§ 3 Holomorphe Abbildungen

Definition

Eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt ***(reell) differenzierbar*** in $\mathbf{z}_0$, falls es Abbildungen $\Delta', \Delta'' : B \to \mathbb{C}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Δ' und Δ'' sind stetig in $\mathbf{z}_0$.
2. $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta'(\mathbf{z})^\top + (\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{z}}_0) \cdot \Delta''(\mathbf{z})^\top$ for $\mathbf{z} \in B$.

Die Werte $\Delta'(\mathbf{z}_0)$ und $\Delta''(\mathbf{z}_0)$ sind eindeutig bestimmt. Die Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta'(\mathbf{z}_0)^\top$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta''(\mathbf{z}_0)^\top$$

werden die ***Wirtinger-Ableitungen*** von f in $\mathbf{z}_0$ genannt.

Bemerkung: Ist f reell differenzierbar in $\mathbf{z}_0$, so setzen wir

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}) &:= \mathbf{w} \cdot \Delta'(\mathbf{z}_0)^\top + \overline{\mathbf{w}} \cdot \Delta''(\mathbf{z}_0)^\top \\ \text{und} \quad r(\mathbf{w}) &:= \mathbf{w} \cdot (\Delta'(\mathbf{z}_0 + \mathbf{w}) - \Delta'(\mathbf{z}_0))^\top + \overline{\mathbf{w}} \cdot (\Delta''(\mathbf{z}_0 + \mathbf{w}) - \Delta''(\mathbf{z}_0))^\top. \end{aligned}$$

Dann ist $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\mathbb{R}$-linear,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= f(\mathbf{z}_0) + L(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + r(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0), \\ \text{und} \quad |r(\mathbf{w})|/\|\mathbf{w}\| &\le \|\Delta'(\mathbf{z}_0 + \mathbf{w}) - \Delta'(\mathbf{z}_0)\| + \|\Delta''(\mathbf{z}_0 + \mathbf{w}) - \Delta''(\mathbf{z}_0)\| \end{aligned}$$

strebt für $\mathbf{w} \to \mathbf{0}$ gegen Null. Also ist f tatsächlich in $\mathbf{z}_0$ reell differenzierbar im klassischen Sinn, und

$$f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) = L(\mathbf{e}_\nu) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) + f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0), \text{ sowie } f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0) = L(\mathrm{i}\,\mathbf{e}_\nu) = \mathrm{i}\,(f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) - f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0)).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{2}(f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) - \mathrm{i}\,f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0)), \\ f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{2}(f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) + \mathrm{i}\,f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0)). \end{aligned}$$

Durch

$$\nabla f := (f_{z_1}, \ldots, f_{z_n}) \quad \text{und} \quad \overline{\nabla} f := (f_{\overline{z}_1}, \ldots, f_{\overline{z}_n})$$

wird der ***holomorphe*** bzw. ***antiholomorphe Gradient*** definiert.

3.1. Theorem

Eine reell stetig differenzierbare Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}) \equiv 0$ auf B ist, für $\nu = 1, \ldots, n$.

Beweis: (a) Ist f holomorph, so ist f in jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ komplex differenzierbar. Vergleicht man die beiden Darstellungen

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^\top$$

und

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta'(\mathbf{z})^\top + (\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{z}}_0) \cdot \Delta''(\mathbf{z})^\top,$$

so sieht man, dass $\Delta'(\mathbf{z}_0) = \Delta(\mathbf{z}_0)$ und $\Delta''(\mathbf{z}_0) = 0$ ist. Die zweite Gleichung bedeutet, dass $f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ ist.

(b) Ist $f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}) \equiv 0$, so ist f in jeder Variablen holomorph und daher überhaupt holomorph. ∎

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{C}^m$$

heißt ***holomorph*** (bzw. ***reell differenzierbar***), falls alle Komponenten f_i holomorph (bzw. reell differenzierbar) ist.

3.2. Satz

Die Abbildung $\mathbf{f} : B \to \mathbb{C}^m$ ist genau dann holomorph, wenn zu jedem $\mathbf{z}_0 \in B$ eine Abbildung $\Delta : B \to M_{m,n}(\mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. *Δ ist stetig in $\mathbf{z}_0$.*
2. *$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^\top$, for $\mathbf{z} \in B$.*

Der Wert $\Delta(\mathbf{z}_0)$ ist eindeutig bestimmt.

