§ 4 Der Weierstraß'sche Vorbereitungssatz

Mit $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ bezeichnen wir den Ring der formalen Potenzreihen um den Nullpunkt. Eine formale Potenzreihe $f = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ heißt ***konvergent***, falls sie in einem Polyzylinder P um den Nullpunkt konvergent ist. Die Menge H_n der konvergenten Potenzreihen bildet eine nullteilerfreie $\mathbb{C}$-Algebra. Wir unterscheiden bei der Schreibweise meistens nicht zwischen einer Potenzreihe und der Funktion, gegen welche die Reihe konvergiert.

4.1. Satz

$f \in H_n$ ist genau dann eine Einheit, wenn $f(0) \neq 0$ ist.

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Ist umgekehrt $f(0) \neq 0$, so gibt es einen Polyzylinder P um Null, so dass $f(\mathbf{z})$ auf P gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, und man kann annehmen, dass f auf P keine Nullstelle besitzt. Dann ist auch $1/f$ auf P holomorph und Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe g, so dass $f \cdot g = 1$ ist. ■

Definition

Eine Teilmenge I eines (kommutativen) Ringes R heißt ein ***Ideal*** in R, falls gilt:

1. Mit $a, b \in I$ ist auch $a + b \in I$.
2. Ist $a \in I$ und $r \in R$, so ist $ra \in I$.

Das Ideal heißt ***maximal***, falls für jedes Ideal I' mit $I \subset I' \subset R$ gilt: $I' = I$ oder $I' = R$.

Die Menge $\mathfrak{m} := \{f \in H_n \,:\, f(\mathbf{0}) = 0\}$ aller Nicht-Einheiten in H_n ist (offensichtlich) ein Ideal, und es ist $H_n = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}$. Der zusammengesetzte Homomorphismus $\mathbb{C} \hookrightarrow H_n \twoheadrightarrow H_n/\mathfrak{m}$ ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $[f] \mapsto f(0)$.

4.2. Satz

Das Ideal $\mathfrak{m}$ der Nicht-Einheiten ist das einzige maximale Ideal in H_n.

Beweis: Ist $\mathfrak{a} \subset H_n$ ein echtes Ideal, so kann es keine Einheit enthalten, muss also in $\mathfrak{m}$ liegen. ■

Man nennt H_n eine ***lokale $\mathbb{C}$-Algebra*** oder auch eine ***$\mathbb{C}$-Stellenalgebra***.

Jede formale Potenzreihe besitzt eine Darstellung

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^\lambda.$$

Man nennt dies die Entwicklung von f nach z_n. Ist f konvergent, so sind auch die Reihen f_λ konvergent. Einen geeigneten Konvergenzbegriff in H_n besitzen wir leider nicht. Allerdings gibt es einen Polyzylinder, auf dem alle Reihen $f_\lambda(\mathbf{z}')$ simultan konvergieren, und auf dem konvergiert dann auch die Reihe von holomorphen Funktionen $f_\lambda(\mathbf{z}')z_n^\lambda$. Das liegt an der absoluten Konvergenz der Reihen.

Definition

Ein Element $f \in H_n$ heißt ***z_n-allgemein von der Ordnung*** k, falls es eine Potenzreihe $\widetilde{f}(z_n)$ in einer Variablen gibt, so dass gilt:

1. $f(0,\dots,0,z_n) = z_n^k \cdot \widetilde{f}(z_n)$.
2. $\widetilde{f}(0) \neq 0$.

Ist f z_n-allgemein von irgend einer endlichen Ordnung $k \geq 0$, so nennt man f schlechthin *z_n-allgemein*.

Sei $f(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda=0}^\infty f_\lambda(\mathbf{z}')z_n^\lambda$ die Entwicklung von f nach z_n. f ist genau dann z_n-allgemein von der Ordnung k, wenn $f_0(\mathbf{0}') = \cdots = f_{k-1}(\mathbf{0}') = 0$ und $f_k(\mathbf{0}') \neq 0$ ist. Dann ist $\widetilde{f}(z_n) = \sum_{\nu=0}^\infty f_{k+\nu}(\mathbf{0}')z_n^\nu$.

f ist also genau dann z_n-allgemein, wenn $f(0,\dots,0,z_n) \not\equiv 0$ ist.

Hier sind einige Eigenschaften:

1. f ist genau dann eine Einheit in H_n, wenn f z_n-allgemein von der Ordnung 0 ist.
2. Sind die Reihen f_λ z_n-allgemein von der Ordnung k_λ, für $\lambda = 1,2$, so ist $f_1 \cdot f_2$ z_n-allgemein von der Ordnung $k_1 + k_2$.

Die zweite Eigenschaft ist klar, die erste sieht man so:

Ist $f(\mathbf{0}) \neq 0$ und $f(\mathbf{0}', z_n) = f_0(\mathbf{0}') + f_1(\mathbf{0}')z_n + \cdots$, so muss offensichtlich $f_0(\mathbf{0}') \neq 0$ sein, also f z_n-allgemein von der Ordnung 0. Die Umkehrung ist klar.

Es gibt übrigens Elemente $f \neq 0$ in H_n, die nicht z_n-allgemein sind, auch nicht nach einer Permutation der Koordinaten.

Definition

Sei $\mathbf{c} = (c_1,\dots,c_{n-1})$ ein Element des $\mathbb{C}^{n-1}$. Die lineare Abbildung $\sigma_\mathbf{c} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit

$$\sigma_\mathbf{c}(z_1,\dots,z_n) := (z_1 + c_1 z_n, \dots, z_{n-1} + c_{n-1}z_n, z_n)$$

nennt man eine ***Scherung***.

Die Menge Σ aller Scherungen bildet eine Untergruppe der Gruppe der linearen Automorphismen von $\mathbb{C}^n$, mit $\sigma_\mathbf{0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ und $\sigma_{\mathbf{c}_1} \circ \sigma_{\mathbf{c}_2} = \sigma_{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2}$.

Man kann schreiben: $\sigma_{\mathbf{c}}(\mathbf{z}', z_n) := (\mathbf{z}', 0) + z_n \cdot (\mathbf{c}, 1)$. Insbesondere ist $\sigma_{\mathbf{c}}(\mathbf{e}_n) = (\mathbf{c}, 1)$ und $\sigma_{\mathbf{c}}(0, \dots, 0, \lambda) = (\lambda\mathbf{c}, \lambda)$.

4.3. Satz

Ist $f \in H_n$ ein Element $\neq 0$, so gibt es eine Scherung σ, so dass $f \circ \sigma$ z_n-allgemein ist. Dabei kann man σ beliebig nahe bei der Identität wählen.

BEWEIS: Die Reihe f konvergiere im Polyzylinder $P = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < R\}$. Wir nehmen an, es gibt einen Polyzylinder $Q = \{\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1} : |\mathbf{z}'| < \varepsilon\}$ mit $0 < \varepsilon < 1$, so dass $f \circ \sigma_{\mathbf{c}}(0, \dots, 0, z_n) \equiv 0$ für jedes $\mathbf{c} \in Q$ und jedes z_n mit $(0, \dots, 0, z_n) \in \sigma_{\mathbf{c}}^{-1}(P)$ ist. Dann ist $f(z_n\mathbf{c}, z_n) = f \circ \sigma_{\mathbf{c}}(0, \dots, 0, z_n) \equiv 0$ für solche $\mathbf{c}$ und z_n.

Sei $\alpha \in (0, R)$ und $r > 0$, so dass $[\alpha - r, \alpha + r] \subset (0, R)$ ist. Ist nun $|\mathbf{z}'| < \varepsilon(\alpha - r)$ und $|z_n - \alpha| < r$, so gibt es ein ϱ mit $0 \le \varrho < r$ und $z_n = \alpha + \varrho e^{\mathrm{i}\,t}$. Dann ist $|z_n| \ge |\alpha| - |\varrho e^{\mathrm{i}\,t}| = \alpha - \varrho > \alpha - r$. Deshalb gilt für $\mathbf{c} := \frac{1}{z_n}\mathbf{z}'$:

$$|\mathbf{c}| < \frac{\varepsilon(\alpha - r)}{\alpha - r} = \varepsilon, \text{ also } \mathbf{c} \in Q.$$

Außerdem ist $|\mathbf{z}'| < R$ und $|z_n| - \alpha \le |z_n - \alpha| < r$, also auch $|z_n| < \alpha + r < R$ und damit $(z_n\mathbf{c}, z_n) = (\mathbf{z}', z_n) \in P$. Das bedeutet:

$$W := \mathsf{P}^{n-1}_{\varepsilon(\alpha - r)}(\mathbf{0}') \times D_r(\alpha) \subset \{(\lambda\mathbf{c}, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \mathbf{c} \in Q\} \cap P.$$

Also verschwindet f auf der offenen Menge W identisch. Das kann aber nicht sein. Demnach gibt es eine Folge $(\mathbf{c}_\nu)$ in $\mathbb{C}^{n-1}$, die gegen $\mathbf{0}'$ konvergiert, so dass $f \circ \sigma_{\mathbf{c}_\nu}(0, \dots, 0, z_n)$ für kein ν identisch verschwindet. Also gibt es ein beliebig kleines $\mathbf{c}$, so dass $\sigma_{\mathbf{c}}$ z_n-allgemein ist. ∎

Bemerkung: Ist $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ beliebig, so gibt es ein $\mathbf{c}$ beliebig nahe bei $\mathbf{0}'$, so dass $f \circ \sigma_{\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}} = (f \circ \sigma_{\mathbf{c}_0}) \circ \sigma_{\mathbf{c}}$ z_n-allgemein ist. Das bedeutet, daß die Menge der σ, für die $f \circ \sigma$ z_n-allgemein ist, offen und dicht in Σ liegt.

