## § 5 Komplexe Mannigfaltigkeiten

Sei $X$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Wir halten $X$ für zu groß, wenn es in $X$ eine diskrete Teilmenge mit der Kardinalität des Kontinuums gibt. Deshalb fordern wir, dass $X$ eine abzählbare Basis für die Topologie besitzt. Man sagt dann auch, dass $X$ das ***zweite Abzählbarkeitsaxiom*** erfüllt. Offensichtlich trifft das auf den $\mathbb{C}^n$ zu. Ein metrischer Raum besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Ein Hausdorff-Raum $X$ heißt ***lokal-kompakt***, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt. Ist $X$ kompakt, so ist $X$ natürlich auch lokal-kompakt. Ist $X$ umgekehrt lokal-kompakt, aber nicht kompakt, so kann $X$ durch Hinzufügen eines einzigen Punktes kompakt gemacht werden (Alexandrovs „Ein-Punkt-Kompaktifizierung“). Jeder Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist, ist lokal-kompakt.

### Definition

Eine offene Überdeckung $\mathscr{V} = \{V_\nu : \nu \in N\}$ eines Hausdorff-Raumes $X$ heißt eine ***Verfeinerung*** der Überdeckung $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ von $X$, falls es eine Abbildung $\tau : N \to I$ (die ***Verfeinerungsabbildung*** gibt, mit

$$V_\nu \subset U_{\tau(\nu)} \text{ für jedes } \nu \in N.$$

Die Verfeinerungsabbildung ist nicht eindeutig bestimmt, aber wir können eine ein für allemal festhalten.

Eine Überdeckung $\mathscr{V} = \{V_\nu : \nu \in N\}$ heißt ***lokal-endlich***, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ besitzt, so dass $U$ nur endlich viele $V_\nu$ trifft.

### Definition

Ein Hausdorff-Raum $X$ heißt ***parakompakt***, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U}$ von $X$ eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\mathscr{V}$ gibt.

Jeder kompakte Raum ist parakompakt. Und jeder lokal-kompakte Raum mit abzählbarer Basis ist ebenfalls parakompakt.

Für den Augenblick nehmen wir nur an, dass $X$ ein Hausdorff-Raum ist.

### Definition

Ein $n$-dimensionales ***komplexes Koordinatensystem*** (oder eine ***Karte***) $(U, \varphi)$ für $X$ besteht aus einer offenen Menge $U \subset X$ und einer topologischen Abbildung $\varphi$ von $U$ auf eine offene Menge $B \subset \mathbb{C}^n$.

Ist $p \in X$ ein Punkt, dann nennt man jedes Koordinatensystem $(U, \varphi)$ für $X$ mit $p \in U$ ein *Koordinatensystem in p*. Die Einträge $z_i$ in $\mathbf{z} = \varphi(p)$ nennt man die ***komplexen Koordinaten*** von $p$ (bezüglich $(U, \varphi)$).

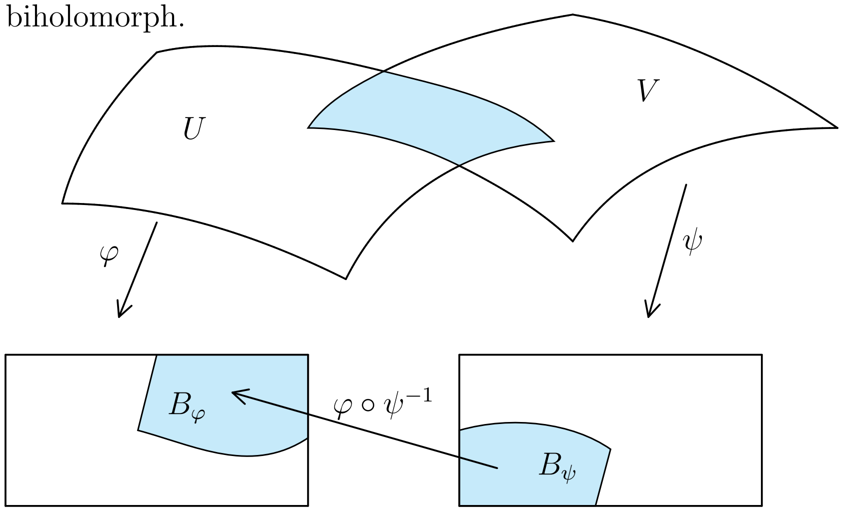
Ist $f$ eine komplexe Funktion auf $U$, so können wir $f$ als Funktion der komplexen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ auffassen, durch

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto f \circ \varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_n).$$

Zwei ($n$-dimensionale) komplexe Koordinatensysteme $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ für $X$ nennt man ***(holomorph) verträglich***, falls entweder $U \cap V = \varnothing$ ist, oder

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

biholomorph.




Die Mengen $B_\psi := \psi(U \cap V)$ und $B_\varphi := \varphi(U \cap V)$ sind offen im $\mathbb{C}^n$. Sind $z_i$ (bzw. $w_j$) die komplexen Koordinaten bezüglich $\varphi$ (bzw. $\psi$), dann bedeutet die holomorphe Verträglichkeit der Koordinatensysteme, dass die Funktionen $z_i = z_i(w_1, \ldots, w_n)$ und $w_j = w_j(z_1, \ldots, z_n)$ holomorph sind.

Eine Überdeckung von $X$ durch paarweise verträgliche $n$-dimensionale komplexe Koordinatensysteme nennt man einen $n$-dimensionalen ***komplexen Atlas*** für $X$. Zwei solche Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ heißen ***äquivalent***, falls je zwei Koordinatensysteme $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_1$ und $(V, \psi) \in \mathcal{A}_2$ verträglich sind. Eine Äquivalenzklasse von ($n$-dimensionalen) komplexen Atlanten für $X$ nennt man eine $n$-dimensionale ***komplexe Struktur*** auf $X$. Sie enthält einen maximalen Atlas, der die Vereinigung aller Atlanten in der Äquivalenzklasse ist.