Auf den Beweis soll hier verzichtet werden.

Definition

Ist $\mathbf{f} : B \to \mathbb{C}^m$ holomorph, so nennt man $J_\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) := \Delta(\mathbf{z}_0)$ die ***komplexe Jacobi-Matrix*** von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{z}_0$. Die zugehörige lineare Abbildung $\mathbf{f}'(\mathbf{z}_0) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ nennt man die ***(komplexe) Ableitung*** von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{z}_0$. Sie ist gegeben durch

$$\mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot J_\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)^\top.$$

Explizit ist

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} (f_1)_{z_1}(\mathbf{z}) & \cdots & (f_1)_{z_n}(\mathbf{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_m)_{z_1}(\mathbf{z}) & \cdots & (f_m)_{z_n}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Definition

Ist $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathsf{i}\,\mathbf{h} : B \to \mathbb{C}^m$ eine differenzierbare Abbildung, dann ist die ***reelle Jacobi-Matrix*** $J_{\mathbb{R},\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0) \in M_{2m,2n}(\mathbb{R})$ die reelle Matrix, die der reell linearen Abbildung

$$(D\mathbf{g}(\mathbf{z}_0), D\mathbf{h}(\mathbf{z}_0)) : \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$$

zugeordnet ist.

Die reelle Jacobi-Matrix von $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathsf{i}\,\mathbf{h}$ ist gegeben durch

$$J_{\mathbb{R},\mathbf{f}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} (g_1)_{x_1} & \cdots & (g_1)_{x_n} & (g_1)_{y_1} & \cdots & (g_1)_{y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & \cdots & (g_m)_{x_n} & (g_m)_{y_1} & \cdots & (g_m)_{y_n} \\ \hline (h_1)_{x_1} & \cdots & (h_1)_{x_n} & (h_1)_{y_1} & \cdots & (h_1)_{y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (h_m)_{x_1} & \cdots & (h_m)_{x_n} & (h_m)_{y_1} & \cdots & (h_m)_{y_n} \end{array}\right).$$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $D\mathbf{f}(\mathbf{z}) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist definiert durch $D\mathbf{f}(\mathbf{z}) := D\mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathsf{i}\, D\mathbf{h}(\mathbf{z})$.

3.3. Satz

Eine differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathsf{i}\,\mathbf{h} : B \to \mathbb{C}^m$ ist genau dann holomorph, wenn $D\mathbf{f}(\mathbf{z})$ für jedes $\mathbf{z} \in B$ $\mathbb{C}$-linear ist.

Ist $\mathbf{f}$ holomorph und $n = m$, so ist $\det(J_{\mathbb{R},\mathbf{f}}(\mathbf{z})) = |\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z})|^2$.

BEWEIS: Die Abbildung $\mathbf{f}$ ist genau dann holomorph, wenn $(\overline{\partial}\mathbf{f})_{\mathbf{z}} = 0$ für jedes $\mathbf{z}$ gilt. Dann ist $D\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (\partial\mathbf{f})_{\mathbf{z}}$ komplex linear. In diesem Fall haben wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$(g_\mu)_{x_\nu} = (h_\mu)_{y_\nu} \text{ und } (h_\mu)_{x_\nu} = -(g_\mu)_{x_\nu},$$

und deshalb

$$(f_\mu)_{z_\nu} = (f_\mu)_{x_\nu} = (g_\mu)_{x_\nu} + \mathsf{i}\,(h_\mu)_{x_\nu}, \text{ for } \mu = 1, \ldots, m \text{ und } \nu = 1, \ldots, n.$$

Ist $n = m$, so ist $J_{\mathbb{R},\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit $B = -C$ und $A = D$, und $J_{\mathbf{f}} = A + \mathsf{i}\,C$.

Mit elementaren Transformationen erhält man

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} A + \mathrm{i}\,C & -C + \mathrm{i}\,A \\ C & A \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} A + \mathrm{i}\,C & 0 \\ C & A - \mathrm{i}\,C \end{pmatrix} \\
&= |\det(A + \mathrm{i}\,C)|^2.
\end{aligned}$$

∎

Also sind holomorphe Abbildungen orientierungserhaltend!

