§ 2 Plurisubharmonische Funktionen

Wir beginnen mit einigen Fakten aus der 1-dimensionalen komplexen Analysis.

Zunächst führen wir den Begriff der halbstetigen Funktion ein.

Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt in $\mathbf{z}_0 \in M$ ***halbstetig nach oben***, falls gilt:

Ist $f(\mathbf{z}_0) < r$, so gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $f(\mathbf{z}) < r$ für alle $\mathbf{z} \in U \cap M$ ist.

Entsprechend heißt eine Funktion $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ***halbstetig nach unten***, falls gilt:

Ist $f(\mathbf{z}_0) > r$, so gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $f(\mathbf{z}) > r$ für alle $\mathbf{z} \in U \cap M$ ist.

2.1. Satz

f ist genau dann stetig, wenn f halbstetig nach oben und nach unten ist.

BEWEIS: 1) Sei f stetig in $\mathbf{z}_0$, $r < f(\mathbf{z}_0) < R$ und

$$0 < \varepsilon < \min(R - f(\mathbf{z}_0), f(\mathbf{z}_0) - r).$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_0)| < \varepsilon$ für $\mathbf{z} \in U_\delta(\mathbf{z}_0)$ gilt, also

$$r < f(\mathbf{z}_0) - \varepsilon < f(\mathbf{z}) < f(\mathbf{z}_0) + \varepsilon < R.$$

Damit ist f nach oben und unten halbstetig.

2) Sei f halbstetig nach unten und oben und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(\mathbf{z}_0) - \varepsilon < f(\mathbf{z}) < f(\mathbf{z}_0) + \varepsilon$ für $\mathbf{z} \in U_\delta(\mathbf{z}_0) \cap M$ ist. also $|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_0)| < \varepsilon$. Damit ist f stetig in $\mathbf{z}_0$. ∎

2.2. Beispiel

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen, $F : B \to \mathbb{C}^m$ holomorph und $f(\mathbf{z}) := \operatorname{rg} J_F(\mathbf{z})$. Ist $\mathbf{z}_0 \in B$ und $k := f(\mathbf{z}_0)$, so gibt es eine k-reihige Untermatrix D von J_F, so dass $\det D(\mathbf{z}_0) \neq 0$ ist. Aus Stetigkeitsgründen gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$, so dass $\det D(\mathbf{z}) \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$ ist. Also ist $f(\mathbf{z}) \geq k$ auf U.

Im Falle $k = n$ ist f nahe $\mathbf{z}_0$ konstant, also stetig. Wir brauchen nur den Fall $k < n$ zu betrachten. Sind dann $D_1, \ldots, D_N$ alle $(k+1)$-reihigen Unterdeterminanten, so liegt $\mathbf{z}_0$ in der analytischen Menge $A := \{\mathbf{z} \in B : D_1(\mathbf{z}) = \ldots = D_N(\mathbf{z}) = 0\}$. Auf $U \cap A$ ist $f(\mathbf{z}) = k$, auf $U \setminus A$ ist $f(\mathbf{z}) > k$. Also ist f halbstetig nach unten.

2.3. Satz

Seien $f, g : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ in $\mathbf{z}_0$ halbstetig nach oben, $c > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt:

1. *$c \cdot f$ ist in $\mathbf{z}_0$ halbstetig nach oben.*
2. *$-f$ ist in $\mathbf{z}_0$ halbstetig nach unten.*
3. *$f + g$ ist in $\mathbf{z}_0$ halbstetig nach oben.*
4. *$\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind in $\mathbf{z}_0$ halbstetig nach oben.*

BEWEIS: (1) und (2) sind trivial.

(3) Sei $f(\mathbf{z}_0) < r$. Wir können annehmen, dass beide Funktionen in $\mathbf{z}_0$ größer als $-\infty$ sind und setzen $\varepsilon := \big(r - f(\mathbf{z}_0) - g(\mathbf{z}_0)\big)/2$, sowie $r_1 := f(\mathbf{z}_0) + \varepsilon$ und $r_2 := g(\mathbf{z}_0) + \varepsilon$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$, so dass $f < r_1$ und $g < r_2$ auf $U \cap M$ gilt. Für $\mathbf{z} \in U \cap M$ folgt:

$$(f + g)(\mathbf{z}) < r_1 + r_2 = f(\mathbf{z}_0) + g(\mathbf{z}_0) + 2\varepsilon = r.$$

(4) ist leicht zu zeigen und sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. ∎

2.4. Satz

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ halbstetig nach oben. Dann ist f nach oben beschränkt und nimmt auf M ihr Maximum an.

BEWEIS: Sei $r := \sup f(M) \le +\infty$. Wir machen die Annahme, dass es kein $\mathbf{z} \in M$ mit $f(\mathbf{z}) = r$ gibt. Dann ist also $f(\mathbf{z}) < r$ für alle $\mathbf{z} \in M$, und man kann zu jedem solchen $\mathbf{z}$ eine Zahl $r(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $f(\mathbf{z}) < r(\mathbf{z}) < r$ ist. Wegen der Halbstetigkeit gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z})$, so dass $f|_{U \cap M} < r(\mathbf{z})$ ist. Da M kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l \in M$, so dass $M \subset U(\mathbf{z}_1) \cup \ldots \cup U(\mathbf{z}_l)$ ist, also $f(\mathbf{z}) < r^* := \max(r(\mathbf{z}_1), \ldots, r(\mathbf{z}_l)) < r$ für alle $\mathbf{z} \in M$. Das ist ein Widerspruch, denn dann kann r nicht das Supremum von f auf M sein.

Es gibt also ein $\mathbf{z}_0 \in M$, so dass $f(\mathbf{z}_0) = r$ ist. Damit ist $r < \infty$ und f nach oben beschränkt. Das Maximum wird in $\mathbf{z}_0$ angenommen. ∎

Ist f auf der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ halbstetig nach oben, so definiert man

$$\int_K f\, d\mu_n := \inf\{\int_K \varphi\, d\mu_n \,:\, \varphi \text{ stetig und } \ge f\}.$$

Der Wert $-\infty$ ist dabei zugelassen.

Es gilt: Ist $\int_K f\,d\mu_n > -\infty$, so ist f über K integrierbar.

BEWEIS dafür: Ist $\int_K f\,d\mu_n > -\infty$, so gibt es stetige Funktionen $\varphi_\nu \geq f$, so dass $\int_K \varphi_\nu\,d\mu_n$ gegen $\int_K f\,d\mu_n$ konvergiert. Wir können annehmen, dass die φ_ν eine monoton fallende Folge bilden, und dann mit Levis Satz von der monotonen Konvergenz folgern, dass sie gegen eine integrierbare Funktion φ konvergieren, die fast überall mit f übereinstimmt. ∎

Eine zweimal differenzierbare reell-wertige Funktion h auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt bekanntlich ***harmonisch***, falls $h_{z\overline{z}}(z) \equiv 0$ auf G ist. Der Realteil einer holomorphen Funktion ist immer harmonisch, und auf einer offenen Kreisscheibe ist jede harmonische Funktion der Realteil einer holomorphen Funktion.