**Definition**

Eine $n$-dimensionale ***komplexe Mannigfaltigkeit*** ist ein Hausdorffraum $X$ mit abzählbarer Basis, versehen mit einer $n$-dimensionalen komplexen Struktur.

Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist lokal-kompakt und parakompakt.

## 5.1. Beispiele

**A.** Der $\mathbb{C}^n$ ist eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur ist gegeben durch das Koordinatensystem $(\mathbb{C}^n, \mathrm{id})$.

**B.** Ist $X$ eine beliebige $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, dann ist jede nicht leere offene Teilmenge $B \subset X$ wieder eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfdaltigkeit. Für $p \in B$ gibt es ein Koordinatensystem $(U, \varphi)$ für $X$ in $p$. Dann ist $(U \cap B, \varphi|_{U \cap B})$ ein Koordinatensystem für $B$ in $p$. Alle diese Koordinatensysteme sind holomorph verträglich.

**C.** Sind $X_1, \dots, X_m$ komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension $n_1, \dots, n_m$, dann trägt $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ die Produkttopologie. Offensichtlich ist $X$ ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis.

Sind komplexe Koordinatensysteme $(U_i, \varphi_i)$ für $X_i$ gegeben, für $i = 1, \dots, m$, so wird ein Koordinatensystem $(U, \varphi)$ für $X$ definiert, durch

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) := (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_m(x_m)) \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1 + \cdots + n_m}.$$

Man rechnet leicht nach, dass man so einen $n$-dimensionalen komplexen Atlas und eine komplexe Struktur auf $X$ erhält.

**D.** Sei schließlich $G$ ein zusammenhängender Hausdorffraum und $\pi : G \to \mathbb{C}^n$ eine lokal-topologische Abbildung. Dann gibt es zu jedem $p \in G$ eine offene Umgebung $U = U(p)$, so dass $B := \pi(U)$ offen und $\varphi := \pi|_U : U \to B$ topologisch ist. Dann ist $(U, \varphi)$ ein komplexes Koordinatensystem. Ist $\psi = \pi|_V$ ein anderes Koordinatensystem, so gilt $\varphi(x) = \psi(x) = \pi(x) =: \mathbf{z}$ und

$$\varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{z}) = \varphi(x) = \mathbf{z}$$

für $x \in U \cap V$. Deshalb sind die Koordinatensysteme holomorph verträglich, und wir erhalten eine komplexe Struktur auf $G$. Man kann beweisen, dass $G$ eine abzählbare Basis besitzt (Grauert, 1955). Also ist $G$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Das Paar $(G, \pi)$ nennt man ein ***Riemannsches Gebiet*** über $\mathbb{C}^n$.

Sei $X$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

### Definition

Eine komplexe Funktion $f$ auf einer offenen Teilmenge $B \subset X$ heißt ***holomorph***, falls es zu jedem $p \in B$ ein Koordinatensystem $(U, \varphi)$ in $p$ gibt, so dass $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap B) \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Sind $z_1, \ldots, z_n$ komplexe Koordinaten bezüglich $(U, \varphi)$, so ist

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto f \circ \varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_n)$$

eine holomorphe Funktion im herkömmlichen Sinne. Ist $z_\nu = z_\nu(w_1, \ldots, w_n)$, wobei $w_1, \ldots, w_n$ die komplexen Koordinaten bezüglich eines Koordinatensystems $(V, \psi)$ sind, so ist auch

$$f \circ \psi^{-1}(w_1, \ldots, w_n) = f \circ \varphi^{-1}(z_1(w_1, \ldots, w_n), \ldots, z_n(w_1, \ldots, w_n))$$

holomorph. Also ist die Definition der Holomorphie unabhängig vom Koordinatensystem. Wir bezeichnen die Menge der holomorphen Funktionen auf $B$ mit $\mathscr{O}(B)$. Sie ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit Eins-Element.

### 5.2. Identitätssatz

*Sei $X$ zusammenhängend. Sind $f, g$ zwei holomorphe Funktionen auf $X$, die auf einer nicht leeren offenen Teilmenge $U \subset X$ übereinstimmen, so ist $f = g$.*

Beweis: Sei $W = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Dann ist $U \subset W$, also $\mathring{W} \neq \varnothing$. Wir nehmen an, dass es einen Randpunkt $x_0$ von $\mathring{W}$ in $X$ gibt. Sei $(U, \varphi)$ ein Koordinatensystem in $x_0$ mit $\varphi(x_0) = \mathbf{0}$. Dann müssen alle Ableitungen von $f \circ \varphi^{-1}$ und $g \circ \varphi^{-1}$ in $\mathbf{0}$ übereinstimmen. Folglich sind die Potenzreihen dieser Funktionen im Nullpunkt gleich. Aber dann ist $f = g$ auf einer ganzen Umgebung von $x_0$, und das ist ein Widerspruch. Das zeigt, dass $W = X$ offen sein muss. ∎

### 5.3. Maximumprinzip

*Sei $X$ zusammenhängend, $f \in \mathscr{O}(X)$ und $x_0 \in X$ ein Punkt, in dem $|f|$ ein lokales Maximum annimmt. Dann ist $f$ konstant.*

Beweis: Die Funktionen $f$ und $g := f(x_0)$ sind beide auf $X$ holomorph. Ist $(U, \varphi)$ ein Koordinatensystem in $x_0$ und $B := \varphi(U)$, so ist $f_0 := f \circ \varphi^{-1}$ holomorph auf $B$, und $|f_0|$ hat ein lokales Maximum in $\mathbf{z}_0 := \varphi(x_0)$. Daher gibt es eine offene Umgebung $B' = B'(\mathbf{z}_0) \subset B$, so dass $f_0$ auf $B'$ konstant und $f$ auf $U' := \varphi^{-1}(B')$ konstant ist. Also ist $f|_{U'} = g|_{U'}$, und nach dem Identitätssatz ist $f = g$, also $f$ konstant. ∎

### 5.4. Folgerung

*Ist $X$ kompakt und zusammenhängend, so ist jede holomorphe Funktion auf $X$ konstant.*

Beweis: Die stetige Funktion $|f|$ nimmt ihr Maximum in einem Punkt von $X$ an. Dann folgt die Behauptung aus dem Maximumprinzip. ∎

### Definition

Sei $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten. Man nennt $F$ eine ***holomorphe Abbildung***, falls es zu jedem $p \in X$ ein Koordinatensystem $(U, \varphi)$ für $X$ in $p$ und ein Koordinatensystem $(V, \psi)$ für $Y$ in $F(p)$ mit $F(U) \subset V$ gibt, so dass

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

eine holomorphe Abbildung ist.

