Kapitel 2 Holomorphiegebiete

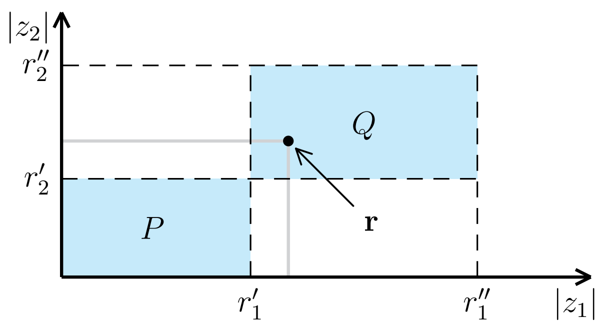
§ 1 Der Kontinuitätssatz

Wir werden nun einen Effekt kennenlernen, der typisch für die Theorie der holomorphen Funktionen von mehreren Variablen ist.

r'_ν, r''_ν seien reelle Zahlen mit $0 < r'_\nu < r''_\nu$ für $1 \le \nu \le n$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P &:= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu| < r'_\nu \text{ für alle } \nu\}, \\ Q &:= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, r'_\nu < |z_\nu| < r''_\nu \text{ für alle } \nu\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind P und Q Reinhardt'sche Gebiete. Sei f eine holomorphe Funktion in Q. Dann ist das Cauchy-Integral $C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{r}}$ für alle $\mathbf{r} \in \tau(Q)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathsf{P}_\mathbf{r}$ und daher erst recht in P.



1.1. Satz

Die Funktion $f_\mathbf{r} : P \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f_\mathbf{r}(\mathbf{z}) := C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{r}}(\mathbf{z})$, ist unabhängig von $\mathbf{r} \in Q$.

BEWEIS: Es ist

$$f_\mathbf{r}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\right)^n \int\limits_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} f(\boldsymbol{\zeta}) \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}\,.$$

In jeder Variablen ζ_ν ist der Integrand $f(\boldsymbol{\zeta})/(\zeta_\nu - z_\nu)$ holomorph auf dem Kreisring $\{\zeta_\nu \,:\, r'_\nu < |\zeta_\nu| < r''_\nu\}$. Aus der Cauchyschen Integralformel für eine Variable folgt:

$$\int_{|\zeta_\nu|=r_\nu} \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\zeta_\nu - z_\nu}\, d\zeta_\nu = \int_{|\zeta_\nu|=r^*_\nu} \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\zeta_\nu - z_\nu}\, d\zeta_\nu\,,$$

wenn $r'_\nu < r_\nu \le r^*_\nu < r''_\nu$ ist. Das ergibt die Behauptung. ∎

1.2. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein eigentliches Reinhardt'sches Gebiet und f holomorph auf G. Dann stimmt das Cauchy-Integral $C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{z}}$ für jedes $\mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ in einer Umgebung des Nullpunktes mit f überein.

BEWEIS: $G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ ist ein Reinhardt'sches Gebiet. Deshalb ist $G_0 := \tau(G \cap (\mathbb{C}^*)^n)$ ein Gebiet im absoluten Raum.

Sei $B := \{\mathbf{r} \in G_0 : C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{r}}$ stimmt mit f nahe $\mathbf{0}$ überein$\}$. Dann ist $B \neq \varnothing$, denn es gibt ein kleines $\mathbf{r} \in G_0$, so dass $\overline{P_\mathbf{r}(\mathbf{0})} \subset G$ ist.

B is offen: Ist $\mathbf{r}_0 \in B$, so können wir wie oben Mengen P, Q finden, so dass $\mathbf{r}_0 \in Q \subset G_0$ ist. Für $\mathbf{r} \in Q$ ist dann $f_\mathbf{r} = C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{r}}$ eine holomorphe Funktion auf P und unabhängig von $\mathbf{r}$. Aber $f_{\mathbf{r}_0}$ stimmt nahe 0 mit f überein. Daher ist $Q \subset B$.

$G_0 \setminus B$ ist ebenfalls offen, der Beweis wird analog geführt. Da G_0 zusammenhängend ist, folgt daraus $B = G_0$. ∎

1.3. Folgerung

Sei G ein eigentliches Reinhardt'sches Gebiet, f holomorph auf G. Dann gibt es eine Potenzreihe $S(\mathbf{z})$, die auf G gegen f konvergiert.

BEWEIS: Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ beliebig gewählt. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{w} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ mit $\mathbf{z}_0 \in P_\mathbf{w}$. Die holomorphe Funktion $g := C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{w}}$ hat eine Potenzreihenentwicklung $g(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ in $P_\mathbf{w}$. Da g mit f in einer kleinen Umgebung des Nullpunktes übereinstimmt, sind die a_ν die Koeffizienten der Taylorreihe von f um $\mathbf{0}$. Da $\mathbf{z}_0$ beliebig war, konvergiert die Reihe auf ganz G. Nach dem Identitätssatz stimmt ihr Grenzwert mit f überein. ∎

Definition

Ist G ein eigentliches Reinhardt'sches Gebiet, so nennt man

$$\widehat{G} := \bigcup_{\mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n} P_\mathbf{z}$$

die ***vollständige Hülle*** von G.

