_{\mathbf{z}}(\partial G) \implies \mathrm{Lev}_{\mathbf{z}}\varrho > 0 \text{ auf } H_{\mathbf{z}}(\partial G).$$

Die letztere Eigenschaft ist invariant unter biholomorphen Transformationen. ∎

Ist $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und strikt Levi-konvex, so ist leicht zu sehen, dass $G$ pseudokonvex ist. Man kann aber sogar zeigen, dass die schwache Levi-Konvexität äquivalent zur Pseudokonvexität ist (sogenannter „Satz von Levi“).[2]

[2] Eigentlich zeigte E.E. Levi, dass jedes Holomorphiegebiet mit glattem Rand Levi-konvex ist, und dass der Rand eines strikt Levi-konvexen Gebietes $G$ lokal die „natürliche Grenze“ für eine holomorphe Funktion in $G$ ist.