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge, $\mathbf{f} : B \to \mathbb{C}^m$ eine differenzierbare Abbildung und g eine komplexwertige differenzierbare Funktion, die auf dem Bild von $\mathbf{f}$ definiert ist. Dann ist $g \circ \mathbf{f} : B \to \mathbb{C}$ differenzierbar, und es gilt:

3.4. Komplexe Kettenregel

$$\begin{aligned}
(g \circ \mathbf{f})_{z_\nu} &= \sum_{\mu=1}^{m} (g_{w_\mu} \circ \mathbf{f}) \cdot (f_\mu)_{z_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} (g_{\overline{w}_\mu} \circ \mathbf{f}) \cdot (\overline{f}_\mu)_{z_\nu}, \\
(g \circ \mathbf{f})_{\overline{z}_\nu} &= \sum_{\mu=1}^{m} (g_{w_\mu} \circ \mathbf{f}) \cdot (f_\mu)_{\overline{z}_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} (g_{\overline{w}_\mu} \circ \mathbf{f}) \cdot (\overline{f}_\mu)_{\overline{z}_\nu}.
\end{aligned}$$

Man kann den bekannten Beweis für die Kettenregel aus der reellen Analysis benutzen, indem man z_ν und $\overline{z}_\nu$ als unabhängige Variablen auffasst.

3.5. Folgerung

Sind $\mathbf{f}$ *und* g *holomorph, so ist*

$$\begin{aligned}
& (g \circ \mathbf{f})_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}) \equiv 0 \quad \textit{(d.h. } g \circ \mathbf{f} \textit{ ist holomorph)} \\
\textit{und} \quad & (g \circ \mathbf{f})_{z_\nu}(\mathbf{z}) = \sum_{\mu=1}^{m} g_{w_\mu}(\mathbf{f}(\mathbf{z})) \cdot (f_\mu)_{z_\nu}(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann als

$$\nabla(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{z}) = \nabla g(\mathbf{f}(\mathbf{z})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$$

abgekürzt werden.

3.6. Satz über inverse Abbildungen

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathbf{f} : B \to \mathbb{C}^n$ holomorph, $\mathbf{z}_0 \in B$ und $\mathbf{w}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Es gibt offene Umgebungen $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$ und $V = V(\mathbf{w}_0) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $\mathbf{f} : U \to V$ biholomorph ist.*
2. $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0) \neq 0$.

BEWEIS: a) Ist $\mathbf{f}|_U : U \to V$ biholomorph, so ist $(\mathbf{f}|_U)^{-1} \circ \mathbf{f} = \mathrm{id}_U$ und

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(J_{(\mathbf{f}|_U)^{-1}}(\mathbf{w}_0) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) = \det(J_{(\mathbf{f}|_U)^{-1}}(\mathbf{w}_0)) \cdot \det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)),$$

und deshalb $\det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$.

b) Ähnlich wie im Falle einer Veränderlichen kann man zeigen, dass für die reelle Funktionalmatrix gilt:

$$\det(J_{\mathbb{R},\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) = |\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)|^2.$$

Ist also $\det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$, so ist auch $\det(J_{\mathbb{R},\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$. Dann folgt aus der reellen Analysis, dass es offene Umgebungen $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B_1$ und $V = V(\mathbf{w}_0) \subset B_2$ gibt, so dass $\mathbf{f}|_U : U \to V$ bijektiv und $\mathbf{g} := (\mathbf{f}|_U)^{-1} : V \to U$ eine stetig reell differenzierbare Abbildung ist. Außerdem kann man annehmen, dass $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$ ist. Aber $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathrm{id}_V$ ist holomorph. Ist $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ und $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, so folgt:

$$0 = (f_\nu \circ \mathbf{g})_{\overline{w}_\mu} = \sum_{\lambda=1}^{n} ((f_\nu)_{z_\lambda} \circ \mathbf{g}) \cdot (g_\lambda)_{\overline{w}_\mu}, \text{ für } \nu, \mu = 1, \ldots, n.$$