### 5.5. Satz

*Die Abbildung $F : X \to Y$ ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ und jedes $f \in \mathscr{O}(V)$ gilt: $f \circ F \in \mathscr{O}(F^{-1}(V))$.*

Der Beweis ist eine leichte Übung. Eine holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist offensichtlich eine holomorphe Abbildung.

Wenn wir in unseren Definitionen den Körper $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ und das Wort "holomorph" durch "differenzierbar" ersetzen, so erhalten wir die Kategorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und differenzierbarer Abbildungen. Aus jeder $n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit wird eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn man die komplexe Struktur „vergisst“.

### Definition

Eine ***biholomorphe Abbildung*** $F : X \to Y$ ist eine topologische Abbildung, so dass $F$ und $F^{-1}$ holomorph sind. Wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen $X$ und $Y$ gibt, dann nennt man die Mannigfaltigkeiten ***isomorph*** oder ***biholomorph äquivalent***, und wir schreiben: $X \cong Y$.

**Bemerkung:** Ist $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(U, \varphi)$ ein komplexes Koordinatensystem mit $\varphi(U) = B \subset \mathbb{C}^n$, so ist $\varphi : U \to B$ eine biholomorphe Abbildung.

### Definition

Sei $X$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt ***analytisch***, wenn es zu jedem Punkt $p \in X$ eine (zusammenhängende) offene Umgebung $U = U(p)$ und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_m$ auf $U$ gibt, so dass gilt:

$$U \cap A = \{q \in U : f_i(q) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}.$$

Wir nennen $A$ eine ***analytische Hyperfläche***, wenn man immermit einer einzigen Funktion auskommt.

Aus der Definition folgt, dass $A$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X$ ist. Lokal ist eine analytische Menge in $X$ das gleiche wie eine analytische Menge in einer offenen Menge $B \subset \mathbb{C}^n$. Daher können viele Eigenschaften analytischer Mengen im $\mathbb{C}^n$ auf solche in Mannigfaltigkeiten übertragen werden.

Wir wollen jetzt erklären, was reguläre analytische Teilmengen einer Mannigfaltigkeit $X$ sind. Die holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ seien auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ definiert. Außerdem sei $p \in U$ ein Punkt und $(V, \psi)$ ein komplexes Koordinatensystem für $X$ in $p$. Die Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ ist holomorph, und wir definieren

$$J_{\mathbf{f}}(p; \psi) := \left( \frac{\partial(f_i \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)) \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right).$$

Das ist so etwas wie die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ in $p$, aber diese Matrix hängt vom Koordinatensystem $\psi$ ab. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_i \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)) &= \frac{\partial((f_i \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))}{\partial z_j}(\psi(p)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(f_i \circ \varphi^{-1})}{\partial w_k}(\varphi(p)) \frac{\partial(w_k \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)), \end{aligned}$$

gilt:

$$J_{\mathbf{f}}(p; \psi) = J_{\mathbf{f}}(p; \varphi) \cdot J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(\psi(p)).$$

Das zeigt:

$$\operatorname{rg}_p(f_1, \ldots, f_m) := \operatorname{rg} J_{(f_1, \ldots, f_m)}(p; \psi)$$

ist von dem gewählten Koordinatensystem unabhängig.

## Definition

Eine analytische Menge $A \subset X$ heißt ***regulär (von Codimension $d$)*** in einem Punkt $p \in A$, wenn es eine offene Umgebung $U = U(p) \subset X$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ auf $U$ gibt, so dass gilt:

1. $A \cap U = \{q \in U : f_1(q) = \cdots = f_d(q) = 0\}$.
2. $\operatorname{rg}_p(f_1, \ldots, f_d) = d$.

Die Zahl $n - d$ nennt man die ***Dimension*** von $A$ in $p$.

Ist $A$ in jedem Punkt regulär, so heißt $A$ eine ***komplexe Untermannigfaltigkeit***.

### 5.6. Satz

*Eine analytische Menge $A$ ist genau dann regulär von der Codimension $d$ in $p \in A$, wenn es ein komplexes Koordinatensystem $(U, \varphi)$ für $X$ in $p$ gibt, so dass gilt: $\varphi(U) = B \subset \mathbb{C}^n$ und $\varphi(U \cap A) = \{\mathbf{w} \in B \,:\, w_{n-d+1} = \cdots = w_n = 0\}$.*

Beweis: Sei $(U, \psi)$ ein beliebiges Koordinatensystem in $p$ und $W := \psi(U)$. Die lokalen Koordinaten seien mit $z_1, \ldots, z_n$ bezeichnet. O.B.d.A. gibt es holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ auf $U$, so dass gilt:

1. $U \cap A = \{x \in U \,:\, f_1(x) = \ldots = f_d(x) = 0\}$.
2. $\det \left( \dfrac{\partial(f_i \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)) \,\Big|\, \begin{array}{c} i = 1, \ldots, d \\ j = n-d+1, \ldots, n \end{array} \right) \neq 0.$

Nun sei $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ definiert durch

$$\varphi(x) := \big(z_1(x), \ldots, z_{n-d}(x), f_1(x), \ldots, f_d(x)\big).$$

Dann ist $\det J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(\psi(x)) \neq 0$, für $x \in U$, also $\varphi \circ \psi^{-1}$ biholomorph und damit $\varphi$ eine Karte. Und es ist $\varphi(A \cap U) = \{\mathbf{w} \in \varphi(U) \,:\, w_{n-d+1} = \cdots = w_n = 0\}$. ∎

**Bemerkung:** Man kann dann $\widetilde{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-d})|_{A \cap U}$ als Karte für $A$ benutzen und erhält auf $A$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.