Bemerkungen:

1. Die vollständige Hülle $\widehat{G}$ eines eigentlichen Reinhardt'schen Gebietes G ist wieder ein Gebiet, das G umfasst. Und es ist reinhardtsch: Für $\mathbf{z} \in \widehat{G}$ gibt es ein $\mathbf{z}_1$ mit $\mathbf{z} \in \mathsf{P}_{\mathbf{z}_1} \subset \widehat{G}$. Aber dann ist auch $\mathsf{T}_\mathbf{z} \subset \mathsf{P}_{\mathbf{z}_1} \subset \widehat{G}$. Das gleiche Argument zeigt, dass $\widehat{G}$ vollständig ist.

2. Sei G_1 ein weiteres vollständiges Reinhardt'sches Gebiet mit $G \subset G_1$. Liegt $\mathbf{z}$ in $G \cap (\mathbb{C}^*)^n$, so liegt $\mathbf{z}$ auch in G_1, und aus der Vollständigkeit von G_1 folgt, dass $\mathsf{P}_\mathbf{z} \subset G_1$ ist. Also ist $\widehat{G} \subset G_1$, und wir erkennen, dass $\widehat{G}$ dass kleinste vollständige Reinhardt'sche Gebiet ist, das G umfasst.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich:

1.4. Satz

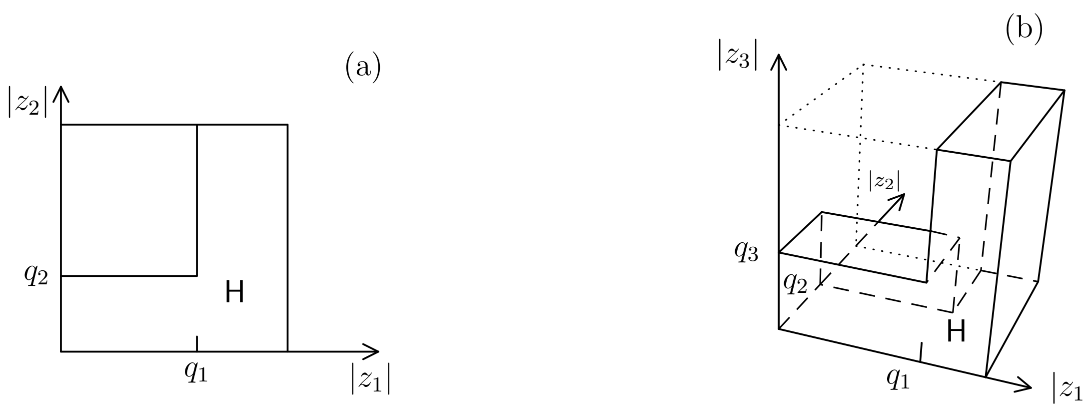
Sei G ein eigentliches Reinhardt'sches Gebiet und f holomorph auf G. Dann gibt es genau eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf $\widehat{G}$ mit $\widehat{f}|_G = f$.

Im Falle $n = 1$ ist die obige Situation uninteressant, weil $G = \widehat{G}$ ist. Ist $n \geq 2$, so können wir Gebiete G und $\widehat{G}$ im $\mathbb{C}^n$ finden, so dass $G \neq \widehat{G}$ ist. Das demonstriert einen entscheidenden Unterschied zwischen den Theorien von einer und mehreren komplexen Variablen.

Sei nun $n \geq 2$, P^n der Einheitspolyzylinder, $q_1, \ldots, q_n$ reelle Zahlen mit $0 < q_\nu < 1$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}(\mathbf{q}) := \{\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n \,:\, |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\mu| < q_\mu \text{ für } \mu = 2, \ldots, n\}.$$

Dann nennt man das Paar $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine ***euklidische Hartogsfigur***. H ist ein eigentliches Reinhardt'sches Gebiet und P^n seine vollständige Hülle.



1.5. Satz von Hartogs

Sei $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogsfigur. Dann besitzt jede holomorphe Funktion f auf H eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}$ auf P^n.

Der Satz folgt unmittelbar aus unseren obigen Betrachtungen.

Sei $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogsfigur.

Definition

Ist $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung, $\widetilde{P} := \mathbf{g}(\mathsf{P}^n)$ und $\widetilde{H} := \mathbf{g}(\mathsf{H})$. Dann nennt man $\left(\widetilde{P}, \widetilde{H}\right)$ eine ***allgemeine Hartogsfigur***.