Insbesondere kann man auch zu endlich vielen Elementen $f_1, \dots, f_l \neq 0$ in H_n eine Scherung σ finden, so daß $f_1 \circ \sigma, \dots, f_l \circ \sigma$ simultan z_n-allgemein sind.

Wir interessieren uns jetzt für Potenzreihen, die von einer Variablen polynomial abhängen. Ist $f \in H_n$ und $f(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\mathbf{z}') z_n^\lambda$ mit $f_\lambda = 0$ für $\lambda > s$, so ist f ein Element des Polynomringes $H_{n-1}[z_n]$. Ist $f_s \neq 0$, so ist $\deg(f) = s$. Ist f normiert und $f_\lambda(\mathbf{0}') = 0$ für $\lambda < s$, so ist f z_n-allgemein genau von der Ordnung s, und es ist $f(\mathbf{0}', z_n) = z_n^s$.

Definition

Ein normiertes Polynom $\omega \in H_{n-1}[z_n]$ mit $\deg(\omega) = s$ und $\omega(\mathbf{0}', z_n) = z_n^s$ nennt man ein ***Weierstraß-Polynom***.

Ein normiertes Polynom $\omega \in H_{n-1}[z_n]$ mit $\deg(\omega) = s$ ist genau dann ein Weierstraß-Polynom, wenn es z_n-allgemein von der Ordnung s ist. Es folgt leicht, dass das Produkt von zwei Weierstraß-Polynomen wieder ein Weierstraß-Polynom ist.

Ist $g = e \cdot \omega$ das Produkt einer Einheit mit einem Weierstraß-Polynom vom Grad s, dann ist g auch z_n-allgemein von der Ordnung s, da die Einheit e z_n-allgemein von der Ordnung 0 ist.

Als nächstes betrachten wir symmetrische Polynome.

Definition

Ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_s]$ heißt ***symmetrisch***, falls für alle i, j gilt:

$$p(u_1, \ldots, u_i, \ldots u_j, \ldots, u_s) = p(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_s).$$

Ein Spezialfall sind die ***elementar-symmetrischen Polynome*** $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, die folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(u_1, \ldots, u_s) &= u_1 + \cdots + u_s, \\
\sigma_2(u_1, \ldots, u_s) &= \sum_{i<j} u_i u_j, \\
&\vdots \\
\sigma_s(u_1, \ldots, u_s) &= u_1 \cdots u_s.
\end{aligned}$$

Das folgende Resultat wird z.B. bei van der Waerden bewiesen, oder auch in dem Buch von Cox, Little und O'Shea (Chapter 7, §1, prop. 3).

4.4. Satz

Ist $p \in \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_s]$ symmetrisch, so gibt es genau ein Polynom $Q(y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$, so dass $p = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ ist.

Ein spezielles symmetrisches Polynom ist das Quadrat der Vandermonde-Determinante:

$$p_V(u_1, \ldots, u_s) = \prod_{i<j} (u_i - u_j)^2$$

Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $Q_V(y_1, \ldots, y_s)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so daß gilt:

$$p_V(u_1, \ldots, u_s) = Q_V(\sigma_1(u_1, \ldots, u_s), \ldots, \sigma_s(u_1, \ldots, u_s)).$$

Definition

Ist $\omega(u) = u^s + a_1 u^{s-1} + \cdots + a_s$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{C}[u]$, so heißt $\Delta_\omega = Q_V(-a_1, a_2, \ldots, (-1)^s a_s)$ die ***Diskriminante*** von ω.

Sind $w_1, \ldots, w_s$ die Nullstellen des Polynoms ω, so ist

$$\begin{aligned}\omega(u) &= (u - w_1)(u - w_2)\cdots(u - w_s)\\ &= u^s - \Big(\sum_{i=1}^{s} w_i\Big)u^{s-1} + \Big(\sum_{i<j} w_i w_j\Big)u^{s-2} + \cdots + (-1)^s w_1 \cdots w_s\\ &= u^s - \sigma_1(w_1, \ldots, w_s)u^{s-1} + \sigma_2(w_1, \ldots, w_s)u^{s-2} + \cdots + (-1)^s \sigma_s(w_1, \ldots, w_s),\end{aligned}$$

also $(-1)^i a_i = \sigma_i(w_1, \ldots, w_s)$ für $i = 1, \ldots, s$. Damit ist $\Delta_\omega = p_V(w_1, \ldots, w_s)$, und $\Delta_\omega = 0$ genau dann, wenn es ein Paar $i \neq j$ mit $w_i = w_j$ gibt.

4.5. Beispiel

Sei $\omega(u) = u^2 - au + b$. Zur Berechnung der Diskriminante benutzen wir

$$p_V(u_1, u_2) = \prod_{i<j}(u_i - u_j)^2 = (u_1 - u_2)^2 = (u_1 + u_2)^2 - 4u_1u_2.$$

Dann ist $Q_V(y_1, y_2) = y_1^2 - 4y_2$, und $\Delta_\omega = Q_V(a, b) = a^2 - 4b$.

Definition

Für $k \in \mathbb{N}$ nennt man $s_k(x_1, \ldots, x_n) := x_1^k + \cdots + x_n^k$ eine ***Potenzsumme***.

Die Potenzsummen sind symmetrische Polynome, also insbesondere Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen. Umgekehrt gilt:

4.6. Satz

Jedes symmetrische Polynom in $\mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n]$ ist ein Polynom in den Potenzsummen $s_1, \ldots, s_n$.

Auf den Beweis wird hier verzichtet (vgl. Cox/Little/O'Shea). Ein **Beispiel** ist

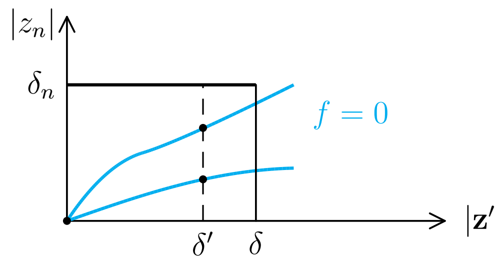
$$\frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) = \frac{1}{2}[(x_1 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)] = \sigma_2(x_1, \ldots, x_n).$$

4.7. Satz

Sei U eine offene Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^n$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $f(\mathbf{0}) = 0$. Ist f (genau genommen die Potenzreihenentwicklung von f im Nullpunkt) z_n-allgemein von der Ordnung $k \geq 1$, so gibt es Zahlen $\delta_n, \delta' > 0$, so dass gilt:

1. *$f(\mathbf{z}', z_n) \neq 0$ für $|z_n| = \delta_n$ und $|\mathbf{z}'| < \delta'$.*
2. *Für jedes feste $\mathbf{z}'$ mit $|\mathbf{z}'| < \delta'$ hat die Gleichung $f(\mathbf{z}', z_n) = 0$ in $D_{\delta_n}(0)$ genau k Lösungen (mit Vielfachheit gezählt).*

BEWEIS: Die Funktion $g(\zeta) := f(\mathbf{0}', \zeta)$ hat in $\zeta = 0$ eine isolierte Nullstelle der Ordnung k. Deshalb gibt es ein $\delta_n > 0$, so dass $g(\zeta) \neq 0$ für $0 < |\zeta| \leq \delta_n$ ist. Offensichtlich gibt es dann auch ein $\delta > 0$, so daß $f(\mathbf{z}', \zeta) \neq 0$ für $|\mathbf{z}'| \leq \delta$ und $|\zeta| = \delta_n$ ist. Sei $\varepsilon := \inf\{|f(\mathbf{z}', z_n)| : |\mathbf{z}'| \leq \delta \text{ und } |z_n| = \delta_n\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$.



Ist δ' mit $0 < \delta' < \delta$ klein genug gewählt, so ist

$$|f(\mathbf{z}', z_n) - f(\mathbf{0}', z_n)| < \varepsilon \leq |g(z_n)|$$

für $|\mathbf{z}'| < \delta'$ und $|z_n| = \delta_n$.