Ist $D = D_r(a) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion mit Periode 2π, so gibt es eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$, die harmonisch auf D ist, so dass $h(a + re^{\mathrm{i}\,t}) = \beta(t)$ für alle t gilt (Dirichlets Prinzip).

Eine nach oben halbstetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ genügt der ***schwachen Mittelwerteigenschaft***, falls gilt:

Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $r > 0$ mit $D_r(a) \subset\subset G$ und

$$\text{(SMWE)} \qquad \varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})\,dt \qquad \text{für } 0 < \varrho \leq r.$$

Bemerkung: Harmonische Funktionen genügen sogar der strengen *Mittelwerteigenschaft* (mit „=“ an Stelle von „≤“).

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine nirgends identisch verschwindende holomorphe Funktion, so genügt $\log|f|$ der schwachen Mittelwerteigenschaft. Tatsächlich ist die Funktion $\varphi := \log|f|$ harmonisch auf $G \setminus N(f)$, weil sie lokal als $\operatorname{Re}(\log f)$ geschrieben werden kann, mit einem geeigneten Zweig des Logarithmus. In jedem Punkt $z_0 \in N(f)$ ist $\varphi(z_0) = -\infty$, also ist dort die Ungleichung in der schwachen Mittelwerteigenschaft erfüllt.

2.5. Satz

Die nach oben halbstetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ genüge der schwachen Mittelwerteigenschaft. Hat φ ein globales Maximum in G, so ist φ konstant.

BEWEIS: Sei $a \in G$ und $r > 0$, so dass $D := D_r(a) \subset\subset G$ und $c := \varphi(a) \geq \varphi(z)$ für $z \in G$ ist. Wir nehmen an, dass es ein $b \in D$ mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ gibt. Dann ist $\varphi(a) > -\infty$, und wir schreiben $b = a + \varrho e^{\mathrm{i}\,t_0}$ (mit $0 < \varrho < r$) und erhalten:

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})\,dt < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a)\,dt = \varphi(a).$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss φ konstant auf D sein. Wir setzen $M := \{z \in G : \varphi(z) = c\}$. Offensichtlich ist M in G abgeschlossen und nicht leer. Da M nach der obigen Argumentation sowieso offen ist, ist $M = G$ und φ konstant. ∎

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $s : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt ***subharmonisch***, falls folgendes gilt:

1. s ist halbstetig nach oben auf G.
2. Ist $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig, $h|_D$ harmonisch und $h \geq s$ auf ∂D, so ist $h \geq s$ auf D.

2.6. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subharmonisch. Dann genügt u der schwachen Mittelwerteigenschaft.

BEWEIS: Wir nehmen an, die Aussage des Satzes wäre falsch. Dann gibt es eine Kreisscheibe $D = D_r(a) \subset\subset G$ und eine stetige Funktion $\varphi \geq u$ auf ∂D, so dass gilt:

$$u(a) > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + r\,e^{\mathrm{i}\,t})\,dt.$$

Es gibt eine stetige Funktion Φ auf $\overline{D}$, die in D harmonisch ist und auf ∂D mit φ übereinstimmt. Also ist

$$u(a) > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a + r\,e^{\mathrm{i}\,t})\,dt = \Phi(a).$$

Weil $u \leq \Phi$ auf ∂D und u subharmonisch ist, ist das ein Widerspruch. ∎

2.7. Satz

Sei $s_\nu : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine monoton fallende Folge von subharmonischen Funktionen. Dann ist auch $s := \lim_{\nu\to\infty} s_\nu$ subharmonisch.

BEWEIS: Die Grenzfunktion $s = \lim_{\nu\to\infty} s_\nu = \inf\{s_\nu\}$ ist halbstetig nach oben. Sei nun $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf D, mit $s \leq h$ auf ∂D. Für ein festes $\varepsilon > 0$ betrachten wir die kompakten Mengen

$$K_\nu := \{z \in \partial D \,:\, s_\nu(z) \geq h(z) + \varepsilon\}.$$

Es ist $K_{\nu+1} \subset K_\nu$ und $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \varnothing$. Deshalb gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $K_\nu = \varnothing$ für $\nu \geq \nu_0$. Das bedeutet, dass $s_\nu < h + \varepsilon$ für $\nu \geq \nu_0$ auf ∂D ist, und dann gilt dasselbe auch auf D. Da die s_ν monoton fallen, ist $s < h + \varepsilon$ auf D. Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also ist $s \le h$ auf D. ∎

2.8. Satz

Sei $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von subharmonischen Funktionen auf G. Ist $s := \sup s_\alpha$ halbstetig nach oben und überall endlich, so ist s subharmonisch.

Beweis: Ist $s \le h$ auf ∂D, wobei $D \subset\subset G$ und $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und auf D harmonisch ist, so ist $s_\alpha \le h$ auf ∂D, für jedes $\alpha \in A$. Da die s_α subharmonisch sind, folgt, dass $s_\alpha \le h$ auf D ist, für jedes $\alpha \in A$. Dann ist auch $s \le h$ auf D. ∎

2.9. Beispiele

A. Offensichtlich ist jede harmonische Funktion subharmonisch.

B. Sei $s : G \to \mathbb{R}$ eine stetige subharmonische Funktion, so dass auch $-s$ subharmonisch ist. Dann ist s harmonisch. Um dies zu zeigen, betrachten wir einen beliebigen Punkt $a \in G$ und wählen ein $r > 0$, so dass $D := D_r(a) \subset\subset G$ ist. Dann gibt es eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ mit $h|_{\partial D} = s|_{\partial D}$, die auf D harmonisch ist (Dirichlet'sches Prinzip). Es folgt, dass $s \le h$ auf D ist. Aber weil auch $-h$ harmonisch ist, haben wir $-s \le -h$ auf D. Zusammen ergibt das $s = h$ auf D.

C. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist $s := \log|f|$ subharmonisch. Ist nämlich $f(z) \equiv 0$ auf G, so ist $s(z) \equiv -\infty$ und es bleibt nichts zu zeigen. Andernfalls ist s harmonisch auf $G \setminus N(f)$, und wir müssen nur eine isolierte Nullstelle a von f betrachten. Dann wählen wir eine Scheibe $D = D_r(a) \subset\subset G$ und eine Funktion h, die auf $\overline{D}$ stetig und auf D harmonisch ist, mit $s \le h$ auf ∂D. Wir wissen, dass s und daher auch $s - h$ auf D die schwache Mittelwerteigenschaft besitzen. Da s nicht konstant ist, muss $s - h$ sein Maximum (≤ 0) auf dem Rand ∂D annehmen. Das bedeutet, dass $s \le h$ auf D ist.

D. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet. Die ***Randdistanz*** $\delta_G : G \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ist definiert durch

$$\delta_G(z) := \sup\{r \in \mathbb{R} \,:\, D_r(z) \subset G\}.$$

Behauptung: $s := -\log \delta_G$ ist subharmonisch auf G.