1.6. Der Kontinuitätssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big)$ eine allgemeine Hartogsfigur mit $\widetilde{H} \subset G$, f eine holomorphe Funktion auf G. Ist $G \cap \widetilde{P}$ zusammenhängend, so kann f auf eindeutige Weise holomorph nach $G \cup \widetilde{P}$ fortgesetzt werden.

BEWEIS: Sei $\mathbf{g} : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung, so dass $\widetilde{P} := \mathbf{g}(\mathsf{P}^n)$ und $\widetilde{H} := \mathbf{g}(\mathsf{H})$ ist. Die Funktion $h := f \circ \mathbf{g}$ ist holomorph in H. Deshalb gibt es genau eine holomorphe Funktion $\widehat{h}$ auf P^n mit $\widehat{h}|_{\mathsf{H}} = h$. Da $\mathbf{g} : \mathsf{P}^n \to \widetilde{P}$ biholomorph ist, ist die Funktion $f_0 := \widehat{h} \circ \mathbf{g}^{-1}$ auf $\widetilde{P}$ definiert, und sie ist eine holomorphe Fortsetzung von $f|_{\widetilde{H}}$. Wir definieren

$$\widehat{f}(\mathbf{z}) := \begin{cases} f(\mathbf{z}) & \text{für } \mathbf{z} \in G, \\ f_0(\mathbf{z}) & \text{für } \mathbf{z} \in \widetilde{P}. \end{cases}$$

Da $G \cap \widetilde{P}$ zusammenhängend und $f = f_0$ auf $\widetilde{H}$ ist, folgt aus dem Identitätssatz, dass $\widehat{f}$ eine wohl-definierte holomorphe Funktion auf $G \cup \widetilde{P}$. Dies ist die gewünschte Fortsetzung von f. ∎

1.7. Beispiel

Sei $n \geq 2$, sowie $P' \subset\subset P$ zwei konzentrische Polyzylinder um den Nullpunkt im $\mathbb{C}^n$. Dann kann jede holomorphe Funktion f auf $P \setminus \overline{P'}$ eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf P fortgesetzt werden.

Für den Beweis können wir annehmen, dass $P = \mathsf{P}^n$ der Einheitspolyzylinder und $P' = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ ist, mit $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ und $0 < r_\nu < 1$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Es ist klar, dass $G := P \setminus \overline{P'}$ ein Gebiet ist.

Es sei $\mathbf{z}_0 = \big(z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}\big) \in G$ ein beliebiger Punkt mit $|z_n^{(0)}| > r_n$. Dann wählen wir reelle Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ wie folgt:

1. Für $\nu = 1, \ldots, n-1$ seien q_ν beliebige Zahlen, mit $r_\nu < q_\nu < 1$.
2. Um ein geeignetes q_n zu erhalten, definieren wir einen Automorphismus T der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ durch

$$T(\zeta) := \frac{\zeta - z_n^{(0)}}{\overline{z}_n^{(0)}\zeta - 1}\,.$$

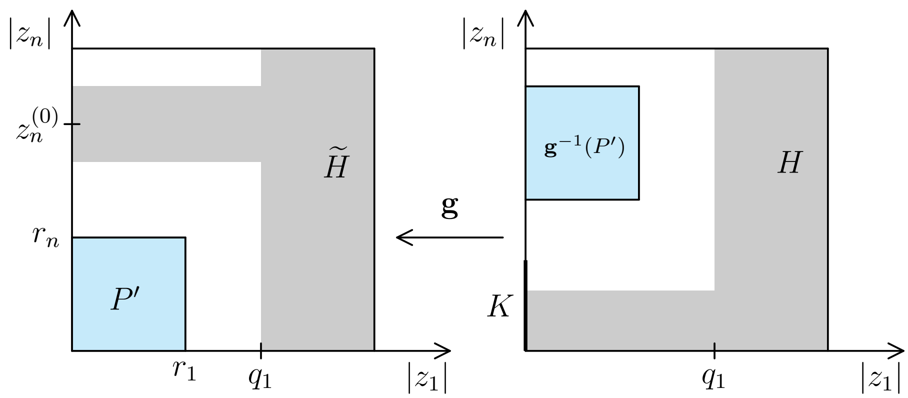
   Dieser Automorphismus bildet $z_n^{(0)}$ auf 0 und eine kleine Kreisscheibe $D \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : r_n < |\zeta| < 1\}$ um $z_n^{(0)}$ auf eine Scheibe $K \subset \mathbb{D}$ mit $0 \in K$ ab. Man beachte, dass 0 nicht das Zentrum von K zu sein braucht. Wir wählen $q_n > 0$ so, dass $D_{q_n}(0) \subset K$ ist.