Sei nun $\mathbf{z}'$ festgehalten und $h(\zeta) := f(\mathbf{z}', \zeta)$. Dann ist $|h(z_n) - g(z_n)| < |g(z_n)|$ für $|z_n| = \delta_n$. Aus dem Satz von Rouché folgt nun, dass h und g in $D_{\delta_n}(0)$ gleich viele Nullstellen besitzen, dass also $f(\mathbf{z}', z_n) = 0$ für $|z_n| < \delta_n$ genau k Lösungen hat. ∎

4.8. Hilfssatz

g und h seien holomorphe Funktionen in einer Veränderlichen. Hat h in a eine Nullstelle der Ordnung k, so ist

$$\operatorname{res}_a\left(g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)}\right) = k \cdot g(a).$$

BEWEIS: Wir schreiben $h(z) = (z-a)^k \cdot r(z)$, mit $r(a) \neq 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)} &= g(z) \cdot \frac{k \cdot (z-a)^{k-1} r(z) + (z-a)^k r'(z)}{(z-a)^k r(z)} \\ &= g(z) \cdot \left[\frac{k}{z-a} + \frac{r'(z)}{r(z)}\right] . \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist holomorph, und der erste hat eine Polstelle erster Ordnung. Also ist

$$\text{res}_a\left(g(z)\cdot\frac{h'(z)}{h(z)}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{z\to a}(z-a)\cdot\left(g(z)\cdot\dfrac{h'(z)}{h(z)}\right) = k\cdot g(a), \\ 0 \text{ falls } g(a)=0. \end{cases}$$

∎

4.9. Folgerung

Sei h holomorph auf einer Umgebung U von $\overline{D_\delta(0)}\subset\mathbb{C}$ und $\neq 0$ auf $\partial D_\delta(0)$. Hat h in $D_\delta(0)$ die Nullstellen $a_1,\ldots,a_q$ mit Vielfachheiten $k_1,\ldots,k_q$, so ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\int_{|\zeta|=\delta}\frac{\zeta^m h'(\zeta)}{h(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{\nu=1}^{q} k_\nu a_\nu^m\,.$$

Beweis: Der Integrand ist meromorph, mit Polstellen bei $a_1,\ldots,a_q$. Daher ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\int_{|\zeta|=\delta}\frac{\zeta^m h'(\zeta)}{h(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{\nu=1}^{q}\text{res}_{a_\nu}\left(\frac{\zeta^m h'(\zeta)}{h(\zeta)}\right) = \sum_{\nu=1}^{q} k_\nu a_\nu^m\,.$$

∎

4.10. Weierstraß'scher Vorbereitungssatz

Sei U eine offene Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^n$, $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph, $f(\mathbf{0})=0$ und f z_n-allgemein von der Ordnung $k\geq 1$. Dann gibt es einen Poyzylinder P um $\mathbf{0}$ in U, ein Weierstraß-Polynom $\omega=\omega(\mathbf{z}',z_n)$ vom Grad k und eine holomorphe Funktion e, so dass gilt:

1. *e hat keine Nullstellen in P.*
2. *$f=e\cdot\omega$ auf P.*

Dabei sind e und ω in der Nähe von $\mathbf{0}$ eindeutig bestimmt. Ist f ein Polynom in z_n, so gilt das auch für e.

Beweis: Da f z_n-allgemein von der Ordnung k ist, gibt es Zahlen $\delta_n,\delta'>0$, so dass gilt:

1. $f(\mathbf{z}',z_n)\neq 0$ für $|z_n|=\delta_n$ und $|\mathbf{z}'|<\delta'$.
2. Für jedes feste $\mathbf{z}'$ mit $|\mathbf{z}'|<\delta'$ hat die Gleichung $f(\mathbf{z}',z_n)=0$ in $D_{\delta_n}(0)$ genau k Lösungen (mit Vielfachheit gezählt).

Seien etwa $\varphi_1(\mathbf{z}'),\ldots,\varphi_k(\mathbf{z}')$ die Lösungen der Gleichung $f(\mathbf{z}',z_n)=0$ in $D_{\delta_n}(0)$. Dann setzen wir

$$\omega(\mathbf{z}', z_n) := \prod_{j=1}^{k} (z_n - \varphi_j(\mathbf{z}')).$$

Für jedes feste $\mathbf{z}'$ ist $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ ein normiertes Polynom vom Grad k :

$$\omega(\mathbf{z}', z_n) = z_n^k + a_{k-1}(\mathbf{z}')z_n^{k-1} + \cdots + a_0(\mathbf{z}').$$

Die Koeffizienten sind – bis auf das Vorzeichen – elementarsymmetrische Funktionen der Nullstellen. Außerdem gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{\zeta^m \cdot f_{\overline{\zeta}}(\mathbf{z}', \zeta)}{f(\mathbf{z}', \zeta)}\, d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\mathbf{z}')^m.$$

Da die linke Seite holomorph von $\mathbf{z}'$ abhängt, gilt das auch für die rechte Seite. Also sind alle Potenzsummen der Nullstellen holomorphe Funktionen von $\mathbf{z}'$. Da jedes symmetrische Polynom ein Polynom in den Potenzsummen ist, sind die Koeffizienten a_i holomorph.

Wir wissen, dass $f(\mathbf{0}', z_n) = z_n^k \cdot r(z_n)$ ist, mit einer holomorphen Funktion r und $r(0) \neq 0$. Das bedeutet, dass $\varphi_j(\mathbf{0}') = 0$ für $j = 1, \ldots, k$ ist, also $\omega(\mathbf{0}', z_n) = z_n^k$. Damit ist ω ein Weierstraß-Polynom.

Als nächstes setzen wir $e := f/\omega$. Für festes $\mathbf{z}'$ und $|z_n| \leq \delta_n$ besitzt

$$e(\mathbf{z}', z_n) = \frac{f(\mathbf{z}', z_n)}{\prod_{j=1}^{k}(z_n - \varphi_j(\mathbf{z}'))}$$

als Funktion von z_n keine Nullstelle mehr und ist offensichtlich holomorph in z_n. Nun benutzen wir die Cauchysche Integralformel:

$$e(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{e(\mathbf{z}', \zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta\ .$$

Da $\omega(\mathbf{z}', \zeta) \neq 0$ für $|\zeta| = \delta_n$ ist, ist der Integrand auf der rechten Seite holomorph in $\mathbf{z}'$, und aus den Sätzen über Parameterintegrale folgt, daß e holomorph in $\mathbf{z}'$ ist.

Zum Schluss ein paar Worte zur Eindeutigkeit. Für festes $\mathbf{z}'$ ist $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ durch die Nullstellen von f eindeutig festgelegt. Die Funktion e ergibt sich dann durch Division. Ist f ein Polynom in z_n, so kann man – da ω normiert ist – den Satz von der Division mit Rest in Polynomringen anwenden, und man erhält, dass auch e ein Polynom ist. ∎

Bemerkung: Der Weierstraß'sche Vorbereitungssatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen. Ist nämlich f z_n-allgemein von der Ordnung $k = 1$, so ist $f(\mathbf{0}', z_n) = c_1 z_n + c_2 z_n^2 + \cdots$, mit $c_1 \neq 0$. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial z_n}(\mathbf{0}', 0) \neq 0.$$

Das ist die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen (im Falle einer skalaren impliziten Funktion). Der Vorbereitungssatz von Weierstraß besagt nun, daß $f(\mathbf{z}', z_n) = u(\mathbf{z}', z_n) \cdot (z_n - a(\mathbf{z}'))$ ist, wobei a holomorph ist und u nahe $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ keine Nullstellen besitzt. Also ist

$$\{(\mathbf{z}', z_n) \,:\, f(\mathbf{z}', z_n) = 0\} = \{(\mathbf{z}', z_n) \,:\, z_n = a(\mathbf{z}')\}.$$

Das ist aber auch die Aussage des Satzes über implizite Funktionen.

4.11. Divisionsformel von Weierstraß

Sei f holomorph nahe $\mathbf{0}$ und $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ ein Weierstraß-Polynom vom Grad k. Dann gibt es holomorphe Funktionen q und r auf einer Umgebung von $\mathbf{0}$, so dass gilt:

1. *r ist ein Polynom vom Grad $< k$ in z_n.*
2. *Es ist $f = q \cdot \omega + r$.*

Dabei sind q und r in der Nähe von $\mathbf{0}$ eindeutig bestimmt. Ist f ein Polynom in z_n, so ist auch q ein Polynom in z_n.