Ist $f$ eine holomorphe Funktion auf $X$, so ist

$$f|_A \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(w_1, \ldots, w_k) = f \circ \varphi^{-1}(w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0)$$

holomorph. Daher ist $f|_A$ eine holomorphe Funktion auf der komplexen Mannigfaltigkeit $A$.

### 5.7. Satz

*Im $\mathbb{C}^n$ gibt es keine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit positiver Dimension.*

Beweis: Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte zusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Dann müssen die Koordinatenfunctionen $z_\nu|_X$ konstant sein, für $\nu = 1, \ldots, n$. Das bedeutet, dass $X$ ein einzelner Punkt. Ist $X$ nicht zusammenhängend, so ist $X$ eine endliche Menge. ∎

## 5.8. Beispiel

Sei $F : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit in eine $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann betrachten wir

$$G_F := \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y = F(x)\},$$

den ***Graphen*** von $F$.

Sei $p_0 \in X$ ein Punkt und $q_0 := F(p_0) \in Y$. Wir wählen Koordinatensysteme $(U, \varphi)$ für $X$ in $p_0$ und $(V, \psi)$ für $Y$ in $q_0$, mit $F(U) \subset V$. Dann ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ ein Koordinatensystem für $X \times Y$ in $(p_0, q_0) \in G_F$. Schreiben wir $\psi \circ F = (f_1, \ldots, f_m)$, so erhalten wir

$$G_F \cap (U \times V) = \{(\varphi \times \psi)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \,:\, f_i \circ \varphi^{-1}(\mathbf{z}) - w_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}.$$

Also wird $G_F$ lokal durch die Funktionen $g_i(p, q) := f_i(p) - w_i \circ \psi(q)$ definiert, für $i = 1, \ldots, m$. Wegen $\mathrm{rg}_{(p_0,q_0)}(g_1, \ldots, g_m) = m$ ist $G_F$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Die ***Diagonale*** $\Delta_X \subset X \times X$ ist ein Spezialfall, gegeben als Graph der Identität: $\Delta_X = \{(x, x') \in X \times X \,:\, x = x'\}$.

$X$ und $Y$ seien komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension $n$ bzw. $m$, $F : X \to Y$ sei eine holomorphe Abbildung. Ist $F(x) = y$, $(U, \varphi)$ eine Karte für $X$ in $x$ und $(V, \psi)$ eine Karte für $Y$ in $y$, so ist der ***Rang*** von $F$ in $x$ definiert als der Rang der Jacobi-Matrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\mathbf{z} := \varphi(x)$. Man sieht leicht, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karten abhängt. Offensichtlich ist $\mathrm{rg}_x(F) \le \min(n, m)$. Ist der Rang maximal, so gibt es nur zwei Möglichkeiten:

## Definition

Die holomorphe Abbildung $F : X \to Y$ heißt eine ***Immersion***, falls $n := \dim(X) \le \dim(Y)$ und $\mathrm{rg}_x(F) = n$ für alle $x \in X$ ist. $F$ heißt eine ***Submersion***, falls $n \ge m := \dim(Y)$ und $\mathrm{rg}_x(F) = m$ für alle $x \in X$ ist.

Auf Immersionen wollen wir hier nicht näher eingehen, aber Submersionen spielen im Folgenden eine wichtige Rolle.

## 5.9. Satz

*Sei $x_0 \in X$ und $y_0 := F(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$F$ ist eine Submersion in $x_0$, d.h., es ist $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = \dim(Y)$.*
2. *Es gibt Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$ und $V = V(y_0) \subset Y$ mit $F(U) \subset V$, eine Mannigfaltigkeit $Z$ und eine holomorphe Abbildung $G : U \to Z$, so dass $x \mapsto (F(x), G(x))$ eine biholomorphe Abbildung von $U$ auf eine offene Teilmenge von $V \times Z$ definiert.*
3. *Es gibt eine offene Umgebung $V = V(y_0) \subset Y$ und eine holomorphe Abbildung $s : V \to X$ mit $s(y_0) = x_0$ und $F \circ s = \mathrm{id}_V$. (Man nennt $s$ dann einen **lokalen Schnitt** für $F$.)*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) : Wir können uns auf die lokale Situation beschränken und annehmen, dass $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$ und $V = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^m$ offene Umgebungen sind und $F : U \to V$ eine holomorphe Abbildung mit $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathrm{rg}(J_F(\mathbf{0})) = m$ ist.

Wir schreiben $J_F(\mathbf{0}) = \big(J'_F(\mathbf{0}), J''_F(\mathbf{0})\big)$, mit $J'_F(\mathbf{0}) \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ und $J''_F(\mathbf{0}) \in M_{m,n-m}(\mathbb{C})$. Nach Wahl geeigneter Koordinaten können wir annehmen, dass $\det J'_F(\mathbf{0}) \neq 0$ ist. Wir definieren eine neue holomorphe Abbildung $\widetilde{F} : U \to V \times \mathbb{C}^{n-m} \subset \mathbb{C}^n$ durch

$$\widetilde{F}(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') := (F(\mathbf{z}', \mathbf{z}''), \mathbf{z}''), \qquad \text{für } \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^m,\ \mathbf{z}'' \in \mathbb{C}^{n-m}.$$

Dann ist

$$J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} J'_F(\mathbf{0}) & J''_F(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n-m} \end{pmatrix}, \qquad \text{und daher } \det J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen gibt es Umgebungen $\widetilde{U}(\mathbf{0}) \subset U$ und $W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $\widetilde{F} : \widetilde{U} \to W$ biholomorph ist.