Setzen wir $\mathsf{H} := \{\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n : |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\nu| < q_\nu \text{ für } \nu = 2, \ldots, n\}$, so ist $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogsfigur. Die durch

$$\mathbf{g}(z_1, \ldots, z_n) := (z_1, \ldots, z_{n-1}, T^{-1}(z_n))$$

definierte Abbildung $\mathbf{g} : \mathsf{P}^n \to \mathsf{P}^n$ ist biholomorph, und $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big) = (\mathsf{P}^n, \mathbf{g}(\mathsf{H}))$ ist eine allgemeine Hartogsfigur, mit

$$\widetilde{H} \subset \{\mathbf{w} \in \mathsf{P}^n \,:\, |w_1| > r_1 \text{ oder } |w_n| > r_n\} \subset G.$$



Da $\widetilde{P} \cap G = G$ zusammenhängend ist, kann der Kontinuitätssatz angewandt werden.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Ist $A \subset G$ analytisch und f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus A$, die längs A lokal beschränkt ist, dann hat f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine holomorphe Fortsetzung nach G. Ist $n \geq 2$ und A ein komplex-linearer Unterraum der Codimension ≥ 2, so besitzt **jede** holomorphe Funktion auf $G \setminus A$ eine solche Fortsetzung.

1.8. Zweiter Riemannscher Hebbarkeitssatz

Sei $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1)$ *der Einheitspolyzylinder im* $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, $k \geq 2$ *und*

$$E := \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, z_{n-k+1} = \cdots = z_n = 0\}.$$

Dann kann jede holomorphe Funktion f *auf* $\mathsf{P}^n \setminus E$ *holomorph nach* P^n *fortgesetzt werden.*

BEWEIS: Sei $P' := \{\mathbf{z}' := (z_1, \ldots, z_{n-k}) \,:\, |\mathbf{z}'| < 1\}$. Für $0 < r \leq 1$ setzen wir $P''_r := \{\mathbf{z}'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \,:\, |\mathbf{z}''| < r\}$.

Es sei $P'' := P''_1$ und ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$ festgehalten. Dann ist

$$\mathsf{P}^n \cap E \subset P' \times P''_\varepsilon,$$

und für $\mathbf{w} \in P'$ ist die Funktion $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}'') := f(\mathbf{w}, \mathbf{z}'')$ holomorph auf $P'' \setminus \overline{P''_\varepsilon}$. Von dem obigen Beispiel wissen wir, dass $f_{\mathbf{w}}$ eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}_{\mathbf{w}}$ nach P''

besitzt. Dann definieren wir $\widehat{f} : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}$ by $\widehat{f}(\mathbf{w}, \mathbf{z}'') := \widehat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}'')$. Auf $\mathsf{P}^n \setminus E$ stimmt $\widehat{f}$ mit f überein und ist daher holomorph.

Für $\mathbf{w} \in P'$ wählen wir eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{w}) \subset\subset P'$. Dann ist $K := \overline{U} \times \partial P''_\varepsilon$ kompakt. Mit dem Maximumprinzip folgern wir:

$$\big| \widehat{f}(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \big| = \big| \widehat{f}_{\mathbf{z}'}(\mathbf{z}'') \big| \le \| \widehat{f}_{\mathbf{z}'} \|_{\partial P''_\varepsilon} \le \| f \|_K < \infty, \text{ für } (\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \in U \times P''_\varepsilon \setminus E.$$

Aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt, dass $\widehat{f}$ holomorph auf P^n ist. ∎

1.9. Folgerung

Ist $n \ge 2$, so ist jede isolierte Singularität einer holomorphen Funktion von $z_1, \ldots, z_n$ hebbar.

Manchmal benutzt man an Stelle einer Hartogs-Figur eine Familie von analytischen Scheiben.

Definition

Eine ***Familie von analytischen Scheiben*** wird durch eine stetige Abbildung $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ gegeben, so dass $\varphi_t(\zeta) := \varphi(\zeta, t)$ in $\mathbb{D}$ holomorph ist, für alle $t \in [0,1]$. Die Menge $S_t := \varphi_t(\mathbb{D})$ nennt man eine ***analytische Scheibe*** und $bS_t := \varphi_t(\partial\mathbb{D})$ ihren ***Rand***.

Man beachte, dass bS_t i.a. nicht der topologische Rand von S_t ist.

Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ genügt dem ***Kontinuitätsprinzip***, falls für alle Familien $\{S_t,\, t \in [0,1]\}$ von analytischen Scheiben in $\mathbb{C}^n$ mit $\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t \subset G$ und $S_0 \subset G$ folgt, dass $\bigcup_{0 \le t \le 1} S_t \subset G$ ist.