In der Sprache der Matrizen bedeutet das:

$$\mathbf{0} = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{w})) \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla} g_1(\mathbf{w}) \\ \vdots \\ \overline{\nabla} g_n(\mathbf{w}) \end{pmatrix}, \text{ für } \mathbf{w} \in V.$$

Da $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{w}))$ invertierbar für jedes $\mathbf{w} \in V$ ist, ist $\overline{\nabla} g_\lambda(\mathbf{w}) = 0$ für jedes λ. Deshalb ist $\mathbf{g}$ holomorph auf V. ∎

3.7. Satz über implizite Funktionen

Sei $B \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ offen, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{C}^m$ holomorph und $(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) \in B$ ein Punkt mit $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) = 0$ und

$$\det \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu = 1, \ldots, m \\ \nu = n+1, \ldots, n+m \end{array} \right) \neq 0.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U' \times U'' \subset B$ und eine holomorphe Abbildung $\mathbf{g} : U' \to U''$, so dass gilt:

$$\{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in U' \times U'' \,:\, \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{g}(\mathbf{z})) \,:\, \mathbf{z} \in U'\}.$$

Der Beweis wird wie im Reellen geführt.

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ ein beliebiger Bereich und $U \subset B$ offen. Sind $f_1, \ldots, f_q$ holomorphe Funktionen auf U, so bezeichnet man ihre gemeinsame Nullstellenmenge mit

$$N(f_1, \ldots, f_q) = \{\mathbf{z} \in U \,:\, f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_q(\mathbf{z}) = 0\}.$$

Definition

Eine Teilmenge $A \subset B$ heißt ***analytisch***, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf U gibt, so dass $U \cap A = N(f_1, \ldots, f_q)$ ist.

Ist $\mathbf{z}_0$ ein Punkt in $B \setminus A$, so können wir eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf U wählen, so dass $U \cap A = N(f_1, \ldots, f_n)$ und

$$\mathbf{z}_0 \in U' := U \setminus N(f_1, \ldots, f_q) \subset U \subset B$$

ist. Da die Nullstellenmenge $N(f_1, \ldots, f_q)$ in U abgeschlossen ist, ist $B \setminus A$ offen und A in B abgeschlossen. Deshalb hätte man eine analytische Menge in B auch als **abgeschlossene** Teilmenge $A \subset B$ definieren können, so dass es zu jedem $\mathbf{z}_0 \in A$ eine Umgebung U und Funktionen $f_1, \ldots, f_q \in \mathscr{O}(U)$ mit $A \cap U = N(f_1, \ldots, f_q)$ gibt.

Definition

Eine Teilmenge M eines Gebietes G heißt ***nirgends dicht*** in G, falls die abgeschlossene Hülle von M in G keine inneren Punkten besitzt.

Da eine analytische Menge $A \subset G$ in G abgeschlossen ist, ist sie nirgends dicht, falls in jeder Umgebung eines jeden Punktes $\mathbf{z} \in G$ Punkte liegen, die nicht zu A gehören.

3.8. Satz

Sei A eine analytische Menge in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$. Besitzt A einen inneren Punkt, so ist $A = G$. Ist A nirgends dicht in G, so ist $G \setminus A$ zusammenhängend.

Beweis: a) Wir nehmen zunächst an, dass $G = B$ eine Kugel ist und dass es holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf B mit $A = N(f_1, \ldots, f_q)$ gibt.

Ist $\mathbf{z}_0 \in B$ ein innerer Punkt von A, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f_1 = \ldots = f_q = 0$ auf $U_\varepsilon(\mathbf{z}_0)$ ist. Nach dem Identitätssatz verschwinden dann alle Funktionen f_i auf ganz B, und es ist $A = B$.