Beweis: Wir können wieder Zahlen $\delta_n > 0$ und $\delta' > 0$ finden, so dass $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ für $|z_n| = \delta_n$ und $|\mathbf{z}'| < \delta'$ keine Nullstellen besitzt. Für solche Punkte setzen wir

$$q(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta| = \delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)/\omega(\mathbf{z}', \zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta\ .$$

Offensichtlich ist q holomorph. Nun setzen wir $r := f - q \cdot \omega$. Die Cauchysche Integralformel liefert:

$$\begin{aligned}
r(\mathbf{z}', z_n) &= f(\mathbf{z}', z_n) - q(\mathbf{z}', z_n) \cdot \omega(\mathbf{z}', z_n) \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta| = \delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta - q(\mathbf{z}', z_n) \cdot \omega(\mathbf{z}', z_n) \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta| = \delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)\omega(\mathbf{z}', \zeta) - f(\mathbf{z}', \zeta)\omega(\mathbf{z}', z_n)}{\omega(\mathbf{z}', \zeta)(\zeta - z_n)}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta| = \delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)}{\omega(\mathbf{z}', \zeta)} \cdot \frac{\omega(\mathbf{z}', \zeta) - \omega(\mathbf{z}', z_n)}{\zeta - z_n}\, d\zeta\ .
\end{aligned}$$

Die Funktion $g(\mathbf{z}', w) := \dfrac{\omega(\mathbf{z}', z_n + w) - \omega(\mathbf{z}', z_n)}{w}$ ist holomorph in $\mathbf{z}'$ und ein Polynom vom Grad $< k$ in w. Dann ist auch

$$r(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta| = \delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)}{\omega(\mathbf{z}', \zeta)} g(\mathbf{z}', \zeta - z_n)\, d\zeta$$

ein Polynom vom Grad $< k$ in z_n.

Zur Eindeutigkeit: Es seien zwei Darstellungen gegeben,

$$f = q_1 \cdot \omega + r_1 = q_2 \cdot \omega + r_2.$$

Dann ist $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) \cdot \omega$. Auf der linken Seite steht ein Polynom in z_n vom Grad $< k$, die rechte Seite hat aber (bei festem $\mathbf{z}'$) k Nullstellen. Das ist nur möglich, wenn $r_1 - r_2 = 0$ ist. Aber dann folgt, dass auch $q_1 = q_2$ ist.

Ist f ein Polynom, so greift wieder der Satz von der Division mit Rest in $H_{n-1}[z_n]$.

■

Sei jetzt R ein kommutativer Ring mit 1. Bekanntlich wird ein R-Modul M *noethersch* genannt, wenn jeder Untermodul $N \subset M$ endlich erzeugt ist. Der Ring R selbst ist ***noethersch***, wenn er ein noetherscher R-Modul ist, wenn also jedes Ideal in R (als Untermodul) endlich erzeugt ist. Jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset R$$

wird dann stationär, d.h., es gibt ein k_0, so daß $I_k = I_{k_0}$ für $k \geq k_0$ ist.

4.12. Lemma

Ist R ein noetherscher Ring, so ist R^q ein noetherscher R-Modul.

BEWEIS: Wir führen Induktion nach q.

Der Fall $q = 1$ ist trivial. Nun sei $q \geq 2$ und das Lemma für $q - 1$ schon bewiesen. Sei $M \subset R^q$ ein R-Untermodul. Dann ist

$$I := \{r \in R \,:\, \exists\, \mathbf{r}' \in R^{q-1} \text{ mit } (r, \mathbf{r}') \in M\}$$

ein Ideal in R und als solches endlich erzeugt durch Elemente $r_1, \ldots, r_l$. Zu jedem r_λ gibt es ein Element $\mathbf{r}'_\lambda \in R^{q-1}$, so dass $\mathbf{r}_\lambda := (r_\lambda, \mathbf{r}'_\lambda)$ in M liegt.

Die Menge $M' := M \cap (\{0\} \times R^{q-1})$ kann mit einem R-Untermodul von R^{q-1} identifiziert werden, ist nach Induktions-Annahme also endlich erzeugt. Seien $\mathbf{r}_\lambda = (0, \mathbf{r}'_\lambda)$, $\lambda = l+1, \ldots, p$, Erzeugende von M'.

Ein beliebiges Element $\mathbf{x} \in M$ kann in der Form $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}')$ mit $x_1 \in I$ geschrieben werden. Dann ist $x_1 = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda r_\lambda$, $a_\lambda \in R$, und

$$\mathbf{x} - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda = \big(0, \mathbf{x}' - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}'_\lambda\big) \in M'.$$

Das bedeutet, dass es Elemente $a_{l+1}, \ldots, a_p \in R$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{x} - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda = \sum_{\lambda=l+1}^{p} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda.$$

Also bildet $\{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_p\}$ ein Erzeugendensystem für M. ■

4.13. Rückert'scher Basissatz

Der Ring H_n der konvergenten Potenzreihen ist noethersch.

BEWEIS: Wir führen Induktion nach n. Ist $n = 0$, so ist $H_n = \mathbb{C}$ und die Behauptung trivial. Jetzt sei $n \geq 1$ und der Satz für $n-1$ bewiesen. $I \subset H_n$ sei ein Ideal $\neq 0$ und $g \neq 0$ ein Element von I. O.B.d.A. können wir außerdem annehmen, dass g z_n-allgemein von der Ordnung s ist.

Sei $\Phi = \Phi_g : H_n \to (H_{n-1})^s$ der *Weierstraß-Homomorphismus*, der wie folgt definiert wird: Zu jedem $f \in H_n$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $q \in H_n$ und $r = r_0 + r_1 z_n + \cdots + r_{s-1} z_n^{s-1} \in H_{n-1}[z_n]$, so dass $f = q \cdot g + r$ ist. Sei $\Phi(f) := (r_0, \ldots, r_{s-1})$.

Offensichtlich ist Φ ein H_{n-1}-Modul-Homomorphismus. Nach Induktionsvoraussetzung ist H_{n-1} noethersch und deshalb $(H_{n-1})^s$ ein noetherscher H_{n-1}-Modul. Da $M := \Phi(I)$ ein H_{n-1}-Untermodul ist, ist M endlich erzeugt. Seien $\mathbf{r}_\lambda = (r_0^{(\lambda)}, \ldots, r_{s-1}^{(\lambda)})$, $\lambda = 1, \ldots, l$, Erzeugende von M.

Ist $f \in I$ beliebig, so gibt es eine Darstellung $f = q \cdot g + r$ mit $r = r_0 + r_1 z_n + \cdots + r_{s-1} z_n^{s-1}$, und es gibt Elemente $a_1, \ldots, a_l \in H_{n-1}$, so dass $(r_0, r_1, \ldots, r_{s-1}) = \Phi_g(f) = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda$ ist. Wir erhalten also die Darstellung

$$f = q \cdot g + \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \cdot \left(r_0^{(\lambda)} + r_1^{(\lambda)} z_n + \cdots + r_{s-1}^{(\lambda)} z_n^{s-1}\right).$$

Die Menge $\{g, r^{(1)}, \ldots, r^{(l)}\}$ mit $r^{(\lambda)} = r_0^{(\lambda)} + r_1^{(\lambda)} z_n + \cdots + r_{s-1}^{(\lambda)} z_n^{s-1}$ bildet ein Erzeugendensystem von I. ∎

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Teilbarkeitslehre in H_n.

Sei R ein beliebiger Integritätsbereich mit 1. Dann ist $R^* := R \setminus \{0\}$ eine kommutative Halbgruppe (in Bezug auf die Ring-Multiplikation), und die Menge $R^\times$ der Einheiten in R ist eine abelsche Gruppe.

Definition

Sei $a \in R^* \setminus R^\times$.

1. a heißt ***irreduzibel*** (oder *unzerlegbar*), falls gilt: Ist $a = a_1 \cdot a_2$ (mit $a_1, a_2 \in R^*$), so ist $a_1 \in R^\times$ oder $a_2 \in R^\times$.
2. a heißt ***prim***, falls gilt: $a \mid a_1 a_2 \implies a \mid a_1$ oder $a \mid a_2$.

Irreduzible Elemente und Primelemente können auch in einer beliebigen kommutativen Halbgruppe betrachtet werden. In R^* ist jedes Primelement irreduzibel, und in manchen Ringen (z.B. in $\mathbb{Z}$ oder in $\mathbb{R}[X]$) ist sogar jedes irreduzible Element prim. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kann man irreduzible Elemente finden, die nicht prim sind.

Definition

R heißt ein ***faktorieller Ring*** (oder *ZPE-Ring*), wenn jedes Element $a \in R^* \setminus R^\times$ als Produkt von endlich vielen Primelementen geschrieben werden kann.

Die Zerlegung in Primelemente ist bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt. In einem ZPE-Ring ist jedes irreduzible Element prim, und je zwei Elemente haben einen ***größten gemeinsamen Teiler*** (ggT).

Jeder Hauptidealring ist ein ZPE-Ring, und in diesem Fall kann der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente a und b als Linearkombination von a und b geschrieben werden. Beispiele sind $\mathbb{Z}$ und $K[X]$ (mit einem beliebigen Körper K).