1.10. Beispiel

Sei P^n der Einheitspolyzylinder und $\{S_t,\, t \in [0,1]\}$ eine Familie von analytischen Scheiben in $\mathbb{C}^n$ mit $\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t \subset \mathsf{P}^n$ und $S_0 \subset \mathsf{P}^n$. Weil $\overline{S}_0$ und die Vereinigung aller Ränder bS_t kompakte Mengen sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t \subset \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1 - \varepsilon) \quad \text{und} \quad S_0 \subset \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1 - \varepsilon).$$

Wir nehmen an, dass $\bigcup_{0 \le t \le 1} S_t$ nicht in P^n enthalten ist, und definieren

$$t_0 := \inf\{t \in [0,1] \,:\, S_t \not\subset \mathsf{P}^n\}.$$

Es ist klar, dass $t_0 > 0$, $S_{t_0} \not\subset \mathsf{P}^n$ und $S_t \subset \mathsf{P}^n$ für $0 \le t < t_0$ ist. Dann enthält S_{t_0} einen Punkt $\mathbf{z}_0 = \left(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}\right) \in \partial\mathsf{P}^n$. Ist die Familie von analytischen Scheiben gegeben durch die Abbildung $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ und bezeichnet w_μ die μ-te Koordinatenfunction, so ist $f_{\mu,t}(\zeta) := w_\mu \circ \varphi(\zeta, t)$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetig und in $\mathbb{D}$ holomorph. Wählt man μ so, dass $|z_\mu^{(0)}| = 1$ ist, so gibt es ein $\zeta_0 \in \mathbb{D}$ mit $f_{\mu,t_0}(\zeta_0) = z_\mu^{(0)}$ und $|f_{\mu,t_0}(\zeta_0)| = 1$. Aber nach dem Maximumprinzip ist

$$|f_{\mu,t}(\zeta_0)| \le \sup_{\partial\mathbb{D}} |f_{\mu,t}| \le 1 - \varepsilon, \text{ für } t < t_0.$$

Weil $t \mapsto f_{\mu,t}(\zeta_0)$ stetig ist, stellt dies einen Widerspruch dar. Also genügt P^n dem Kontinuitätsprinzip.

Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt ***Hartogs-konvex***, falls gilt: Ist $\left(\widetilde{P}, \widetilde{H}\right)$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\widetilde{H} \subset G$, so ist $\widetilde{P} \subset G$.

Nun folgt unmittelbar:

Das biholomorphe Bild eines Hartogs-konvexen Gebietes ist wieder Hartogs-konvex.

1.11. Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, das dem Kontinuitäts-Prinzip genügt. Dann ist G Hartogs-konvex.

BEWEIS: Sei $\left(\widetilde{P}, \widetilde{H}\right)$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\widetilde{H} \subset G$. Sie sei das biholomorphe Bild $(g(\mathsf{P}^n), g(\mathsf{H}))$ einer euklidischen Hartogs-Figur $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ mit

$$\mathsf{H} = \{\mathbf{z} : |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\mu| < q_\mu \text{ für } \mu = 2, \dots, n\}.$$

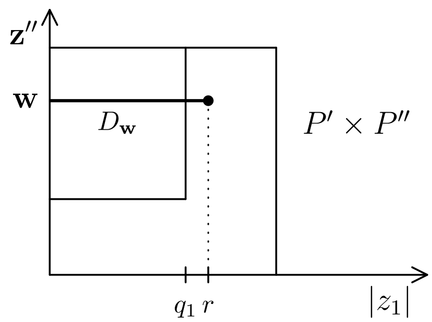
Um analytische Scheiben zu definieren, wählen wir ein r mit $q_1 < r < 1$ und führen die affinen analytischen Scheiben

$$D_{\mathbf{w}} := \{\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}'') \in \mathsf{P}^n = P' \times P'' : |z_1| < r \text{ und } \mathbf{z}'' = \mathbf{w}\}$$

ein. Da $\overline{D}_{\mathbf{w}} \subset \mathsf{P}^n$ für jedes $\mathbf{w} \in P''$ ist, können wir $\varphi_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbb{D}} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ durch $\varphi_{\mathbf{w}}(\zeta, t) := g(r\zeta, t\mathbf{w})$ definieren. Dann ist eine Familie $\{S_t(\mathbf{w}) : 0 \le t \le 1\}$ von analytischen Scheiben in $\widetilde{P}$ gegeben durch

$$S_t(\mathbf{w}) := \varphi_{\mathbf{w}}(\mathbb{D} \times \{t\}) = g(D_{t\mathbf{w}}).$$

Es folgt, dass $bS_t(\mathbf{w}) \subset G$ für jedes $\mathbf{w} \in P''$ und jedes $t \in [0,1]$ ist, und außerdem $S_0(\mathbf{w}) = g(D_{\mathbf{0}}) \subset G$.



Da G dem Kontinuitätsprinzip genügt, ist $g(D_{\mathbf{w}}) = S_1(\mathbf{w})$ in G enthalten. Dies gilt für jedes $\mathbf{w} \in P''$. Also ist $\widetilde{P} \subset G$, und G ist Hartogs-konvex. ∎

1.12. Folgerung

Der Einheitspolyzylinder P^n ist Hartogs-konvex.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, f holomorph in G und $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ ein Punkt. Die Funktion f heißt ***vollständig singulär*** in $\mathbf{z}_0$, falls es eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ gibt, so dass auf keiner zusammenhängenden Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset V$ eine holomorphe Funktion g existiert, die auf einer Zusammenhangskomponente C von $U \cap G$ mit f übereinstimmt.