$Z := \mathbb{C}^{n-m}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit und $G := \mathrm{pr}_2 : \widetilde{U} \to Z$ mit $(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \mapsto \mathbf{z}''$ ist eine holomorphe Abbildung, so dass $(F, G) = \widetilde{F}$ biholomorph nahe $\mathbf{0}$ ist.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Sind $U$, $V$, $Z$ und $G$ gegeben, so dass $F(U) \subset V$ und $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ biholomorph ist, so kann $s : V \to X$ definiert werden durch

$$s(y) := (F, G)^{-1}(y, G(x_0)).$$

Dann ist $(F, G)(s(y_0)) = (y_0, G(x_0)) = (F, G)(x_0)$ und daher $s(y_0) = x_0$. Außerdem ist $(F, G) \circ s(y) = (F, g) \circ (F, G)^{-1}(y, G(x_0)) = (y, G(x_0))$, also $F \circ s(y) = y$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Ist $s$ ein lokaler Schnitt für $F$ mit $s(y_0) = x_0$, dann ist $J_F \cdot J_s$ nahe $y_0$ die Einheitsmatrix. So folgt unmittelbar, dass $J_F$ eine surjektive Abbildung repräsentiert, dass also $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = m$ ist. ∎

## 5.10. Folgerung

*Ist $F : X \to Y$ eine Submersion, so ist für jedes $y \in Y$ die Faser $F^{-1}(y)$ leer oder eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $X$.*

*Ist $F$ zusätzlich surjektiv und $K \subset Y$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \subset X$ eine $(n - m + k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

Beweis: Wir betrachten einen Punkt $x_0 \in X$. Es sei $M := F^{-1}(y_0)$ die Faser über $y_0 := F(x_0)$. Dann können wir Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$, $V = V(y_0) \subset Y$, eine $(n - m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $Z$, und eine holomorphe Abbildung $G : U \to Z$ finden, so dass $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ biholomorph ist. Folglich ist $M \cap U = (F|_U, G)^{-1}(\{y_0\} \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.

Ist $K \subset V$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \cap U = (F|_U, G)^{-1}(K \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m + k$. ■

Sei $X$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Sind $x, y \in X$ äquivalent, so schreiben wir $x \sim y$ oder $R(x, y)$. Für $x \in X$ sei

$$X(x) := \{y \in X \,:\, y \sim x\} = \{y \in X \,:\, R(y, x)\}$$

die Äquivalenzklasse von $x$ in $X$. Diese Klassen ergeben eine Zerlegung von $X$ in paarweise disjunkte Mengen. Die Menge $X/R$ aller Äquivalenzklassen nennen wir den ***topologischen Quotienten*** von $X$ *modulo* $R$.

Sei $\pi : X \to X/R$ die kanonische Projektion, gegeben durch $\pi : x \mapsto X(x)$. Dann wird $X/R$ mit der feinsten Topologie versehen, so dass $\pi$ stetig wird. Das bedeutet, dass eine Menge $U \subset X/R$ genau dann offen ist, wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Wir nennen diese Topologie die ***Quotiententopologie***.

Eine Menge $A \subset X$ heißt ***saturiert*** bezüglich der Relation $R$, falls gilt:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = A.$$

**5.11. Satz**

1. *$A$ saturiert $\iff$ $A = \bigcup_{x \in A} X(x)$.*
2. *Ist $U \subset X/R$ beliebig, so ist $\widehat{U} := \pi^{-1}(U)$ saturiert.*
3. *Ist $W \subset X$ offen und saturiert, so ist $\pi(W) \subset X/R$ offen.*

Trivial!

**5.12. Satz**

*Sei $Z$ ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X/R \to Z$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Z$ stetig ist.*

Die Aussage ist ebenfalls trivial, da ja $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ ist.

Wir wollen nun $X/R$ so mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen, dass $\pi$ holomorph wird. Auf jeden Fall muss $X/R$ dann ein Hausdorff-Raum sein. Was kann man noch herausfinden? Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}^k$ ein komplexes Koordinatensystem für $X/R$, so ist $\widehat{U} := \pi^{-1}(U)$ eine offene saturierte Menge in $X$ und $\mathbf{f} := \varphi \circ \pi : \widehat{U} \to \mathbb{C}^k$ muss eine holomorphe Abbildung mit $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x)) = \pi^{-1}(\pi(x)) = X(x)$ werden. Die Fasern von $\mathbf{f}$ müssen also Äquivalenzklassen werden, und die Äquivalenzklassen müssen daher analytische Mengen sein.

Wenn $\pi$ sogar zu einer Submersion wird, dann ist $\text{rg}_x(\mathbf{f}) = k$ für jedes $x \in \widehat{U}$, und die Fasern (und damit die Äquivalenzklassen) sind $(n-k)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wir zeigen jetzt, dass diese Bedingungen tatsächlich auch hinreichend für die Existenz einer geeigneten komplexen Struktur auf $X/R$ sind.

*Sei $X$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{Z} = \{Z_\iota : \iota \in I\}$ eine Zerlegung von $X$ in $d$-dimensionale analytische Mengen. Für $x \in X$ sei $\iota(x) \in I$ der eindeutig bestimmte Index mit $x \in Z_{\iota(x)}$. Dann gibt es eine Äquivalenzrelation $R$ auf $X$, so dass die Äquivalenzklasse $X(x)$ genau die analytische Menge $Z_{\iota(x)}$ ist. Wir betrachten den topologischen Quotienten $X/R$ und die kanonische Projektion $\pi : X \to X/R$ und nehmen an, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$X/R$ ist ein Hausdorff-Raum.*
2. *Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es eine saturierte offene Umgebung $\widehat{U}$ von $X(x_0)$ in $X$ und eine holomorphe Abbildung $\mathbf{f} : \widehat{U} \to \mathbb{C}^{n-d}$, so dass gilt*
   (a) *$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x)) = X(x)$ für alle $x \in \widehat{U}$.*
   (b) *$\text{rg}_x(\mathbf{f}) = n - d$ für $x \in \widehat{U}$.*