Ist R ein beliebiger Integritätsbereich, so wird der zugehörige Quotientenkörper mit $Q(R)$ bezeichnet. Die Menge der normierten Polynome $f(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in R$ bildet eine kommutative Halbgruppe $R^0[u]$. Deshalb kann man in $R^0[u]$ von Faktor-Zerlegung und Irreduzibilität sprechen.

4.14. Gauß'sches Lemma

Sei R ein faktorieller Ring und $Q = Q(R)$. Sind ω_1, ω_2 Elemente von $Q^0[u]$ mit $\omega_1\omega_2 \in R^0[u]$, so ist $\omega_\lambda \in R^0[u]$ für $\lambda = 1, 2$.

Beweis: Für $\lambda = 1, 2$ sei $\omega_\lambda = a_{\lambda,0} + a_{\lambda,1}u + \cdots + a_{\lambda,s_\lambda - 1}u^{s_\lambda - 1} + u^{s_\lambda}$ mit $a_{\lambda,\nu} \in Q$. Es gibt also Elemente $d_\lambda \in R$, so dass $d_\lambda \cdot \omega_\lambda \in R[u]$ ist. Wir können d_λ so wählen, dass die Koeffizienten von $d_\lambda \cdot \omega_\lambda$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen (man spricht dann auch von ***primitiven Polynomen***).

Wir setzen $d := d_1 d_2$ und nehmen an, dass es ein Primelement p mit $p \mid d$ gibt. Dann teilt p nicht alle Koeffizienten $d_\lambda a_{\lambda,\nu}$ von $d_\lambda \cdot \omega_\lambda$ gleichzeitig. Sei μ_λ minimal, so dass gilt: $p \nmid d_\lambda a_{\lambda,\mu_\lambda}$ für $\lambda = 1, 2$. Dann folgt

$$(d_1\omega_1)(d_2\omega_2) = \cdots + u^{\mu_1+\mu_2}(da_{1,\mu_1}a_{2,\mu_2} + \text{ etwas, das durch } p \text{ teilbar ist}) + \cdots .$$

Da R faktoriell ist, teilt p das Produkt $(d_1 a_{1,\mu_1})(d_2 a_{2,\mu_2})$ nicht. Deshalb ist der Koeffizient bei $u^{\mu_1+\mu_2}$ nicht durch p teilbar. Aber weil $\omega_1\omega_2$ Koeffizienten in R hat, muss jeder Teiler von d jeden Koeffizienten von $d \cdot \omega_1\omega_2 = (d_1\omega_1)(d_2\omega_2)$ teilen. Das ist ein Widerspruch!

Wenn d keinen Primteiler besitzt, muss es eine Einheit sein. Aber dann sind d_1 und d_2 auch Einheiten, und $\omega_\lambda = d_\lambda^{-1}(d_\lambda\omega_\lambda)$ gehört zu $R^0[u]$. ∎

4.15. Folgerung

Sei R ein Integritätsbereich, in dem die Aussage des Gauß'schen Lemmas erfüllt ist: „Sind ω_1, ω_2 Elemente von $Q^0[u]$ mit $\omega_1\omega_2 \in R^0[u]$, so ist $\omega_\lambda \in R^0[u]$ für $\lambda = 1, 2$." Dann gilt:

1. *Ist $a \in R^0[u]$ prim in $Q[u]$, so auch in $R^0[u]$.*
2. *Ist $a \in R^0[u]$ reduzibel in $Q[u]$, so auch in $R^0[u]$.*
3. *Jedes Element in $R^0[u]$ ist Produkt von endlich vielen Primelementen.*
4. *Ist $a \in R^0[u]$ irreduzibel, so ist a auch prim.*

BEWEIS: 1. Sei $a \in R^0[u]$ ein Primelement in $Q[u]$. Teilt a ein Produkt $a'a''$ in $R^0[u]$, so auch in $Q[u]$. Deshalb teilt es einen der Faktoren in $Q[u]$. Es gebe z.B. ein Element $b \in Q[u]$ mit $a' = ab$. Nach Gauß ist $b \in R^0[u]$. Das zeigt, daß a prim in $R^0[u]$ ist.

2. Sei $a \in R^0[u]$ ein Produkt von Nicht-Einheiten $a_1, a_2 \in Q[u]$. Ist $c_i \in Q$ der höchste Koeffizient von a_i, so ist $c_1c_2 = 1$, $c_i^{-1}a_i \in Q^0[u]$ und $a = (c_1^{-1}a_1)(c_2^{-1}a_2)$. Nach Gauß liegen die $c_i^{-1}a_i$ in $R^0[u]$, und sie können dort keine Einheiten sein. Also ist a reduzibel in $R^0[u]$.

3. Jedes Element $a \in R^0[u]$ ist ein endliches Produkt $a = a_1 \cdots a_l$ von Primelementen in $Q[u]$. Wie in (2) kann man die a_i normiert wählen. Indem man das Gauß'sche Lemma mehrmals anwendet, kann man zeigen, dass die a_i zu $R^0[u]$ gehören. Nach (1) sind sie auch prim in $R^0[u]$.

4. Sei $a \in R^0[u]$ irreduzibel. Da a ein Produkt von Primelementen ist, muss es selbst prim sein. ∎

Wir wenden diese Ergebnisse jetzt auf $R = H_n$ an.

Definition

Sei $f \in H_n$, $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda$ die Entwicklung von f nach homogenen Polynomen. Unter der *Ordnung* von f verstehen wir die Zahl

$$\mathrm{ord}(f) := \min\{\lambda \in \mathbb{N}_0 : p_\lambda \neq 0\} \quad \text{und} \quad \mathrm{ord}(0) := \infty.$$

Dann gilt:

1. $\mathrm{ord}(f) \geq 0$ gilt für jedes Element $f \in H_n$.
2. $\mathrm{ord}(f) = 0 \iff f$ ist eine Einheit.
3. $\mathrm{ord}(f_1 \cdot f_2) = \mathrm{ord}(f_1) + \mathrm{ord}(f_2)$.

4.16. Theorem

H_n ist ein faktorieller Ring.

Beweis: Wir führen Induktion nach n.

Ist $n = 0$, so ist $H_n = \mathbb{C}$ ein Körper und jedes Element $\neq 0$ eine Einheit. In diesem Fall ist nichts zu zeigen.

Nun sei der Satz für $n-1$ bewiesen, $f \in H_n$ eine Nicht-Einheit, $f \neq 0$. Ist f zerlegbar und $f = f_1 \cdot f_2$ eine echte Zerlegung, so ist $\operatorname{ord}(f) = \operatorname{ord}(f_1) + \operatorname{ord}(f_2)$, und die Ordnungen der Faktoren sind echt kleiner als die Ordnung von f. Deshalb kann f in endlich viele irreduzible Faktoren zerlegt werden.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes irreduzible Element f prim ist. Wir nehmen an, dass f ein Produkt $f_1 f_2$ teilt, mit $f_\lambda \in (H_n)^*$ für $\lambda = 1, 2$. Es gibt eine Scherung σ, so daß $f_1 \circ \sigma$, $f_2 \circ \sigma$ und $f \circ \sigma$ z_n-allgemein sind. Wenn wir zeigen können, dass $f \circ \sigma$ einen Faktor $f_\lambda \circ \sigma$ teilt, dann gilt dies auch für f und f_λ. Deshalb können wir annehmen, dass f_1, f_2 und f z_n-allgemein sind.

Nach dem Vorbereitungssatz gibt es Einheiten e_1, e_2, e und Weierstraß-Polynome $\omega_1, \omega_2, \omega$, so dass $f_1 = e_1 \cdot \omega_1$, $f_1 = e_2 \cdot \omega_2$ und $f = e \cdot \omega$ gilt. Dann teilt ω das Produkt $\omega_1 \omega_2$. Ist $\omega_1 \omega_2 = q \cdot \omega$ mit $q \in H_n$, so ergibt die Divisions-Formel, dass q eindeutig bestimmt und ein Polynom in z_n ist. Also teilt ω das Produkt $\omega_1 \omega_2$ sogar in $H^0_{n-1}[z_n]$. Da ω in H_n irreduzibel ist, ist es auch in $H^0_{n-1}[z_n]$ irreduzibel. Nach Induktionsvoraussetzung ist H_{n-1} faktoriell, also ω sogar prim in $H^0_{n-1}[z_n]$. Also muss ω einen der Faktoren ω_1 oder ω_2 in $H^0_{n-1}[z_n]$ teilen und damit auch in H_n. Das bedeutet: $f \mid f_1$ oder $f \mid f_2$ in H_n. ∎

Ist $\omega \in H_n[u]$ ein normiertes Polynom vom Grad s, so gibt es einen Polyzylinder P um $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$, in dem alle Koeffizienten von ω gegen holomorphe Funktionen konvergieren. Wir können deshalb ω als parametrisierte Familie von Polynomen in einer Variablen u auffassen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $\omega(\mathbf{0}, u)$ in Linearfaktoren, und das gilt auch für jedes $\omega(\mathbf{z}, u)$, $\mathbf{z} \in P$. Wir zeigen jetzt, dass solche Zerlegungen auf einer Umgebung von $\mathbf{0}$ simultan von einer Zerlegung von ω in $H^0_n[u]$ induziert werden.