1.13. Beispiel

Sei $G := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ und f ein Zweig des Logarithmus auf G. Dann ist f vollständig singulär in $z = 0$, aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$.

Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt ***schwaches Holomorphiegebiet***, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z} \in \partial G$ eine Funktion $f \in \mathscr{O}(G)$ gibt, die in $\mathbf{z}$ vollständig singulär ist. Das Gebiet G heißt ein ***Holomorphiegebiet***, falls eine Funktion $f \in \mathscr{O}(G)$ existiert, die in **jedem** Punkt $\mathbf{z} \in \partial G$ vollständig singulär ist.

1.14. Beispiele

A. Da der $\mathbb{C}^n$ keinen Randpunkt besitzt, erfüllt er trivialerweise die Bedingungen eines Holomorphiegebietes.

B. Man sieht sofort, dass jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ein schwaches Holomorphiegebiet ist: Ist z_0 ein Randpunkt von G, so ist $f(z) := 1/(z - z_0)$ in G holomorph und vollständig singulär in z_0.

Für $G = \mathbb{D}$ können wir sogar mehr zeigen! Die Funktion $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}$ ist holomorph im Einheitskreis und wird in jedem Randpunkt vollständig singulär. Deshalb ist $\mathbb{D}$ ein Holomorphiegebiet. Am Ende dieses Kapitels werden wir sehen, dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ ein Holomorphiegebiet ist.

C. Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in jedem Randpunkt vollständig singulär wird, so gilt das gleiche für $\widehat{f} : \mathsf{P}^n = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, definiert durch $\widehat{f}(z_1, \ldots, z_n) := f(z_1) + \cdots + f(z_n)$. Ist nämlich $\mathbf{z}_0$ ein Randpunkt von P^n, so gibt es ein i, so dass die i-te Komponente $z_i^{(0)}$ ein Randpunkt von $\mathbb{D}$ ist. Wenn $\widehat{f}$ holomorph über $\mathbf{z}_0$ hinweg fortgesetzt werden könnte, dann hätte auch $\widehat{f}_i(\zeta) := \widehat{f}(z_1^{(0)}, \ldots, \zeta, \ldots, z_n^{(0)})$ eine holomorphe Fortsetzung. Aber dann könnte f in $z_i^{(0)}$ nicht vollständig singulär sein. Deshalb ist der Einheitspolyzylinder ein Holomorphiegebiet.

D. Ist $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogs-Figur, so ist H kein Holomorphiegebiet.

1.15. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ und eine holomorphe Funktion $f : G \cup U \to \mathbb{C}$ mit $f(\mathbf{z}_0) = 0$ und $f(\mathbf{z}) \neq 0$ für $\mathbf{z} \in G$ gibt, dann ist G ein schwaches Holomorphiegebiet.

Beweis: Wir zeigen, dass $1/f$ in $\mathbf{z}_0$ vollständig singulär ist. Dazu nehmen wir an, es gebe eine zusammenhängende offene Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0)$, eine Zusammenhangskomponente $C \subset V \cap G$ und eine holomorphe Funktion F auf V mit $F|_C = (1/f)\,\big|_C$. Die Menge $V' := V \setminus N(f)$ ist immer noch zusammenhängend und enthält C. Nach dem Identitätssatz müssen die Funktionen F und $1/f$ in V' übereinstimmen. Dann ist F offensichtlich nicht holomorph in $\mathbf{z}_0$. Widerspruch! ∎

Wir wollen nun zeigen, dass jedes konvexe Gebiet ein schwaches Holomorphiegebiet ist. Dazu müssen wir einen kurzen Exkurs über konvexe Mengen einschieben.

Bekanntlich nennt man eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. Eine einfache Übungsaufgabe ist der Beweis des folgenden Satzes:

1.16. Satz

1. *Ist M konvex, so sind auch $\overline{M}$ und $\mathring{M}$ konvex.*
2. *Sind M und N konvex, so ist auch $M \cap N$ konvex.*

1.17. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$. Dann gibt es eine affin-lineare Funktion f auf dem $\mathbb{R}^n$, so dass $f(\mathbf{x}_0) > 0$ und $f(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in M$ ist.

Beweis: Sei $\delta := \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \overline{M}) > 0$. Es gibt dann einen Punkt $\mathbf{y}_0 \in \overline{M}$, so dass $\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \delta$ ist. Sei $f(\mathbf{x}) := (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \bullet (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0)$. Dann ist $f(\mathbf{x}_0) = \delta^2 > 0$ und $f(\mathbf{y}_0) = 0$.

Wir setzen $\varphi_{\mathbf{y}}(t) := \|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{y}_0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0))\|^2$ für $\mathbf{y} \in M$. Dann ist $\varphi_{\mathbf{y}}(0) = \delta^2$ und $\varphi_{\mathbf{y}}(1) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|^2$.