**5.13. Satz**

*Unter den obigen Bedingungen trägt $X/R$ eine eindeutig bestimmte Struktur einer $(n-d)$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, so dass $\pi : X \to X/R$ eine holomorphe Submersion ist.*

BEWEIS: Sei $x_0 \in X$ gegeben. Dann gibt es eine offene Umgebung $\widehat{U}$ von $X(x_0)$ in $X$ mit $\pi^{-1}\big(\pi(\widehat{U})\big) = \widehat{U}$ und eine Submersion $\mathbf{f} : \widehat{U} \to \mathbb{C}^{n-d}$, deren Fasern Äquivalenzklassen $X(x)$ sind. Ist $\mathbf{z}_0 := \mathbf{f}(x_0)$, so gibt es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^{n-d}$ und einen holomorphen Schnitt $s : W \to \widehat{U}$ (mit $s(\mathbf{z}_0) = x_0$ und $\mathbf{f} \circ s = \text{id}_W$). Für $\mathbf{z} \in W$ gilt $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{z}) = X(s(\mathbf{z}))$ und daher

$$\pi^{-1}(\pi(s(W))) = \bigcup_{\mathbf{z} \in W} X(s(\mathbf{z})) = \bigcup_{\mathbf{z} \in W} \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}^{-1}(W).$$

Da dies eine offene Menge ist, ist auch $\pi(s(W)) \subset X/R$ offen. Wir definieren ein komplexes Koordinatensystem $\varphi : \pi(s(W)) \to \mathbb{C}^{n-d}$ durch

$$\varphi(\pi(s(\mathbf{z}))) := \mathbf{z}.$$

Dann ist $\varphi(\pi(x)) = \mathbf{f}(x)$. Also ist $\varphi$ wohldefiniert und stetig. $\varphi$ ist auch bijektiv, mit $\varphi^{-1}(\mathbf{z}) = \pi(s(\mathbf{z}))$, und deshalb ein Homöomorphismus.

Sei nun $\psi$ ein anderes Koordinatensystem, gegeben durch $\psi(\pi(t(\mathbf{z}))) := \mathbf{z}$, wobei $t$ ein lokaler Schnitt zu einer geeigneten Submersion $\mathbf{g}$ ist. Dann folgt:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{z}) = \varphi(\pi(t(\mathbf{z}))) = \mathbf{f}(t(\mathbf{z})).$$

Die Koordinatentransformationen sind holomorph. ∎

**Beispiele:**

**A) Tori.**

Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_{2n}\}$ eine reelle Basis des $\mathbb{C}^n$. Dann ist

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_{2n}$$

eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{C}^n$. Man nennt $\Gamma$ ein ***Gitter***.

Zwei Punkte $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ heißen *äquivalent* (bzgl. $\Gamma$), falls $\mathbf{z} - \mathbf{w} \in \Gamma$ ist. Die Äquivalenzklasse von $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ ist die Menge $[\mathbf{z}] := \mathbf{z} + \Gamma$. Als diskrete Menge ist $[\mathbf{z}]$ analytisch. Die Menge $T^n := \mathbb{C}^n/\Gamma$ aller Äquivalenzklassen nennt man einen ***$n$-dimensionalen komplexen Torus***. Die Abbildung $\pi_T : \mathbb{C}^n \to T^n$ mit $\pi_T(\mathbf{z}) := [\mathbf{z}]$ nennt man die *kanonische Restklassen-Abbildung*. Wir versehen $T^n$ mit der Quotiententopologie. Eine Menge $U \subset T^n$ ist dann *offen*, falls $\pi_T^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist.

### 5.14. Satz

*Der Torus $T^n$ ist ein Hausdorff-Raum.*

BEWEIS: Zunächst stellen wir fest: Ist $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, so ist auch

$$\pi_T^{-1}\pi_T(U) = \{\mathbf{z} \,:\, \exists\, \mathbf{w} \in U \text{ mit } \mathbf{z} - \mathbf{w} \in \Gamma\} = \bigcup_{\omega \in \Gamma}(\omega + U)$$

offen. Also ist $\pi_T(U)$ offen in $T^n$.

Gegeben seien nun zwei Punkte $x_1 = \pi_T(\mathbf{z}_1) \neq \pi_T(\mathbf{z}_2) = x_2$. Dann gibt es ein $\mathbf{w} \in \Gamma$ und reelle Zahlen $0 \leq t_\nu < 1$, die nicht alle verschwinden, so dass gilt:

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu + \mathbf{w}.$$

O.B.d.A. sei $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ und $t_1 \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $2\varepsilon < t_1 < 1 - 2\varepsilon$ ist. Sei

$$U := \{\mathbf{u} = \sum_{\nu=1}^{2n} u_\nu \omega_\nu \,:\, |u_\nu| < \varepsilon \text{ für alle } \nu\,\}.$$

Dann ist $U$ eine offene Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^n$, $U_1 := \mathbf{z}_1 + U$ eine Umgebung von $\mathbf{z}_1$ und $U_2 := \mathbf{z}_2 + U$ eine Umgebung von $\mathbf{z}_2$ im $\mathbb{C}^n$. Wir nehmen an, es ist $\pi_T(U_1) \cap \pi_T(U_2) \neq \varnothing$. Dann gibt es Punkte $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U$, so dass $\mathbf{z}' = \mathbf{z}_1 + \mathbf{u}' \in U_1$ und $\mathbf{z}'' = \mathbf{z}_2 + \mathbf{u}'' \in U_2$ äquivalent sind, also

$$\sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu + (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') = (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) + (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') = \mathbf{z}' - \mathbf{z}'' \in \Gamma.$$