Ist dagegen A nirgends dicht in B und sind $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in B \setminus A$, so betrachten wir die komplexe Gerade L durch $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w}$. Da $L \cap B$ nicht in A liegt, trifft A das ebene Gebiet $L \cap B$ nur in isolierten Punkten, und $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w}$ können in $L \cap B \setminus A = L \cap (B \setminus A)$ miteinander verbunden werden. Also ist $B \setminus A$ zusammenhängend.

b) Sei jetzt G ein beliebiges Gebiet. Ist $\mathbf{z}_0 \in G$ ein innerer Punkt von A und $\mathbf{w}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt, so können wir diese Punkte durch einen stetigen Weg $\alpha : [0,1] \to G$ verbunden werden. Das kompakte Bild dieses Weges kann durch endlich viele Kugeln $B \subset G$ überdeckt werden, so dass jeweils $B \cap A$ die Nullstellenmenge von holomorphen Funktionen auf B ist. Sukzessive folgt, dass jede Kugel in A enthalten ist. Also ist $\mathbf{w}_0 \in A$ und deshalb $A = G$.

Ist A nirgends dicht in G, so betrachten wir $\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0 \in G \setminus A$ und benutzen wieder einen stetigen Verbindungsweg. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass jeder Punkt $\mathbf{z}$ in der ersten Kugel B, der kein Element von A ist, in $B \setminus A$ mit $\mathbf{z}_0$ verbunden werden kann. Sukzessive erhalten wir einen Weg zwischen $\mathbf{z}_0$ und $\mathbf{w}_0$ in $B \setminus A$. ■

Ist $n = 1$, so besteht eine nirgends dichte analytische Menge nur aus isolierten Punkten.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine echte analytische Teilmenge.

3.9. Riemann'scher Fortsetzungssatz

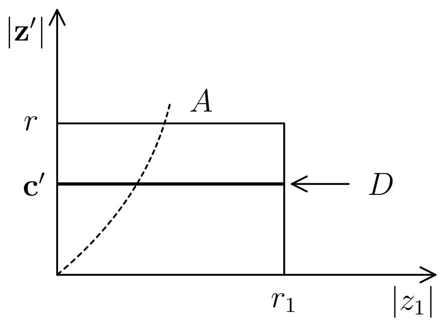
Ist f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus A$, die in der Nähe von A beschränkt ist, so kann f holomorph nach G fortgesetzt werden.

Beweis: Weil $A \neq G$ ist, ist A nirgends dicht in G. Sei $\mathbf{z}_0 \in A$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine komplexe Gerade L durch $\mathbf{z}_0$, die A in einer Umgebung von $\mathbf{z}_0$ nur in $\mathbf{z}_0$ schneidet.

Nach einer affin-linearen Koordinatentransformation können wir annehmen, dass $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ und $L = \mathbb{C}\mathbf{e}_1$ die z_1-Achse ist. Wir können einen Polyzylinder

$$P = \{\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \,:\, |z_1| < r_1, |\mathbf{z}'| < r\} \subset\subset G$$

finden, so dass $A \cap \{\mathbf{z} \,:\, |z_1| = r_1,\ |\mathbf{z}'| < r\}$ leer ist.



Für jedes $\mathbf{c}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $|\mathbf{c}'| < r$ ist die Menge $D = \{\mathbf{z} \,:\, |z_1| \le r_1 \text{ und } \mathbf{z}' = \mathbf{c}'\}$ eine 1-dimensionale Scheibe, so dass $D \cap A$ nur aus isolierten Punkten besteht, da sonst $D \subset A$ wäre. Nach dem klassischen Riemann'schen Hebbarkeitssatz in einer Variablen kann f zu einer Funktion $\widehat{f}(z_1, \mathbf{z}')$ fortgesetzt werden, die in z_1 holomorph ist. Über die Abhängigkeit von $\mathbf{z}'$ wird noch nichts ausgesagt. Die klassische Cauchy'sche Integralformel liefert

$$\widehat{f}(z_1, \mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta, \mathbf{z}')}{\zeta - z_1}\, d\zeta \text{ für } |z_1| < r_1 \text{ und } |\mathbf{z}'| < r.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist holomorph in $\mathbf{z}'$. Folglich ist die linke Seite reell differenzierbar in $\mathbf{z}'$, und da Integration und Differentiation nach $\overline{z}_i$ vertauscht werden können, ist $\widehat{f}$ holomorph auf P. Wenn wir das in jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in A$ ausführen, erhalten wir durch den Identitätssatz die gewünschte globale Fortsetzung von f nach G. ∎