Die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{y}}(t) &= \big((\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) - t(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)\big) \bullet \big((\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) - t(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)\big) \\ &= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|^2 - 2t(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \bullet (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) + t^2\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|^2 \end{aligned}$$

ist differenzierbar, mit Ableitung

$$\varphi'_{\mathbf{y}}(t) = -2(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \bullet (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) + 2t\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|^2.$$

Weil $\varphi_{\mathbf{y}}(t) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0))^2 \geq \delta^2 = \varphi_{\mathbf{y}}(0)$ ist, ist

$$\varphi'_{\mathbf{y}}(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\varphi_{\mathbf{y}}(t) - \varphi_{\mathbf{y}}(0)}{t} \geq 0,$$

also $f(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \bullet (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \leq 0$ für $\mathbf{y} \in M$. ∎

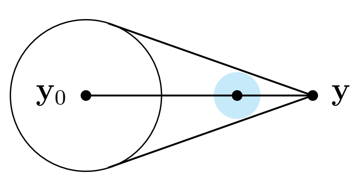
1.18. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial M$ eine affin-lineare Funktion f auf dem $\mathbb{R}^n$, so dass $f(\mathbf{x}_0) = 0$ und $f(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in M$ ist.

Beweis: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial M$ und dazu $\mathbf{y}_0 \in M$ ein beliebiger Punkt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$B_n := \{\mathbf{x} \,:\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| \leq n\} \quad \text{und} \quad D_n := \{\mathbf{y}_0 + \big(1 - \frac{1}{n}\big)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \,:\, \mathbf{y} \in \overline{M}\}.$$

Weil beide Mengen konvex und abgeschlossen sind, ist $U_n := B_n \cap D_n$ eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\overline{M}$. Aber U_n liegt sogar in M: Ist nämlich $B = B_\varepsilon(\mathbf{y}_0) \subset\subset M$ und $\mathbf{y} \in \overline{M}$, so gehört der gesamte Kegel über B mit Spitze in $\mathbf{y}$ zu $\overline{M}$, und der enthält eine kleine Kugel um $\mathbf{y}_0 + \big(1 - \frac{1}{n}\big)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$.



Also liegt $\mathbf{x}_0$ nicht in U_n, und es gibt eine affin-lineare Funktion $f_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_n - \alpha_n$, so dass $f_n(\mathbf{x}_0) > 0$ und $f_n|_{U_n} \leq 0$ ist. O.B.d.Asei $\|\mathbf{u}_n\| = 1$. Dann ist $\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_n \leq \alpha_n <$

$\mathbf{x}_0 \bullet \mathbf{u}_n$ für $\mathbf{y} \in U_n$. Das bedeutet, dass die Folgen $(\mathbf{u}_n)$ und (α_n) beschränkt sind, und nach Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass $(\mathbf{u}_n)$ gegen ein $\mathbf{u}$ (mit $\|\mathbf{u}\| = 1$) und (α_n) gegen ein $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \bullet \mathbf{u} - \alpha$.

Es muss $f(\mathbf{x}_0) \geq 0$ sein. Zu jedem $\mathbf{y} \in M$ gibt es ein N, so dass $\mathbf{y} \in U_N$ ist, also $f_N(\mathbf{y}) \leq 0$. Das bedeutet schließlich, dass $f(\mathbf{y}) \leq 0$ sein muss. Weil f stetig und $\mathbf{x}_0 \in \partial M$ ist, muss auch $f(\mathbf{x}_0) \leq 0$ sein, und damit sogar $f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Es ist $f|_M \leq 0$. Setzt man $M^* := \{\mathbf{x} \,:\, f(\mathbf{x}) < 0\}$, so ist $M \subset \overline{M^*}$. Weil M offen ist, muss sogar $M \subset M^*$ gelten. ∎

1.19. Folgerung

Jedes konvexe Gebiet G im $\mathbb{C}^n$ ist ein schwaches Holomorphiegebiet.

BEWEIS: O.B.d.A sei $G \neq \mathbb{C}^n$. Ist $\mathbf{z}_0 \in \partial G$, so gibt es wegen der Konvexität von G eine reelle Linearform λ auf $\mathbb{C}^n$ mit $\lambda(\mathbf{z}) < \lambda(\mathbf{z}_0)$ für $\mathbf{z} \in G$. Wir können λ in der Form

$$\lambda(\mathbf{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\alpha}_\nu \overline{z}_\nu, \quad \text{mit } \boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \mathbf{0},$$

schreiben. Daher ist $\lambda = \operatorname{Re} h(\mathbf{z})$, wobei $h(\mathbf{z}) := 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu$ holomorph auf $\mathbb{C}^n$ ist.