Beweis: Ist $G = \mathbb{C}$, so ist $s(z) \equiv -\infty$ und daher nichts zu zeigen. Ist $G \ne \mathbb{C}$, so ist s reellwertig und stetig. Für $w \in \partial G$ definieren wir $s_w : G \to \mathbb{R}$ durch $s_w(z) := -\log|z - w|$. Dann ist $s(z) = \sup\{s_w(z) \,:\, w \in \partial G\}$. Aus dem obigen Satz folgt die Behauptung. ∎

2.10. Maximumprinzip

Sei $s : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine subharmonische Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wenn s in G sein Maximum annimmt, dann muss s konstant sein.

BEWEIS: Da s halbstetig nach oben ist und der schwachen Mittelwerteigenschaft genügt, ist nichts mehr zu zeigen. ∎

Manchmal erweist sich das folgende Kriterium für Subharmonizität als nützlich:

2.11. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $s : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine nach oben halbstetige Funktion. Für jede Scheibe $D \subset\subset G$ und jede holomorphe Funktion f auf $\overline{D}$ mit $s < \mathrm{Re}(f)$ auf ∂D sei $s < \mathrm{Re}(f)$ auf D. Dann ist s subharmonisch.

BEWEIS: Sei $D = D_r(a) \subset\subset G$, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und auf D harmonisch, sowie $s \le h$ auf ∂D. Der Einfachheit halber sei $a = 0$.

Für $\nu \in \mathbb{N}$ wird eine harmonische Funktion h_ν auf $D_\nu := D_{(\nu/(\nu-1))r}(0) \supset D$ gegeben durch

$$h_\nu(z) := h\Big(\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) z\Big).$$

Dann konvergiert (h_ν) auf $\overline{D}$ gleichmäßig gegen h. Außerdem gibt es zu jedem ν eine holomorphe Funktion f_ν auf D_ν mit $\mathrm{Re}(f_\nu) = h_\nu$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ mit $|h - h_\nu| < \varepsilon$ auf $\overline{D}$ für $\nu \ge \nu_0$. Daher ist $s \le h < h_\nu + \varepsilon = \mathrm{Re}(f_\nu + \varepsilon)$ auf ∂D für $\nu \ge \nu_0$. Nach Voraussetzung ist dann auch $s < h_\nu + \varepsilon$ auf D. Lässt man ε gegen Null gehen, so strebt h_ν gegen h, und man erhält die Ungleichung $s \le h$ auf D. ∎

Zur späteren Verwendung notieren wir noch das

2.12. Lemma

Sei $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $u : D_R(a) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subharmonisch. Dann ist die Funktion

$$r \mapsto \Gamma(u, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\mathrm{i}t})\, dt$$

monoton wachsend für $0 < r < R$.

BEWEIS: Zur Abkürzung bezeichnen wir $D_r(a)$ kurz mit $\Delta(r)$. Es sei $0 < r_1 < r_2 < R$. Außerdem sei φ stetig auf $\overline{\Delta(r_2)}$ und harmonisch in $\Delta(r_2)$, sowie $u \le \varphi$ auf $\partial\Delta(r_2)$.

Die harmonische Funktion φ erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Also ist $\Gamma(\varphi, r) = \varphi(a)$ für alle $r \le r_2$. Weil u subharmonisch ist, ist $u \le \varphi$ auf $\Delta(r_2)$ und

$$\Gamma(u, r_1) \le \Gamma(\varphi, r_1) = \varphi(a) = \Gamma(\varphi, r_2).$$

Daraus folgt: $\Gamma(u, r_1) \le \inf\{\Gamma(\varphi, r_2) \,:\, \varphi \text{ stetig und } \ge u \text{ auf } \partial\Delta(r_2)\} = \Gamma(u, r_2)$. ∎

2.13. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subharmonisch und $\not\equiv -\infty$. Dann ist $u \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(G)$ und $\{z \in G \, u(z) = -\infty\}$ eine Nullmenge. Insbesondere ist u eine messbare Funktion.

Beweis: Eine Funktion u ist *lokal integrabel* (gehört also zu $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}(G)$), falls jeder Punkt eine Umgebung besitzt, über der u integrierbar ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass u über jeder kompakten Teilmenge integrierbar ist.

Sei $z_0 \in G$ und $u(z_0) \ne -\infty$ (nach Voraussetzung existiert ein solcher Punkt). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist. Weil u auf $\overline{D}$ nach oben beschränkt ist, gibt es eine stetige Funktion, die $\ge u$ auf $\overline{D}$ ist. Für jede solche Funktion gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{D}} \varphi \, d\mu_2 &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})\varrho \, dt \, d\varrho \\ &\ge \int_0^r \varrho \cdot 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\,t}) \, dt \right) d\varrho \\ &\ge u(z_0) \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} = r^2\pi \cdot u(z_0). \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\int_{\overline{D}} u \, d\mu_2 = \inf\{ \int_{\overline{D}} \varphi \, d\mu_2 \,:\, \varphi \ge u \text{ stetig} \} \ge r^2\pi \cdot u(z_0) > -\infty.$$

Damit ist u über $\overline{D}$ integrierbar.

Sei $M := \{z \in G \,:\, \exists\, r > 0, \text{ s.d. } u \text{ über } \overline{D_r(z)} \text{ integrierbar ist}\}$. Dann ist $M \ne \varnothing$ und nach Definition offen. Ist $z_0 \in G \setminus M$, so ist $u(z_0) = -\infty$, nach dem ersten Teil des Beweises. Wir nehmen nun an, es gäbe eine Folge (z_ν) in G, die gegen z_0 konvergiert, so dass $u(z_\nu) > -\infty$ ist. Es gibt ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset\subset G$ ist. Ist ν_0 groß genug gewählt, so ist $|z_\nu - z_0| < r/4$ für $\nu \ge \nu_0$, und aus der Dreiecksungleichung folgt, dass $z_0 \in D_{r/2}(z_\nu) \subset D_r(z_0)$ ist. Nach dem ersten Teil des Beweises ist u über $D_{r/2}(z_\nu)$ integrierbar, und damit über einer Umgebung von z_0. Das kann nicht sein. Also gibt es eine ganze Umgebung von z_0, auf der $u(z) = -\infty$ ist. Damit ist $G \setminus M$ offen, und es muss $M = G$ sein.

Ist u über ganz G lokal integrabel, so muss u fast überall endlich sein, also $P := \{z \in G \,:\, u(z) = -\infty\}$ eine Nullmenge. Wegen der Oberhalbstetigkeit von u ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in G \,:\, u(z) < c\}$ offen und damit messbar. Das bedeutet, dass u eine messbare Funktion ist. ∎

2.14. Lemma

Sei $s : G \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion und $s_{z\overline{z}} > 0$ auf G. Dann ist s subharmonisch.