4.17. Hensel'sches Lemma

Sei $\omega(\mathbf{0}, u) = \prod_{\lambda=1}^{l} (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$ *die Zerlegung in Linearfaktoren (mit* $c_\nu \neq c_\mu$ *für* $\nu \neq \mu$ *und* $s_1 + \cdots + s_l = s$*). Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome* $\omega_1, \ldots, \omega_l \in H^0_n[u]$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\deg(\omega_\lambda) = s_\lambda$, *für* $\lambda = 1, \ldots, l$.
2. $\omega_\lambda(\mathbf{0}, u) = (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$.
3. $\omega = \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_l$.

Beweis: Wir führen Induktion nach l. Der Fall $l = 1$ ist trivial. Nun nehmen wir an, daß der Satz schon für $l - 1$ bewiesen wurde.

Sei zunächst $u = 0$ eine Nullstelle von $\omega(\mathbf{0}, u)$. O.B.d.A. können wir dann annehmen, daß $c_1 = 0$ ist, also $\omega(\mathbf{0}, u) = u^{s_1} \cdot h(u)$, wobei h ein Polynom über $\mathbb{C}$ mit $\deg(h) = s - s_1$ und $h(0) \neq 0$ ist. Damit ist ω u-allgemein von der Ordnung s_1, und es gibt eine Einheit $e \in H_n^0[u]$ und ein Weierstraß-Polynom ω_1 mit $\omega = e \cdot \omega_1$. Da $\omega_1(\mathbf{0}, u) = u^{s_1}$ ist, folgt:

$$e(\mathbf{0}, u) = h(u) = \prod_{\lambda=2}^{l} (u - c_\lambda)^{s_\lambda}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente $\omega_2, \ldots, \omega_l \in H_n^0[u]$ mit $\deg(\omega_\lambda) = s_\lambda$, $\omega_\lambda(\mathbf{0}, u) = (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$ und $e = \omega_2 \cdots \omega_l$. Also ist $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l$ die gewünschte Zerlegung.

Ist $\omega(\mathbf{0}, 0) \neq 0$, so ersetzen wir ω durch $\omega'(\mathbf{z}, u) := \omega(\mathbf{z}, u + c_1)$ und erhalten wie oben eine Zerlegung $\omega' = \omega_1' \cdots \omega_l'$. Dann setzen wir

$$\omega_\lambda(\mathbf{z}, u) := \omega_\lambda'(\mathbf{z}, u - c_1).$$

Das ergibt eine Zerlegung $\omega = \omega_1 \cdots \omega_l$ im Sinne des Satzes. Die Eindeutigkeit zeigt man ebenfalls durch Induktion. ∎

Eine ***lokale holomorphe Funktion*** in einem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist ein Paar (U, f), bestehend aus einer offenen Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und einer holomorphen Funktion f auf U. Zwei lokale Funktionen (U, f) und (V, g) in $\mathbf{z}_0$ werden äquivalent genannt, falls es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset U \cap V$ gibt, so dass $f|_W = g|_W$ ist. Die Äquivalenzklasse einer lokalen holomorphen Funktion (U, f) in $\mathbf{z}_0$ nennt man den ***Keim*** von f in $\mathbf{z}_0$. Man bezeichnet diesen Keim mit dem Symbol $f_{\mathbf{z}_0}$. Die Menge der holomorphen Funktionskeime in $\mathbf{z}_0$ wird mit $\mathscr{O}_{\mathbf{z}_0}$ bezeichnet.

Wegen des Identitätssatzes ist der Keim $f_{\mathbf{z}_0}$ eindeutig bestimmt durch die Potenzreihenentwicklung $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ eines beliebigen Repräsentanten in $\mathbf{z}_0$. Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt nur von den Koeffizienten und nicht vom Entwicklungspunkt ab. Deshalb kann $\mathscr{O}_{\mathbf{z}_0}$ mit dem lokalen Ring H_n identifiziert werden. Lediglich der identifizierende Isomorphismus hängt vom Punkt ab.

Ein ***Pseudopolynom*** vom Grad s über einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist eine holomorphe Funktion ω auf $G \times \mathbb{C}$, die durch einen Ausdruck

$$\omega(\mathbf{z}, u) = u^s + h_1(\mathbf{z}) u^{s-1} + \cdots + h_s(\mathbf{z})$$

mit $h_1, \ldots, h_s \in \mathscr{O}(G)$ gegeben ist, also ein Element von $\mathscr{O}(G)^0[u]$.

Bekanntlich ist $R := \mathscr{O}(G)$ ein Integritätsbereich. Mit Q bezeichnen wir den Quotientenkörper von R. Die Gruppe $Q[u]^\times$ der Einheiten im Integritätsbereich $Q[u]$ besteht aus den Polynomen $\neq 0$ vom Grad 0. Ist $R^* = R \setminus \{0\}$ die multiplikative Untergruppe der nirgends identisch verschwindenden holomorphen Funktionen auf G, so ist $Q[u]^\times \cap R = R^*$.

4.18. Satz

Sind $\omega_1, \omega_2 \in Q\big(\mathscr{O}(G)\big)^0[u]$ Pseudopolynome mit $\omega_1\omega_2 \in \mathscr{O}(G)^0[u]$, so liegen ω_1 und ω_2 in $\mathscr{O}(G)^0[u]$, d.h., $\mathscr{O}(G)$ erfüllt die Voraussetzungen des Gauß'schen Lemmas.

Beweis: Zur Abkürzung sei $R = \mathscr{O}(G)$ und $Q = Q(R)$.

Ist $\omega = u^s + (f_1/g_1)u^{s-1} + \cdots + (f_s/g_s)$ ein beliebiges Element von $Q^0[u]$, so liegen die g_i in R^*. Wegen des Identitätssatzes sind auch für alle $\mathbf{z} \in G$ die Keime $g_{i,\mathbf{z}} \neq 0$.

Für einen Augenblick lassen wir den Index i weg. Ist der Quotient von $f_\mathbf{z}$ und $g_\mathbf{z}$ holomorph, also $f_\mathbf{z} = h_\mathbf{z} \cdot g_\mathbf{z}$ mit $h_\mathbf{z} \in \mathscr{O}_\mathbf{z}$, so ist $h_\mathbf{z}$ eindeutig bestimmt, und es gibt eine Kugel B um $\mathbf{z}$ in G, so dass $h_\mathbf{z}$ durch eine holomorphe Funktion h auf B repräsentiert wird und die Gleichung $f = h \cdot g$ auf ganz B gilt. Ist der Quotient von $f_\mathbf{z}$ und $g_\mathbf{z}$ für jedes $\mathbf{z}$ holomorph, so wird durch $\mathbf{z} \mapsto h_\mathbf{z}(\mathbf{z})$ eine globale holomorphe Funktion h auf G definiert. Wir können $h = f/g$ schreiben.

Liegt also $\omega_\mathbf{z} := u^s + ((f_1)_\mathbf{z}/(g_1)_\mathbf{z})u^{s-1} + \cdots + ((f_s)_\mathbf{z}/(g_s)_\mathbf{z})$ für jedes $\mathbf{z} \in G$ in $\mathscr{O}^0_\mathbf{z}[u]$, so ist $\omega \in R^0[u]$.

Jetzt wenden wir das Gauß'sche Lemma in jedem der faktoriellen Ringe $\mathscr{O}_\mathbf{z} \cong H_n$ an. Sei $\omega := \omega_1\omega_2$. Dann ist $(\omega_1)_\mathbf{z} \cdot (\omega_2)_\mathbf{z} = \omega_\mathbf{z} \in \mathscr{O}^0_\mathbf{z}[u]$ in jedem $\mathbf{z} \in G$. Also sind die Koeffizienten der $(\omega_i)_\mathbf{z}$ holomorph, und nach den obigen Bemerkungen bedeutet das, dass die ω_i in $R^0[u]$ liegen. ∎

4.19. Folgerung

Ist $G \in \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, so ist $\mathscr{O}(G)^0[u]$ eine „faktorielle Halbgruppe“, d.h., jedes Element ist Produkt endlich vieler Primelemente und jedes irreduzible Element ist prim.

Sei wieder $R = \mathscr{O}(G)$ und $Q = Q(R)$. Sind ω_1, ω_2 Pseudopolynome in $R^0[u]$, so gibt es eine Linearkombination $\omega_0 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \neq 0$ in $Q[u]$ mit minimalem Grad. Das ist ein größter gemeinsamer Teiler von ω_1 und ω_2 in $Q[u]$. Multipliziert man mit dem Produkt h der Nenner der Koeffizienten von r_1 und r_2, so erhält man einen größten gemeinsamen Teiler von ω_1 und ω_2 in $Q[u]$, der zudem Linearkombination von ω_1 und ω_2 in $R[u]$ ist.