Da die Funktion $f(\mathbf{z}) := h(\mathbf{z}) - h(\mathbf{z}_0)$ auf $\mathbb{C}^n$ holomorph, $f(\mathbf{z}_0) = 0$ und $f(\mathbf{z}) \neq 0$ auf G ist, kann der Satz angewandt werden. ∎

Wir wollen zeigen, dass jedes schwache Holomorphiegebiet Hartogs-konvex ist. Als Hilfsmittel benötigen wir das folgende einfache geometrische Lemma, das auch in anderen Situationen nützlich sein wird.

1.20. Lemma (über Randkomponenten)

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge mit $U \cap G \neq \varnothing$ und $(\mathbb{C}^n \setminus U) \cap G \neq \varnothing$.

Dann ist $G \cap \partial C \cap \partial U \neq \varnothing$ für jede Zusammenhangskomponente C von $U \cap G$.

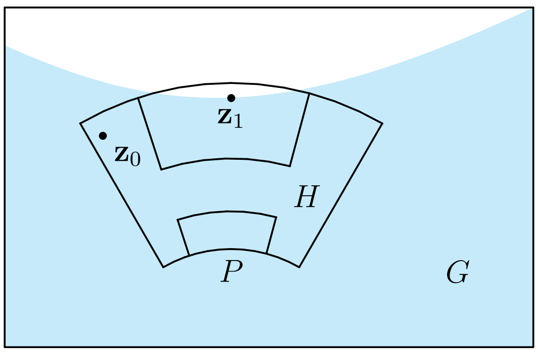
BEWEIS: Wir wählen Punkte $\mathbf{z}_1 \in C \subset U \cap G$ und $\mathbf{z}_2 \in (\mathbb{C}^n \setminus U) \cap G$. Dann gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\gamma(0) = \mathbf{z}_1$ und $\gamma(1) = \mathbf{z}_2$. Sei $t_0 := \sup\{t \in [0,1] \,:\, \gamma(t) \in C\}$ und $\mathbf{z}_0 := \gamma(t_0)$. Offensichtlich ist $\mathbf{z}_0 \in \partial C \cap G$, aber $\mathbf{z}_0 \notin C$. Da C eine Zusammenhangskomponente von $U \cap G$ ist, kann $\mathbf{z}_0$ nicht in $U \cap G$ und daher auch nicht in U liegen. Wegen $\gamma(t) \in U$ für $t < t_0$ folgt, dass $\mathbf{z}_0 \in \partial U$ ist. ∎

1.21. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein schwaches Holomorphiegebiet. Dann ist G Hartogs-konvex.

BEWEIS: Wir nehmen an, dass G nicht Hartogs-konvex ist. Dann gibt es eine allgemeine Hartogs-Figur (P, H) mit $H \subset G$, aber $P \cap G \neq P$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\mathbf{z}_0$ in H und setzen $C := C_{P\cap G}(\mathbf{z}_0)$.[1] Da H in $P \cap G$ liegt und zusammenhängend ist, folgt, dass $H \subset C$ ist. Außerdem ist $C \subsetneqq P$.

Da $P \cap G \neq \varnothing$ und $(\mathbb{C}^n \setminus G) \cap P \neq \varnothing$ ist, gibt es nach dem Lemma einen Punkt $\mathbf{z}_1 \in \partial C \cap \partial G \cap P$.



Sei f eine beliebige holomorphe Funktion auf G. Dann ist auch $f|_C$ holomorph und besitzt nach dem Kontinuitätssatz eine holomorphe Fortsetzung F auf P. Da P eine offene zusammenhängende Umgebung von $\mathbf{z}_1$ ist, kann f nicht vollständig singulär in $\mathbf{z}_1$ sein. Das ist ein Widerspruch. ∎

Es folgt z.B., dass jedes konvexe Gebiet Hartogs-konvex ist. Insbesondere ist jede Kugel Hartogs-konvex.

1.22. Theorem

Jedes Holomorphiegebiet ist Hartogs-konvex.

Der BEWEIS ist trivial.

Um die Umkehrung dieses Satzes zu zeigen, muss man zu jedem Hartogs-konvexen Gebiet eine globale holomorphe Funktion konstruieren, die in jedem Randpunkt vollständig singulär wird. Das ist sehr schwierig. Es wurde 1910 in sehr speziellen Fällen von E.E. Levi durchgeführt. Der allgemeine Fall wurde als *Levi-Problem* bezeichnet.

1942 lieferte der japanische Mathematiker K. Oka einen Beweis für $n = 2$. Anfang der 50er lösten Oka, Bremermann und Norguet das Levi-Problem für beliebiges n. Das Ergebnis wurde auf komplexe Mannigfaltigkeiten (H. Grauert, 1958) und komplexe Räume (R. Narasimhan, 1962) verallgemeinert. Schließlich veröffentlichte L. Hörmander 1965 einen Beweis, der Hilbertraum-Methoden und partielle Differentialgleichungen benutzte.

[1] Mit $C_M(\mathbf{z})$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente von $\mathbf{z}$ in M.