BEWEIS: Sei $D = D_r(a) \subset\subset G$ und eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass h auf D harmonisch und $s \le h$ auf ∂D ist. Wir setzen $\varphi := s - h$.

Wir nehmen an, dass φ sein Maximum in einem inneren Punkt z_0 von D annimmt. Dann betrachten wir die Taylor-Entwicklung von φ in z_0 in einer kleinen Umgebung um z_0:

$$\varphi(z_0 + z) = \varphi(z_0) + 2\operatorname{Re} Q(z) + \varphi_{z\overline{z}}(z_0)z\overline{z} + R(z),$$

wobei $Q(z) := \varphi_z(z_0)z + \frac{1}{2}\varphi_{zz}(z_0)z^2$ holomorph ist und $R(z)/|z|^2 \to 0$ für $z \to 0$. Die Funktion $\psi(z) := 2\operatorname{Re} Q(z)$ ist harmonisch, mit $\psi(0) = 0$. Da sie kein Maximum oder Minimum annehmen kann, muss sie in Punkten, die beliebig nahe bei Null liegen, aber $\neq 0$ sind, Nullstellen besitzen. Andererseits ist $\varphi(z_0 + z) - \varphi(z_0) \le 0$ und $\varphi_{z\overline{z}}(z_0)z\overline{z} > 0$ außerhalb $z = 0$. Das ist ein Widerspruch! Also muss φ sein Maximum auf dem Rand von D annehmen und $s \le h$ auf D sein. ∎

2.15. Satz

Sei $s : G \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. s ist genau dann subharmonisch, wenn $s_{z\overline{z}} \ge 0$ auf G ist.

BEWEIS: (a) Sei $s_{z\overline{z}}(z) \ge 0$ in jedem $z \in G$. Dann definieren wir s_ν auf G durch $s_\nu := s + (1/\nu)z\overline{z}$. Offensichtlich ist $(s_\nu)_{z\overline{z}} = s_{z\overline{z}} + (1/\nu) > 0$. Dann ist s_ν subharmonisch, nach dem obigen Lemma. Da (s_ν) monoton fallend gegen s konvergiert, ist s subharmonisch.

(b) Sei umgekehrt s subharmonisch auf G. Wir nehmen an, dass $s_{z\overline{z}}(a) < 0$ in einem $a \in G$ ist. Dann gibt es eine zusammenhängende offene Umgebung $U = U(a) \subset G$, so dass $s_{z\overline{z}} < 0$ auf U ist. Aus dem Lemma folgt, dass $-s$ auf U subharmonisch ist. Dann muss s harmonisch auf U sein. Also ist $s_{z\overline{z}}(a) = 0$, im Widerspruch zur Annahme. ∎

Wir kehren zu den Gebieten in beliebigen Dimensionen zurück. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{a} \in G$ ein Punkt und $\mathbf{w}$ ein Vektor im $\mathbb{C}^n$. Wir benutzen die holomorphe Abbildung $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) := \mathbf{a} + \zeta\mathbf{w}$. Sie stellt die Parametrisierung einer „komplexen Gerade“ durch $\mathbf{a}$ mit Richtung $\mathbf{w}$ im $\mathbb{C}^n$ dar.

Es ist $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(0) = \mathbf{a} \in G$ und $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}^{-1}(G)$ offen in $\mathbb{C}$. Mit $G(\mathbf{a},\mathbf{w})$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente von 0 in $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}^{-1}(G)$.

Definition

Eine nach oben halbstetige Funktion $p : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt ***plurisubharmonisch*** auf G, falls für jeden Punkt $\mathbf{a} \in G$ und jeden Vektor $\mathbf{w}$ im $\mathbb{C}^n$ die Funktion

$$p_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) := p \circ \alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) = p(\mathbf{a} + \zeta\mathbf{w})$$

auf $G(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ subharmonisch ist.

Bemerkungen:

1. Plurisubharmonizität ist eine lokale Eigenschaft.
2. Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, so ist $\log|f|$ plurisubharmonisch.
3. Sind p_1, p_2 plurisubharmonisch, so auch $p_1 + p_2$.
4. Ist p plurisubharmonisch und $c > 0$, so ist $c \cdot p$ plurisubharmonisch.
5. Ist (p_ν) eine monoton fallende Folge von plurisubharmonischen Funktionen, so ist auch $p := \lim_{\nu\to\infty} p_\nu$ plurisubharmonisch.
6. Sei $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von plurisubharmonischen Funktionen. Ist $p := \sup(p_\alpha)$ halbstetig nach oben und endlich, so ist p auch plurisubharmonisch.
7. Wenn eine plurisubharmonische Funktion p ihr Maximum in einem Punkt des Gebietes G annimmt, so ist sie auf G konstant.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge, $f \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$ und $\mathbf{a} \in U$. Die quadratische Form[1] $\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}) := \sum_{\nu,\mu} f_{z_\nu \overline{z}_\mu}(\mathbf{a}) w_\nu \overline{w}_\mu$$

heißt die ***Leviform*** von f in $\mathbf{a}$.

Offensichtlich ist $\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f$ linear in f.

2.16. Beispiele

A. Im Falle $n = 1$ haben wir $\mathrm{Lev}_a s(w) = s_{z\overline{z}}(a) w\overline{w}$. Also ist s genau dann subharmonisch, wenn $\mathrm{Lev}_a s(w) \geq 0$ für jedes $a \in G$ und $w \in \mathbb{C}$ ist.

B. Sei $f(\mathbf{z}) := \|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z}_i$. Dann ist $\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2$ in jedem $\mathbf{a}$.

[1] Ist $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, so ist die assoziierte ***quadratische Form*** $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $Q(v) := H(v, v)$.

C. Ist $f \in \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R})$ und $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so ist

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}}(\varrho \circ f)(\mathbf{w}) = \varrho''(f(\mathbf{a})) \cdot |(\partial f)_{\mathbf{a}}(\mathbf{w})|^2 + \varrho'(f(\mathbf{a})) \cdot \mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}).$$

Dabei ist $(\partial f)_{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) := \sum_{\nu=1}^{n} f_{z_\nu}(a) w_\nu$.

D. Ist $\mathbf{F} : U \to V \subset \mathbb{C}^m$ eine holomorphe Abbildung und $g \in \mathcal{C}^2(V;\mathbb{R})$, so ist

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}}(g \circ \mathbf{F})(\mathbf{w}) = \mathrm{Lev}_{\mathbf{F}(\mathbf{a})} g(\mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{w})).$$

E. Für $f \in \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R})$ ergibt die Taylor-Entwicklung in $\mathbf{a} \in U$ die Gleichung

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{a}) + 2\,\mathrm{Re}(Q_f(\mathbf{z}-\mathbf{a})) + \mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{z}-\mathbf{a}) + R(\mathbf{z}-\mathbf{a}),$$

wobei $Q_f(\mathbf{w}) = \sum_{\nu=1}^{n} f_{z_\nu}(\mathbf{a}) w_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu} f_{z_\nu z_\mu}(\mathbf{a}) w_\nu w_\mu$ ein holomorphes quadratisches Polynom ist, und

$$\lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{a}} \frac{R(\mathbf{z}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{z}-\mathbf{a}\|^2} = 0.$$

Die BEWEISE seien dem interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen.