4.20. Satz

f und g seien holomorphe Funktionen in der Nähe eines Punktes $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$. Sind die Keime $f_{\mathbf{z}_0}, g_{\mathbf{z}_0}$ in $\mathscr{O}_{\mathbf{z}_0}$ teilerfremd, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$, so dass für jedes $\mathbf{z} \in U$ die Keime $f_\mathbf{z}$ und $g_\mathbf{z}$ in $\mathscr{O}_\mathbf{z}$ teilerfremd sind.

BEWEIS: Wir können annehmen, dass $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ ist und $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ Weierstraßpolynome (in z_n) sind. Da $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ in H_n teilerfremd sind, sind sie es auch in $H^0_{n-1}[z_n]$. Ist Q der Quotientenkörper von H_{n-1}, so folgt aus dem Gauß'schen Lemma, dass $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ teilerfremd in $Q[z_n]$ sind.

Wir können den größten gemeinsamen Teiler $h \in (H_{n-1})^*$ von $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ als Linearkombination

$$h = a \cdot f_\mathbf{0} + b \cdot g_\mathbf{0}$$

darstellen, wobei $a, b \in H_{n-1}[z_n]$ sind. Ist $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ eine genügend kleine Umgebung des Ursprungs, so konvergieren die Potenzreihen a, b gegen Pseudopolynome über U' und h gegen eine holomorphe Funktion auf U', die nicht identisch verschwindet.

Sei nun $\mathbf{w} = (\mathbf{w}', w_n)$ ein Punkt von U. Ist $\varphi_\mathbf{w}$ ein gemeinsamer Teiler von $f_\mathbf{w}$ und $g_\mathbf{w}$, so teilt dieser $h_\mathbf{w}$, ein Polynom vom Grad 0 (als Polynom in z_n). Also hängt $\varphi_\mathbf{w}$ nicht von z_n ab. Da $\varphi_\mathbf{w}$ nicht identisch verschwindet, muss es das Produkt einer Einheit und eines Weierstraßpolynoms vom Grad 0 sein. Dann ist aber $\varphi_\mathbf{w}$ selbst eine Einheit, und $f_\mathbf{w}$ und $g_\mathbf{w}$ sind teilerfremd. ∎

Ist $\omega \in \mathscr{O}(G)^0[u]$ ein Pseudopolynom von positivem Grad, so gibt es eine eindeutige Primfaktorzerlegung $\omega = \omega_1 \cdots \omega_l$. Der Grad jedes einzelnen ω_i ist positiv. Wir sagen, ω ist ein ***Pseudopolynom ohne mehrfache Faktoren***, falls die ω_i alle paarweise verschieden sind.

Die ***(algebraische) Ableitung*** eines Pseudopolynoms ist wie folgt definiert:

$$\text{Ist } \omega = \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu u^\nu, \text{ so ist } D(\omega) := \sum_{\nu=1}^{s} \nu \cdot a_\nu \cdot u^{\nu-1} \text{ (also } D(\omega) = \frac{\partial\omega}{\partial u}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D(\omega_1 + \omega_2) &= D(\omega_1) + D(\omega_2), \\ D(\omega_1 \cdot \omega_2) &= D(\omega_1) \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot D(\omega_2). \end{aligned}$$

4.21. Satz

Ein Element $\omega \in \mathscr{O}(G)^0[u]$ besitzt genau dann keine mehrfachen Faktoren, wenn ein größter gemeinsamer Teiler von ω und $D(\omega)$ eine Funktion $h \in \mathscr{O}(G) \setminus \{0\}$ ist.

BEWEIS: Wie üblich sei $R = \mathscr{O}(G)$ und $Q = Q(R)$. Hat ω das irreduzible Pseudopolynom ω_i als mehrfachen Faktor, so ist auch $D(\omega)$ durch ω_i teilbar. Das gilt auch in $Q[u]$. Also kann ein größter gemeinsamer Teiler keine Funktion $h \in R^*$ sein.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $\omega = \prod_i \omega_i$ keine mehrfachen Faktoren besitzt! Es ist

$$D(\omega) = \sum_i \omega_1 \cdots D(\omega_i) \cdots \omega_l.$$

Wenn der Grad des größten gemeinsamen Teilers γ von ω und $D(\omega)$ positiv ist, dann ist γ ein Produkt gewisser ω_i. Also teilt mindestens ein ω_i sowohl ω als auch $D(\omega)$. Aber dann teilt ω_i das Produkt $\omega_1 \cdots D(\omega_i) \cdots \omega_l$ und daher $D(\omega_i)$. Das ist aber unmöglich, denn $D(\omega_i)$ hat niedrigeren Grad. Also muss der Grad des größten gemeinsamen Teilers 0 sein, d.h., er ist eine Funktion $h \in R^*$. ∎

Wir wollen jetzt die Geometrie analytischer Hyperflächen genauer studieren. Lokal und nach einer geeigneten Koordinatentransformation können wir annehmen, dass die Hyperfläche A die Nullstellenmenge eines Pseudopolynoms ω über einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist. Wir nehmen ferner an, dass der Nullpunkt in G liegt und dass $\omega = \omega(\mathbf{z}, u) \in \mathscr{O}(G)^0[u]$ im Nullpunkt u-allgemein ist. Verkleinert man G notfalls, so kann man erreichen, dass es eine Scheibe $D = \{u \in \mathbb{C} : |u| < r\}$ gibt, so dass $A \cap (G \times \partial D) = \varnothing$ ist. Dann liegen alle Nullstellen von ω in $G \times \mathbb{C}$ bereits in $G \times D$ (vgl. die Bemerkung am Ende des vorigen Paragraphen).

Wir können ω in Primfaktoren zerlegen. Da jede Potenz eines Primfaktors in den gleichen Punkten wie der Primfaktor selbst verschwindet, können wir annehmen, daß ω keine mehrfachen Faktoren besitzt. Die Diskriminante Δ_ω ist eine holomorphe Funktion auf G, deren Nullstellenmenge wir mit D_ω bezeichnen. Besitzt ω keine mehrfachen Faktoren, so gibt es eine Linearkombination h von ω und $D(\omega)$ in $\mathscr{O}(G)^*$. Da $h \neq 0$ ist, gibt es mindestens einen Punkt $\mathbf{z} \in G$ mit $h(\mathbf{z}) \neq 0$, und dann ist der größte gemeinsame Teiler der Polynome $\omega(\mathbf{z}, u)$ und $D(\omega)(\mathbf{z}, u)$ in $\mathbb{C}[u]$ offensichtlich $= 1$. Das bedeutet, dass $\omega(\mathbf{z}, u)$ keine mehrfachen Faktoren besitzt, dass also alle Nullstellen verschieden sind. Damit ist $\Delta_\omega(\mathbf{z}) \neq 0$ und D_ω nirgends dicht.

4.22. Satz (über verzweigte Überlagerungen)

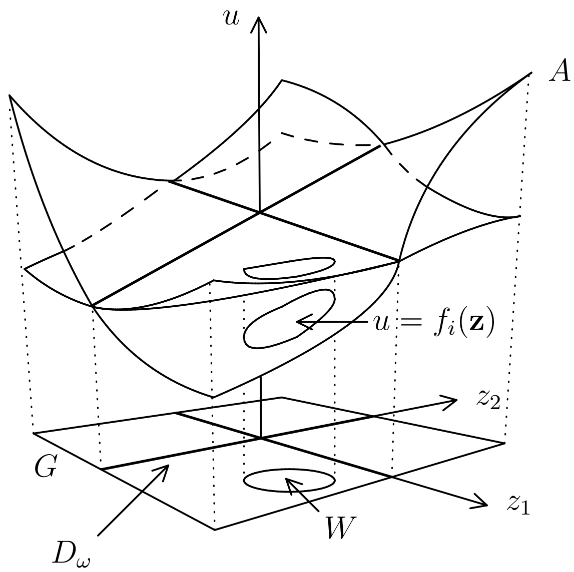
Unter den beschriebenen Voraussetzungen gilt:

Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus D_\omega$, so gibt es eine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset G \setminus D_\omega$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ auf W mit $f_i(\mathbf{z}) \neq f_j(\mathbf{z})$ für $i \neq j$ und $\mathbf{z} \in W$, so dass gilt:

$$\omega(\mathbf{z}, u) = (u - f_1(\mathbf{z})) \cdots (u - f_s(\mathbf{z})) \ \text{ in } W \times \mathbb{C}.$$

Über jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in D_\omega$ liegen weniger als s Punkte.