Stellt man beide Seiten als Linearkombination der $\omega_i$ dar, so erhält man auf der rechten Seite ganzzahlige Koeffizienten, auf der linken Seite aber bei $\omega_1$ einen Koeffizienten der Gestalt $t_1 + u_1' - u_1''$ mit $|u_1'| < \varepsilon$ und $|u_2'| < \varepsilon$, also

$$0 < t_1 - 2\varepsilon \leq t_1 - |u_1' - u_1''| \leq |t_1 + u_1' - u_1''| \leq t_1 + |u_1' - u_1''| \leq t_1 + 2\varepsilon < 1.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $\pi_T(U_1) \cap \pi_T(U_2) = \varnothing$. ∎

Als Bild der kompakten Menge

$$\overline{P} := \{\mathbf{z} = \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu \,:\, 0 \leq t_\nu \leq 1 \text{ für alle } \nu\}$$

ist der Torus $T^n$ kompakt. Die Abbildung

$$t_1\omega_1 + \cdots + t_{2n}\omega_{2n} \mapsto (e^{2\pi \mathrm{i}\, t_1}, \ldots, e^{2\pi \mathrm{i}\, t_{2n}})$$

induziert einen Homöomorphismus $T^n \to \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{2n \text{ mal}}$.

Sei $\mathbf{x}_0 = \pi_T(\mathbf{z}_0) \in T^n$ und $U := \{\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu\omega_\nu \,:\, -1/2 < t_\nu < 1/2 \text{ für alle } \nu\}$ ein offenes „Periodenparallelogramm" um den Punkt $\mathbf{z}_0$. Dann ist $\widehat{U} := \pi_T^{-1}(\pi_T(U))$ eine offene und saturierte Umgebung von $(\pi_T)^{-1}(\mathbf{z}_0)$.

Sei $\mathbf{f} : \widehat{U} \to \mathbb{C}^n$ definiert durch $\mathbf{f}(\mathbf{z}) := \mathbf{z} - \omega$, für $\mathbf{z} \in \omega + U$ und $\omega \in \Gamma$. Dann ist $\mathbf{f}$ holomorph, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{z})) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{z} - \omega) = \mathbf{z} + \Gamma$ und $\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(\mathbf{f}) = n$ für $\mathbf{z} \in \widehat{U}$.

Es gibt also auf $T^n$ die Struktur einer $n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, so dass $\pi_T$ eine Submersion (und deshalb lokal biholomorph) ist. Komplexe Koordinaten $\varphi : \pi_T(U) \to \mathbb{C}^n$ erhält man durch $\varphi([\mathbf{z}]) := \mathbf{f}(\mathbf{z})$.

**B) Hopf-Mannigfaltigkeiten.**

Sei $\varrho > 1$ eine feste reelle Zahl und $n > 1$. Zwei Punkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in X := \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ werden *äquivalent* genannt, falls gilt:

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ mit } \mathbf{z}_2 = \varrho^k \cdot \mathbf{z}_1.$$

Den topologischen Quotienten $H := X/\sim$ nennt man eine ***Hopf-Mannigfaltigkeit***. Wie im Falle der Tori zeigt man, dass $H$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi_H : X \to H$ eine Submersion ist.

Ist $r > 0$, so nennt man die Menge

$$U_r := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, r < \|\mathbf{z}\| < \varrho r\}$$

einen *Fundamentalbereich*. $\pi_H|_{U_r} : U_r \to \pi_H(U_r)$ ist ein Homöomorphismus, die Umkehrabbildung eine komplexe Karte.

### C) Projektive Räume.

In $X := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \;:\Longleftrightarrow\; \exists\,\lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } \mathbf{w} = \lambda\mathbf{z}.$$

Die Äquivalenzklasse von $\mathbf{z}$ ist die „gelochte“ Gerade $L_{\mathbf{z}} = \mathbb{C}\mathbf{z} \setminus \{\mathbf{0}\}$ durch $\mathbf{z}$ und den Ursprung. Das ist offensichtlich eine analytische Menge in $X$.

**Definition**

Die Menge $\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$ der Äquivalenzklassen nennt man den $n$-dimensionalen ***komplex-projektiven Raum***.

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ sei die kanonische Projektion, mit $\pi(\mathbf{z}) := L_{\mathbf{z}}$.

Sind zwei Punkte $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)$, $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)$ gegeben, so gilt:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{w}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } w_i = \lambda z_i \text{ für } i = 0, \dots, n \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{w_i}{w_j} = \frac{z_i}{z_j} \text{ für alle } i, j \text{ für die die Brüche definiert sind.} \end{aligned}$$

Also bestimmt $\pi(\mathbf{z})$ zwar nicht die Einträge $z_j$, wohl aber die Verhältnisse $z_i : z_j$. Deshalb bezeichnen wir den Punkt $x = \pi(z_0, \dots, z_n)$ mit $(z_0 : \ldots : z_n)$ und nennen die Zahlen $z_0, \dots, z_n$ die ***homogenen Koordinaten*** von $x$. Sind $z_0, \dots, z_n$ homogene Koordinaten von $x$, so auch $\lambda z_0, \dots, \lambda z_n$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Ist $W \subset X$ eine offene Menge, so ist $\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda \cdot W$ eine saturierte offene Menge in $X$ und daher $\pi(W)$ offen in $\mathbb{P}^n$. Das trifft z.B. auf

$$\widehat{U}_i := \{\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \,:\, z_i \neq 0\} \subset X, \quad i = 0, \dots, n,$$

zu. Die Mengen $U_i := \pi(\widehat{U}_i)$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$.

Dass der $\mathbb{P}^n$ ein Hausdorff-Raum ist, werden wir weiter unten zeigen.