2.17. Satz

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R})$ ist genau dann plurisubharmonisch, wenn $\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}) \geq 0$ für jedes $\mathbf{a} \in U$ und jedes $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ ist.

BEWEIS: Sei $\mathbf{a} \in G$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ und $\alpha(\zeta) := \alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) = \mathbf{a} + \zeta\mathbf{w}$. Dann ist $\alpha(0) = \mathbf{a}$ und

$$(f \circ \alpha)_{\zeta\overline{\zeta}}(0) = \mathrm{Lev}_0(f \circ \alpha)(1) = \mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}).$$

Aber f ist genau dann plurisubharmonisch, wenn $f \circ \alpha$ subharmonisch nahe 0 ist, für jedes $\alpha = \alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}$. Das ist äquivalent dazu, dass $(f \circ \alpha)_{\zeta\overline{\zeta}}(0) \geq 0$ für jedes solche α ist. Und das gilt wiederum genau dann, wenn $\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}) \geq 0$ für jedes $\mathbf{a} \in G$ und jeden Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ ist. ∎

2.18. Folgerung

Seien $G_1 \subset \mathbb{C}^n$ und $G_2 \subset \mathbb{C}^m$ Gebiete, $\mathbf{F} : G_1 \to G_2$ eine holomorphe Abbildung und $g \in \mathcal{C}^2(G_2;\mathbb{R})$ eine plurisubharmonische Funktion. Dann ist $g \circ \mathbf{F}$ plurisubharmonisch auf G_1.

BEWEIS: Das ist trivial, nach der Formel im Beispiel (D) oben. ∎

Für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist die Funktion $-\log \delta_G$ subharmonisch. In höheren Dimensionen gilt **nicht**, dass diese Funktion für jedes Gebiet G plurisubharmonisch ist.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Eine nicht-konstante stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt eine ***Ausschöpfungsfunktion*** für G, falls für $c < \sup_G(f)$ alle Subniveaumengen

$$G_c(f) := \{\mathbf{z} \in G \,:\, f(\mathbf{z}) < c\}$$

relativ-kompakt in G sind.

2.19. Beispiel

Für $G = \mathbb{C}^n$ ist die Funktion $f(\mathbf{z}) := \|\mathbf{z}\|^2$ eine Ausschöpfungsfunktion. Für $G \neq \mathbb{C}^n$ definieren wir die *Randdistanz* δ_G durch

$$\delta_G(\mathbf{z}) := \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbb{C}^n \setminus G).$$

Dann ist $-\delta_G$ eine beschränkte und $-\log \delta_G$ eine unbeschränkte Ausschöpfungsfunktion. Wir müssen nur zeigen, daß δ_G stetig ist:

Zu jedem Punkt $\mathbf{z} \in G$ gibt es einen Punkt $\mathbf{r}(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}^n \setminus G$, so dass gilt:

$$\delta_G(\mathbf{z}) = \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{r}(\mathbf{z})) \leq \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \text{ für jedes } \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \setminus G.$$

Dann haben wir für beliebige Punkte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$

$$\begin{aligned} \delta_G(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{r}(\mathbf{u})\| &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{r}(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \delta_G(\mathbf{v}), \\ \text{und genauso} \quad \delta_G(\mathbf{v}) &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \delta_G(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Daher ist $|\delta_G(\mathbf{u}) - \delta_G(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

2.20. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, p plurisubharmonisch auf G und $p(\mathbf{z}) \not\equiv -\infty$. Dann ist $p \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(G)$ und insbesondere $\{\mathbf{z} \in G \,:\, p(\mathbf{z}) = -\infty\}$ eine Menge vom Maß Null.

Beweis: Wir führen Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ wurde schon bewiesen, und wir nehmen an, dass auch schon der Fall $n - 1$ bewiesen wurde.

Sei $\mathbf{z}_0 \in G$, $p(\mathbf{z}_0) > -\infty$ und $P = P_r(\mathbf{z}_0) \subset\subset G$ ein Polyzylinder. O.B.d.A sei $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$. Wir schreiben $P = P' \times P'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$. Die Funktion

$$\widetilde{p}(z_1, \ldots, z_{n-1}) := p(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$$

ist plurisubharmonisch. Weil $\widetilde{p}(\mathbf{0}') > -\infty$ ist, ist $\widetilde{p}$ nach Induktionsannahme lokal integrabel. Sei nun $\varphi \geq p$ eine stetige Funktion auf $\overline{P}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{P}} \varphi \, d\mu_{2n} &= \int_{\overline{P'}} \Big(\int_{\overline{P''}} \varphi \, d\mu_2 \Big) \, d\mu_{2n-2} \\
&= \int_{\overline{P'}} \Big(\int_0^r \varrho \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mathbf{z}', \varrho e^{\mathrm{i}\,t}) \, dt \, d\varrho \Big) \, d\mu_{2n-2} \\
&\geq \int_{\overline{P'}} \int_0^r \varrho \cdot 2\pi \, d\varrho \cdot p(\mathbf{z}', 0) \, d\mu_{2n-2} \\
&= \int_{\overline{P'}} \widetilde{p}(\mathbf{z}') \, d\mu_{2n-2} \cdot r^2\pi \; > \; -\infty.
\end{aligned}$$

Weil diese Ungleichung für alle stetigen Funktionen $\varphi \geq p$ gilt, ist φ über P integrabel. Der Rest des Beweises folgt wie im Falle $n = 1$. ■

Definition

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(G; \mathbb{R})$ heißt ***streng plurisubharmonisch***, falls $\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{w}) > 0$ für $\mathbf{a} \in G$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ist.

Wir wollen zeigen, dass man eine stetige plurisubharmonische Funktion im Innern ihres Definitionsgebietes beliebig gut durch streng plurisubharmonische Funktionen approximieren kann.

2.21. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, p plurisubharmonisch auf G und $\not\equiv -\infty$. Außerdem sei

$$G_j := \{\mathbf{z} \in G \, : \, \|\mathbf{z}\| < j \text{ und } \delta_G(\mathbf{z}) > 1/j\}.$$

Dann gibt es Funktionen $u_j \in \mathscr{C}^\infty(G)$, so dass gilt:

1. *u_j ist streng plurisubharmonisch auf G_j.*
2. *$u_j \geq u_{j+1}$ auf G_j.*
3. *$\lim\limits_{j\to\infty} u_j(\mathbf{z}) = p(\mathbf{z})$ auf G.*

Ist p sogar stetig, so konvergiert (u_j) kompakt auf G.

BEWEIS: Wie im Beweis des Satzes vom Hut konstruiert man eine Funktion $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi \geq 0$ und $\mathrm{Tr}(\varphi) \subset B_1(\mathbf{0})$.
2. $\varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{z}')$ für $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}'\|$.
3. $\int \varphi \, d\mu_{2n} = 1$.