Bemerkung: Ein Punkt $\mathbf{z} \in G$, über dem weniger als s Punkte liegen, wird ***Verzweigungspunkt*** genannt. Alle Punkte der Diskriminantenmenge D_ω sind Verzweigungspunkte. Über allen anderen Punkten ist A lokal die Vereinigung disjunkter Graphen holomorpher Funktionen und daher dort regulär. Man nennt A dort auch *unverzweigt*.



BEWEIS: Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus D_\omega$, so hat das Polynom $\omega(\mathbf{z}_0, u)$ genau s verschiedene Nullstellen. Wir schreiben $\omega(\mathbf{z}_0, u) = (u - c_1) \cdots (u - c_s)$, wobei die c_i alle verschieden sind. Ist $\omega(\mathbf{z}, u) = u^s + h_1(\mathbf{z})u^{s-1} + \cdots + h_s(\mathbf{z})$, dann besitzt der Keim

$$\omega_{\mathbf{z}_0} := u^s + (h_1)_{\mathbf{z}_0} u^{s-1} + \cdots + (h_s)_{\mathbf{z}_0} \in H_n[u]$$

nach dem Hensel'schen Lemma eine Zerlegung $\omega_{\mathbf{z}_0} = \omega_{1,\mathbf{z}_0} \cdots \omega_{s,\mathbf{z}_0}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\omega_{i,\mathbf{z}_0}(\mathbf{z}_0, u) = u - c_i$ für $i = 1, \ldots, s$.
2. $\deg(\omega_{i,\mathbf{z}_0}) = 1$.

Dabei ist $\omega_{i,\mathbf{z}_0} = u - r_i$, mit $r_i \in H_n$. Es gibt eine zusammenhängende Umgebung $W(\mathbf{z}_0) \subset G \setminus D_\omega$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ auf W, so dass die r_i gegen f_i konvergieren. Da die Keime von ω und $(u - f_1) \cdots (u - f_s)$ in $\mathbf{z}_0$ übereinstimmen, folgt aus dem Identitätssatz:

$$\omega|_{W \times \mathbb{C}} = (u - f_1) \cdots (u - f_s).$$

Da $W \subset G \setminus D_\omega$ ist, folgt: $f_i(\mathbf{z}) \neq f_j(\mathbf{z})$ für $i \neq j$ und $\mathbf{z} \in W$.

Über jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in D_\omega$ hat $\omega(\mathbf{z}_0, u)$ mehrfache Faktoren. Also besteht $N(\omega) \cap (\{\mathbf{z}_0\} \times \mathbb{C})$ aus weniger als s Punkten. ∎

4.23. Beispiele

A. Sei $G = \mathbb{C}$ und $\omega = z_1^2 - z_2$. Dann ist die Diskriminante gegeben durch $\Delta_\omega(z_2) = 4z_2$ und daher $D_\omega = \{0\} \subset \mathbb{C}$. Zu jedem Punkt $z_2 \in \mathbb{C}^*$ gibt es eine Umgebung $W \subset \mathbb{C} - D_\omega$, wo $\sqrt{z_2}$ wohl-definiert ist. Dort ist dann $\omega = (z_1 - \sqrt{z_2}) \cdot (z_1 + \sqrt{z_2})$. Das ergibt eine Fläche über $\mathbb{C}$, die eine zusammenhängende unverzweigte 2-blättrige Überlagerung über $\mathbb{C} - \{0\}$ darstellt. Der Nullpunkt ist ein Verzweigungspunkt. So erhalten wir die *(verzweigte) Riemannsche Fläche* von $\sqrt{z}$.

B. Eine völlig andere Situation ergibt sich im Falle des Pseudopolynoms $\omega = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2) \cdot (z_1 + z_2)$. Die Diskriminante ist in diesem Falle die Funktion $4z_2^2$, und die Diskriminantenmenge D_ω ist wieder der Ursprung in $\mathbb{C}$. Die Menge $A = N(\omega)$ besteht aus zwei Blättern, die sich über dem Nullpunkt treffen und die biholomorph auf $\mathbb{C}$ projiziert werden. Die Menge $A \setminus \{\mathbf{0}\}$, also die Menge der unverzweigten Punkte von A, ist nicht mehr zusammenhängend.

Im Grunde werden durch diese beiden Beispiele schon alle typischen Fälle beschrieben.

4.24. Nullstellensatz für Hyperflächen

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine Hyperfläche, also eine analytische Teilmenge, die lokal immer durch eine Gleichung beschrieben werden kann.

1. *Zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in A$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und eine Funktion $f \in \mathscr{O}(U)$, so dass gilt:*
   (a) $U \cap A = \{\mathbf{z} \in U \,:\, f(\mathbf{z}) = 0\}$.
   (b) *Ist $\mathbf{w}_0 \in U \cap A$ und h eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung $V = V(\mathbf{w}_0) \subset U$ mit $h|_A = 0$, so gibt es eine Umgebung $W = W(\mathbf{w}_0) \subset V$ und eine holomorphe Funktion q auf W, so dass $h|_W = q \cdot (f|_W)$ ist.*
2. *Ist $\widetilde{f}$ irgend eine andere holomorphe Funktion auf U mit*
$$\{\mathbf{z} \in U \,:\, \widetilde{f}(\mathbf{z}) = 0\} = U \cap A,$$
so gibt es für jeden Punkt $\mathbf{w}_0 \in U \cap A$ und jede holomorphe Funktion h auf einer Umgebung $V = V(\mathbf{w}_0) \subset U$ mit $h|_A = 0$ eine Umgebung $W = W(\mathbf{w}_0) \subset V$, eine holomorphe Funktion $\widetilde{q}$ auf W und ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $h^k|_W = \widetilde{q} \cdot (\widetilde{f}|_W)$ ist. Ist $\widetilde{f}$ in $\mathbf{w}_0$ prim, so kann man $k = 1$ wählen.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ ist. Dann betrachten wir eine beliebige Funktion $\widetilde{f}$ nahe $\mathbf{0}$, deren Nullstellenmenge gerade A ist. Nach Wahl geeigneter Koordinaten können wir eine Einheit e und ein Weierstraßpolynom $\widetilde{\omega}$ in z_n finden, so dass $\widetilde{f} = e \cdot \widetilde{\omega}$ nahe $\mathbf{0}$ ist. Wir wählen eine Umgebung $U = U' \times U''$ des Ursprungs, so dass gilt:

1. $A \cap U = \{(\mathbf{z}', z_n) \in U \,:\, \widetilde{\omega}(\mathbf{z}', z_n) = 0\}$.
2. Es gibt eine Primfaktorzerlegung $\widetilde{\omega} = \omega_1^{k_1} \cdots \omega_l^{k_l}$ auf U.

Wir setzen $\omega := \omega_1 \cdots \omega_l$. Das ist ein Pseudopolynom ohne mehrfache Faktoren über U', das ebenfalls A als Nullstellenmenge hat. Wir können annehmen, dass $A \cap U$ eine l-blättrige verzweigte Überlagerung über U' ist.

Sei nun $\mathbf{w}_0 \in A \cap U$ und h eine holomorphe Funktion, die in einer Umgebung $V = V' \times V'' \subset U$ auf A verschwindet. Wir können annehmen, dass $A \cap (V' \times \partial V'') = \varnothing$ ist. Dann ist $A \cap (V' \times V'')$ eine s-blättrige Überlagerung über V' ($1 \le s \le l$), die über $V' \setminus D_\omega$ unverzweigt ist.

Sei $\mathbf{z}' \in V' \setminus D_\omega$. Sind $\alpha_1(\mathbf{z}'), \dots, \alpha_s(\mathbf{z}')$ die Nullstellen von ω über $\mathbf{z}'$ in V, so müssen dies auch Nullstellen von h sein. Sei

$$F(\mathbf{z}', z_n) := \prod_{j=1}^{s} \big(z_n - \alpha_j(\mathbf{z}')\big) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \sigma_i\big(\alpha_1(\mathbf{z}'), \dots, \alpha_s(\mathbf{z}')\big) z_n^{s-i}.$$

Dies ist ein Pseudopolynom über $V' \setminus D_\omega$. Da die Wurzeln über V' beschränkt bleiben, gilt dies auch für die Koeffizienten. Deshalb kann F holomorph auf ganz V fortgesetzt werden. F und ω unterscheiden sich auf V nur um eine Einheit, und offensichtlich muss F ein Teiler von h sein. Also ist auch $f := \omega$ ein Teiler von h. Es sei $h = q \cdot f$.

Sei nun $k := \max(k_1, \dots, k_l)$. Dann ist $h^k = f^k \cdot q^k$. Ist $f^k = \widetilde{f} \cdot p$, so ist $h^k = \widetilde{f} \cdot (p \cdot q^k)$. Das ergibt den zweiten Teil des Satzes. ∎

Die Funktion f aus dem ersten Teil des Satzes nennen wir eine ***minimale definierende Funktion*** für A.