Ist nun ein Punkt $\mathbf{z}_0 = \left(z_0^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}\right) \in X$ gegeben, so gibt es einen Index $i$ mit $z_i^{(0)} \neq 0$, und $\mathbf{z}_0$ liegt in $\widehat{U}_i$. Wir definieren $\mathbf{f}_i : \widehat{U}_i \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\mathbf{f}_i(z_0, \dots, z_n) := \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^{-1}(\mathbf{f}_i(\mathbf{z})) \;&=\; \left\{\mathbf{w} \in \widehat{U}_i \,:\, \frac{w_j}{w_i} = \frac{z_j}{z_i} \text{ for } j \neq i\right\} \\ &=\; \left\{\mathbf{w} \in \widehat{U}_i \,:\, \mathbf{w} = \frac{w_i}{z_i} \cdot \mathbf{z}\right\} \;=\; \pi^{-1}(\pi(\mathbf{z})). \end{aligned}$$

Ist ein Punkt $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n) \in \widehat{U}_i$ gegeben, so definieren wir einen holomorphen Schnitt $s : \mathbb{C}^n \to \widehat{U}_i$ durch $s(z_1, \dots, z_n) := (u_i z_1, \dots, u_i z_i, u_i, u_i z_{i+1}, \dots, u_i z_n)$. Dann ist

$$s\Big(\frac{u_0}{u_i}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_i}, \frac{u_{i+1}}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i}\Big) = (u_0, \dots, u_n),$$

und

$$\mathbf{f}_i \circ s(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n).$$

Also ist $\mathbf{f}_i$ eine Submersion und $\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(\mathbf{f}_i) = n$ für alle $\mathbf{z}$.

Es ist $U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n \,:\, z_i \neq 0\}$. Wir definieren $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\varphi_i(z_0 : \dots : z_n) = \Big(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\Big),$$

Dann ist $\varphi_i \circ \pi = \mathbf{f}_i$, also $\varphi_i$ stetig.

Außerdem ist $\varphi_i$ bijektiv, wie man durch Angabe der Umkehrabbildung

$$\varphi_i^{-1}(w_1, \dots, w_n) := \pi(w_1, \dots, w_i, 1, w_{i+1}, \dots, w_n) = (w_1 : \dots : w_i : 1 : w_{i+1} : \dots : w_n)$$

sofort sieht. Offensichtlich ist $\varphi_i^{-1}$ stetig, also $\varphi_i$ ein Homöomorphismus.

Wir müssen noch zeigen, dass der $\mathbb{P}^n$ ein Hausdorffraum ist.

Dazu seien $x = (z_0 : \dots : z_n)$ und $y = (w_0 : \dots : w_n)$ gegeben, $x \neq y$. Liegen beide Punkte in einer der Mengen $U_i \cong \mathbb{C}^n$, so besitzen sie selbstverständlich disjunkte Umgebungen. Wir müssen also nur den Fall betrachten, dass es kein $i$ mit $x, y \in U_i$ gibt. Dann ist $z_i w_i = 0$ für alle $i$. O.B.d.A sei

$$x = (1 : z_1 : \dots : z_k : 0 : \dots : 0) \quad \text{und} \quad y = (0 : 0 : \dots : 0 : w_{k+1} : \dots : w_{n-1} : 1).$$

Ist $0 < \varepsilon < 1$, so sind

$$\begin{aligned} U &:= \{(1 : t_1 : \dots : t_n) \,:\, |t_n| < \varepsilon\} \subset U_0 \\ \text{und} \quad V &:= \{(s_1 : \dots : s_n : 1) \,:\, |s_1| < \varepsilon\} \subset U_n \end{aligned}$$

offene Umgebungen von $x$ bzw. $y$.

Sei nun $z = (1 : t_1 : \dots : t_n)$ ein beliebiger Punkt von $U$. Ist $t_n = 0$, so kann $z$ nicht in $V$ liegen. Ist $t_n \neq 0$, so ist

$$z = \Big(\frac{1}{t_n} : \frac{t_1}{t_n} : \dots : 1\Big) \quad \text{mit } \Big|\frac{1}{t_n}\Big| > \frac{1}{\varepsilon} > 1,$$

also auch in diesem Falle $z \notin V$. Damit ist $U \cap V = \varnothing$ und das Hausdorff-Axiom erfüllt. Insbesondere ist nun gezeigt, dass der $\mathbb{P}^n$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Die oben konstruierten Abbildungen $\varphi_i$ sind komplexe Karten und $\pi$ ist eine (holomorphe) Submersion. Weil $\pi|_{S^{2n+1}}$ surjektiv ist, ist der $\mathbb{P}^n$ kompakt.

Die Kartenumgebung

$$U_0 = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \,:\, z_0 \neq 0\} = \{(1 : t_1 : \ldots : t_n) \,:\, (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

ist auf kanonische Weise biholomorph äquivalent zum $\mathbb{C}^n$. Wir nennen $U_0$ einen ***affinen Teil*** des $\mathbb{P}^n$. Wenn wir $U_0$ aus dem $\mathbb{P}^n$ entfernen, erhalten wir die sogenannte ***unendlich ferne (projektive) Hyperebene***

$$\begin{aligned} H_0 &= \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \,:\, z_0 = 0\} \\ &= \{(0 : t_1 : \ldots : t_n) \,:\, (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}. \end{aligned}$$

Sie hat die Struktur eines $(n-1)$-dimensionalen komplex-projektiven Raumes. Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir

$$\begin{array}{lcrcl} \mathbb{P}^n & = & \mathbb{C}^n & \cup & \mathbb{P}^{n-1}, \\ \mathbb{P}^{n-1} & = & \mathbb{C}^{n-1} & \cup & \mathbb{P}^{n-2}, \\ & \vdots & & & \\ \mathbb{P}^2 & = & \mathbb{C}^2 & \cup & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Wir müssen nur noch $\mathbb{P}^1 = \{(z_0 : z_1) \,:\, (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$ studieren. Aber das ist die Vereinigung von $\mathbb{C} = \{(1 : t) \,:\, t \in \mathbb{C}\}$ mit $\infty := (0 : 1)$, wenn wir $t = z_1/z_0$ setzen. In einer Umgebung von $\infty$ haben wir die komplexen Koordinaten $z_0/z_1 = 1/t$. Also ist $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemann'sche Zahlenkugel.

Die Hyperebene $H_0$ ist eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Codimension 1, gegeben durch

$$H_0 \cap U_i = \Big\{(z_0 : \ldots : z_n) \in U_i \,:\, \frac{z_0}{z_i} = 0\Big\}.$$