Die (offenen) Mengen G_j liegen relativ-kompakt in G, es ist $G_j \subset G_{j+1}$ und $\bigcup_j G_j = G$. Offensichtlich ist $u \in \mathscr{L}^1(G_j)$ für jedes j.

Für ein festes $\mathbf{z} \in G$ und $j \in \mathbb{N}$ sei die affin-lineare Abbildung $\Phi := \Phi_{\mathbf{z},j} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definiert durch $\Phi(\boldsymbol{\zeta}) := j(\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta})$. Dann ist

$$\det(J_{\mathbb{R},\Phi}(\boldsymbol{\zeta}) = |\det J_\Phi(\boldsymbol{\zeta})|^2 = j^{2n}$$

und $\Phi^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{z} - \mathbf{w}/j$.

Nun sei $F : \mathbb{C}^n \times G \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}) := u(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \varphi(j(\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta})) \cdot j^{2n} = u(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \varphi(\Phi_{\mathbf{z},j}(\boldsymbol{\zeta})) \cdot \det J_{\mathbb{R},\Phi}(\boldsymbol{\zeta}).$$

Ist $\mathbf{z} \in G_j$, so ist

$$\Phi^{-1}(B_1(\mathbf{0})) = \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^n \,:\, \|\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta}\| < 1/j\} = \{\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{z} + \mathbf{u} \,:\, \|\mathbf{u}\| < 1/j\} \subset G.$$

Ist $\boldsymbol{\zeta} \notin \Phi^{-1}(B_1(\mathbf{0}))$, so ist $\Phi(\boldsymbol{\zeta}) \notin B_1(\mathbf{0})$, also $\|\Phi(\boldsymbol{\zeta})\| \geq 1$ und damit $\varphi(\Phi(\boldsymbol{\zeta})) = 0$. Daraus folgt:

$$\int_G F(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})\, d\mu_{2n}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{\Phi^{-1}(B_1(\mathbf{0}))} F(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})\, d\mu_{2n}(\boldsymbol{\zeta}) \text{ für } z \in G_j.$$

Wir definieren nun die Funktion $v_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$v_j(\mathbf{z}) := \int_G F(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})\, d\mu_{2n}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_G u(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \varphi(j(\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta})) \cdot j^{2n} d\mu_{2n}(\boldsymbol{\zeta}).$$

Da u lokal integrabel und φ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ist, kann man den Satz über Parameterintegrale anwenden und erhält, dass v_j auf dem $\mathbb{C}^n$ beliebig oft differenzierbar ist.

Wir wollen nun zeigen, dass v_j auf G_j plurisubharmonisch ist, dass also die Funktion $\lambda \mapsto v_j(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{y})$ für jedes $\mathbf{a} \in G_j$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ und λ nahe 0 subharmonisch ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass diese Funktion der schwachen Mittelwerteigenschaft genügt.

Beweis dafür: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $s : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die der schwachen Mittelwerteigenschaft genügt, außerdem $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig, $h|_D$ harmonisch und $h \geq s$ auf ∂D. Die Funktion $s - h$ genügt in D der schwachen Mittelwerteigenschaft. Also ist $(s - h)(z) \leq \max_{\partial D}(s - h) \leq 0$ für jedes $z \in D$, und damit $s \leq h$ in D. Also ist s subharmonisch.

Zurück zum Beweis des Satzes. Wir müssen für kleines $r > 0$ zeigen:

$$v_j(\mathbf{a}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_j(\mathbf{a} + re^{\mathrm{i}\,t}\mathbf{y})\, dt.$$

Für $\mathbf{z} \in G_j$ ist

$$
\begin{aligned}
v_j(\mathbf{z}) &= \int_{\Phi^{-1}(B_1(\mathbf{0}))} u(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \varphi(\Phi_{\mathbf{z},j}(\boldsymbol{\zeta})) \cdot \det J_{\mathbb{R},\Phi}(\boldsymbol{\zeta})\, d\mu_{2n}(\boldsymbol{\zeta}) \\
&= \int_{B_1(\mathbf{0})} u(\Phi^{-1}(\mathbf{w}))\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}) \\
&= \int_{\|\mathbf{w}\|<1} u(\mathbf{z} - \frac{1}{j}\mathbf{w})\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}),
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_j(\mathbf{a} + re^{\mathrm{i}\,t}\mathbf{y})\, dt &= \int_{\|\mathbf{w}\|<1} \Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\mathbf{a} + re^{\mathrm{i}\,t}\mathbf{y} - \frac{\mathbf{w}}{j}\big)\, dt\Big]\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}) \\
&\geq \int_{\|\mathbf{w}\|<1} u\big(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{w}}{j}\big)\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}) \ = \ v_j(\mathbf{a}).
\end{aligned}
$$

Das zeigt, dass v_j auf G_j plurisubharmonisch ist.

Jetzt sei $u_j(\mathbf{z}) := v_j(\mathbf{z}) + \dfrac{1}{j}\,\|\mathbf{z}\|^2$. Dann ist auch u_j beliebig oft differenzierbar, und

$$
\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} u_j(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} v_j(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{j}\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \geq \frac{1}{j}\|\boldsymbol{\xi}\|^2, \text{ für } \mathbf{a} \in G_j,
$$

für $\mathbf{a} \in G_j$. Also ist u_j auf G_j streng plurisubharmonisch.

Als nächstes müssen wir zeigen, dass $v_j(\mathbf{z}) \geq v_{j+1}(\mathbf{z})$ auf G_j gilt. Dann gilt das Gleiche für die u_j.

Die Abbildung $\psi(\mathbf{w}) := e^{\mathrm{i}\,t}\mathbf{w}$ bildet $B_1(\mathbf{0})$ auf sich ab, und es ist $\det J_{\mathbb{R},\psi}(\mathbf{w}) = |\det J_\psi(\mathbf{w})|^2 = |e^{\mathrm{i}\,nt}|^2 = 1$. Deshalb ist das Integral

$$
v_j(\mathbf{z}) = \int_{\|\mathbf{w}\|<1} u\big(\mathbf{z} - \frac{\mathbf{w}}{j}\big)\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w})
$$

invariant unter der Transformation ψ. Also ist

$$
v_j(\mathbf{z}) = \int_{\|\mathbf{w}\|<1} \Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\mathbf{z} - \frac{e^{\mathrm{i}\,t}\mathbf{w}}{j}\big)\, dt\Big]\, \varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}).
$$

Die Funktion $\gamma(\lambda) := u(\mathbf{z} + \lambda \cdot (-\mathbf{w}))$ ist subharmonisch. Also ist die Funktion

$$
r \mapsto \Gamma(\gamma, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(0 + re^{\mathrm{i}\,t})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathbf{z} - re^{\mathrm{i}\,t}\,\mathbf{w})\, dt
$$

monoton wachsend für $0 < r < \varrho$. Das bedeutet (für $\mathbf{z} \in G_j$):

$$
v_{j+1}(\mathbf{z}) = \int_{\|\mathbf{w}\|<1} \Gamma\big(\gamma, \frac{1}{j+1}\big)\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}) \leq \int_{\|\mathbf{w}\|<1} \Gamma\big(\gamma, \frac{1}{j}\big)\varphi(\mathbf{w})\, d\mu_{2n}(\mathbf{w}) = v_j(\mathbf{z}).
$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} v_j(\mathbf{z}) &= \int_{\|\mathbf{w}\|<1} \Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\mathbf{z} - \frac{e^{\,\mathrm{i}\,t}\mathbf{w}}{j}\big)\,dt\Big]\,\varphi(\mathbf{w})\,d\mu_{2n}(\mathbf{w}) \\ &\geq u(\mathbf{z})\int_{\|\mathbf{w}\|<1} \varphi(\mathbf{w})\,d\mu_{2n}(\mathbf{w}) \;=\; u(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{z} \in G$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Oberhalbstetigkeit von u gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(\mathbf{z}) \subset \{\boldsymbol{\zeta} \in G \,:\, u(\boldsymbol{\zeta}) < u(\mathbf{z}) + \varepsilon\}$ ist. Ist j groß genug, so ist $\mathbf{z} \in G_j$ und $j > 1/\delta$ (also $(1/j) < \delta$, und damit $\mathbf{z} - \mathbf{w}/j \in B_\delta(\mathbf{z})$ für $\|\mathbf{w}\| < 1$). Das bedeutet, dass $u(\mathbf{z} - \mathbf{w}/j) < u(\mathbf{z}) + \varepsilon$ ist, für $\|\mathbf{w}\| < 1$. Daraus folgt:

$$u(\mathbf{z}) \leq v_j(\mathbf{z}) < u(\mathbf{z}) + \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge $(v_j(\mathbf{z}))$ gegen $u(\mathbf{z})$.

Sei nun u sogar stetig, $K \subset G$ kompakt und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein j_0, so dass $K \subset G_{j_0}$ ist. Sei $j_1 > j_0$ und $\delta_0 > 0$ so gewählt, dass $\mathbf{z} + t\mathbf{w} \in G_{j_1}$ ist, für $\mathbf{z} \in K$, $\|\mathbf{w}\| < 1$ und $|t| < \delta_0$. Da u auf $\overline{G_{j_1}}$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein δ mit $0 < \delta < \delta_0$, so dass $|u(\boldsymbol{\zeta}) - u(\mathbf{z})| < \varepsilon$ für alle $\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z} \in G_{j_1}$ mit $\|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z}\| < \delta$ ist. Ist $j > \max(j_0, 1/\delta)$, $\mathbf{z} \in K$ und $\|\mathbf{w}\| < 1$, so liegt $\mathbf{z} - \mathbf{w}/j$ in $B_\delta(\mathbf{z})$ und damit in G_{j_1}. Dann ist $u(\mathbf{z}) - \varepsilon < u(\mathbf{z} - \mathbf{w}/j) < u(\mathbf{z}) + \varepsilon$. Wie oben folgt daraus:

$$u(\mathbf{z}) - \varepsilon < v_j(\mathbf{z}) < u(\mathbf{z}) + \varepsilon.$$

Das zeigt, dass die Folge der (v_j) auf K gleichmäßig gegen u konvergiert. Die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz gilt genauso für die Folge der (u_j). ∎

2.22. Folgerung

$G \subset \mathbb{C}^n$ und $H \subset \mathbb{C}^m$ seien Gebiete, $\mathbf{F} : H \to G$ eine holomorphe Abbildung. Ist p plurisubharmonisch auf G, so ist $p \circ \mathbf{F}$ plurisubharmonisch auf H

Beweis: O.B.d.A sei $p \not\equiv -\infty$. Wie im vorigen Satz konstruiere man die Gebiete G_j und eine Folge von beliebig oft differenzierbaren Funktionen u_j auf G, die streng plurisubharmonisch auf G_j sind und monoton fallend gegen p konvergieren.

Ist $H' \subset\subset H$, so ist $u_j \circ \mathbf{F}$ auf H' für genügend großes j plurisubharmonisch. Weil die Folge der $(u_j \circ \mathbf{F}$ monoton fallend gegen $p \circ \mathbf{F}$ konvergiert, ist auch $p \circ \mathbf{F}$ plurisubharmonisch. ∎

2.23. Glättungssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $p : G \to \mathbb{R}$ eine stetige plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion, $K \subset G$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Ausschöpfungsfunktion $g : G \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. *$g \geq p$ auf G.*

2. *g ist streng plurisubharmonisch.*

3. $|g(\mathbf{z}) - p(\mathbf{z})| < \varepsilon$ *auf* K.

BEWEIS: Da p eine Ausschöpfungsfunktion ist, liegen die Mengen $G_j := \{\mathbf{z} \in G : p(\mathbf{z}) < j\}$ relativ-kompakt in G. O.B.d.A sei $K \subset G_0$ (sonst addiere man zu p eine additive Konstante). Es gibt zu jedem j eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion u_j auf G, die streng plurisubharmonisch auf G_{j+2} ist, so dass gilt:

$$\begin{array}{rrcccl} & p(\mathbf{z}) & < & u_0(\mathbf{z}) & < & p(\mathbf{z}) + \varepsilon \quad \text{auf } \overline{G_1} \\ \text{und} & p(\mathbf{z}) & < & u_j(\mathbf{z}) & < & p(\mathbf{z}) + 1 \quad \text{auf } \overline{G_{j+1}}, \text{ für } j \geq 1. \end{array}$$

Sei $j \geq 2$. Auf G_{j-2} ist $p < j-2$, also $u_j - j + 1 < 0$. Auf $\overline{G_j} \setminus G_{j-1}$ ist $j - 1 \leq p \leq j$, also $u_j - j + 1 > 0$.

Sei $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(t) = 0$ für $t \leq 0$, sowie $\chi(t), \chi'(t), \chi''(t) > 0$ für $t > 0$. Dazu konstruiere man zunächst χ_0 mit $\chi(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\chi(t) > 0$ für $t > 0$, und dann integriere man zweimal.

Sei $\psi_j := \chi \circ (u_j - j + 1)$. Dann ist $\psi_j(\mathbf{z}) \equiv 0$ auf G_{j-2}, positiv auf $\overline{G_j} \setminus G_{j-1}$ und ≥ 0 sonst. Außerdem ist

$$\mathrm{Lev}_{\mathbf{a}}\psi_j(\boldsymbol{\xi}) = \chi''(u_j(\mathbf{a}) - j + 1)|(\partial u_j)_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi})|^2 + \chi'(u_j(\mathbf{a}) - j + 1) \cdot \mathrm{Lev}_{\mathbf{a}} u_j(\boldsymbol{\xi}).$$

Diese Leviform ist positiv definit auf $\overline{G_j} \setminus G_{j-1}$ und immerhin noch ≥ 0 auf G_{j-1}.

Es ist u_0 streng plurisubharmonisch auf G_2 und ψ_2 streng plurisubharmonisch auf $\overline{G_2} \setminus G_1$ und plurisubharmonisch auf G_1. Deshalb ist $g_2 := u_0 + m \cdot \psi_2$ für jede natürliche Zahl m streng plurisubharmonisch auf einer Umgebung von $\overline{G_2}$.

Wir bestimmen induktiv natürliche Zahlen m_j, so dass für $l \geq 2$ und

$$g_l := u_0 + \sum_{j=2}^{l} m_j \psi_j$$

gilt:

1. g_l ist streng plurisubharmonisch auf einer Umgebung von $\overline{G_l}$.

2. $g_l = u_0$ auf G_0 und $g_{l+1} = g_l$ auf G_{l-1}.

Der Induktionsanfang ($l = 2$) ist trivial. Nun seien die Behauptungen für $l - 1$ bewiesen, $l \geq 3$.

1) Es ist g_{l-1} streng plurisubharmonisch auf einer Umgebung von $\overline{G_{l-1}}$ und $g_l = g_{l-1} + m_l\psi_l$. Weil ψ_l streng plurisubharmonisch auf $\overline{G_l} \setminus G_{l-1}$ und subharmonisch auf G_{l-1} ist, kann man m_l so groß wählen, dass g_l streng plurisubharmonisch auf (einer Umgebung von) $\overline{G_l}$ ist.

2) Auf G_0 verschwinden alle ψ_j für $j \geq 2$. Also ist dort $g_l = u_0$. Auf G_{l-2} verschwindet ψ_l, also ist dort $g_l = g_{l-1}$.

Da $\psi_j > 0$ auf $\overline{G_j} \setminus G_{j-1}$ ist, kann man die m_j so groß wählen, dass $g_l > p$ ist (für alle l). Die Funktion $g := \lim\limits_{l\to\infty} g_l$ ist eine streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion, und auf $K \subset G_0$ ist $|g - p| < \varepsilon$. ∎

Nachtrag über messbare Funktionen:

Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ***messbar***, falls gilt:

1. f ist fast überall endlich.
2. Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert.

Jede integrierbare Funktion ist messbar. Außerdem folgt leicht: Sind f und g messbare Funktionen, so sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$), $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ messbar. Ist fast überall $f(\mathbf{x}) \neq 0$, so ist auch $1/f$ messbar.

Satz: Ist f messbar und Lebesgue-beschränkt, so ist f integrierbar.

Beweis: Sei $Q_\nu := [-\nu, +\nu]^n$ und

$$[f]_\nu(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus Q_\nu, \\ \nu & \text{für } \mathbf{x} \in Q_\nu \text{ und } f(\mathbf{x}) > \nu, \\ -\nu & \text{für } \mathbf{x} \in Q_\nu \text{ und } f(\mathbf{x}) < -\nu, \\ f(\mathbf{x}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Konvergiert die Folge (t_λ) von Treppenfunktionen fast überall gegen f, so bilden die Funktionen $[t_\lambda]_\nu$ bilden eine Lebesgue-beschränkte Folge von integrierbaren Funktionen, die fast überall gegen $[f]_\nu$ konvergiert. Nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz ist $[f]_\nu$ integrierbar.

Nach Voraussetzung gibt es eine integrierbare Funktion g, so dass $|f| \leq g$ ist. Deshalb bilden die $[f]_\nu$ eine durch g Lebesgue-beschränkte Folge integrierbarer Funktionen, die gegen f konvergiert. Also ist auch f integrierbar. ∎

Satz: Ist (f_ν) eine Folge von messbaren Funktionen, die fast überall gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, so ist auch f messbar.

Beweis: Wir konstruieren auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Hilfsfunktion $h > 0$:

Sei $Q_\nu := [-\nu, \nu]^n$ und $q_\nu := \mu_n(Q_\nu) - \mu_n(Q_{\nu-1})$, für $\nu \geq 2$. Dann setzen wir

$$h(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in Q_1, \\ 1/(q_\nu 2^\nu) & \text{für } \mathbf{x} \in Q_\nu \setminus Q_{\nu-1},\ \nu \geq 2. \end{cases}$$

Offensichtlich ist h integrierbar (und damit messbar). Die Funktionen

$$g_k := \frac{h \cdot f_k}{h + |f_k|}$$

sind messbar und konvergieren gegen $g := \dfrac{h \cdot f}{h + |f|}$. Weil $|g_k| < h$ ist, folgt sogar, dass die g_k integrierbar sind, und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue erhält man, dass auch g integrierbar und damit messbar ist. Ist $f \geq 0$, so ist auch $g \geq 0$. Ist dagegen $f < 0$, so ist auch $g < 0$. Deshalb ist

$$f = \frac{h \cdot g}{h - |g|}$$

und f damit messbar. ∎

Alle konstanten (endlichen) Funktionen sind messbar, ebenso alle stetigen und alle lokal integrierbaren Funktionen. Ist f integrierbar und g messbar und beschränkt, so ist $f \cdot g$ messbar und Lebesgue-beschränkt, also integrierbar.

Satz: Sind für eine fast überall endliche Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ alle Mengen

$$M_c(f) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, f(\mathbf{x}) < c\}$$

messbar, so ist f eine messbare Funktion.

BEWEIS: Aus der Voraussetzung folgt, dass die Menge $\{\mathbf{x} \, : \, f(\mathbf{x}) \leq c\}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ messbar ist (denn sie ist der Durchschnitt aller Mengen $M_{c+1/n}(f)$). Außerdem ist $\{\mathbf{x} \, : \, f(\mathbf{x}) = \pm\infty\}$ nach Voraussetzung eine Nullmenge.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$\begin{aligned} A_{kj} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, \frac{j-1}{k} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{j}{k}\} \\ &= \{\mathbf{x} \, : \, f(\mathbf{x}) \leq j/k\} \setminus \{\mathbf{x} \, : \, f(\mathbf{x}) \leq (j-1)/k\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist A_{kj} messbar und der $\mathbb{R}^n$ die disjunkte Vereinigung aller A_{kj}, $j \in \mathbb{Z}$, und einer Nullmenge. Sei $A = A_{kj}$ für ein spezielles Indexpaar (k, j). Für jeden Quader Q_ν ist $A \cap Q_\nu$ endlich messbar und damit die charakteristische Funktion $\chi_{A \cap Q_\nu}$ integrierbar. Dann ist $\chi_A = \lim_{\nu \to \infty} \chi_{A \cap Q_\nu}$ messbar, und auch

$$f_k := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{j}{k} \chi_{A_{kj}}$$

ist messbar, für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Weil $|f - f_k| \leq 1/k$ fast überall auf $\mathbb{R}^n$ gilt, konvergiert die Folge der f_k fast überall gegen f, und f ist messbar. ∎