§ 2 Das Cauchy-Integral

Wir wollen jetzt die Cauchys'che Integralformel in mehreren Veränderlichen formulieren.

Sei $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, $T = \mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, und f eine stetige Funktion auf T. Dann definiert

$$k_f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}) := \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{(1,\ldots,1)}} = \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}$$

eine stetige Funktion $k_f : P \times T \to \mathbb{C}$.

Definition

$$\begin{aligned} C_f(\mathbf{z}) &:= \left(\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\right)^n \int\limits_T k_f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})\, d\zeta \\ &:= \left(\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\right)^n \int\limits_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} f(\boldsymbol{\zeta}) \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)} \cdots \frac{d\zeta_n}{(\zeta_n - z_n)} \end{aligned}$$

nennt man das ***Cauchy-Integral*** von f über T.

Offensichtlich ist C_f eine stetige Funktion auf P.

2.1. Theorem (Cauchy'sche Integralformel)

Seien P, T wie oben gegeben, sowie $U = U(\overline{P})$ eine offene Umgebung von $\overline{P}$. Ist f schwach holomorph auf U, so ist $C_{f|T}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$ für jedes $\mathbf{z} \in P$.

Beweis: Ist $P = D_{r_1}(0) \times \cdots \times D_{r_n}(0)$, so können wir annehmen, dass $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ ist, mit offenen Umgebungen $U_i = U_i\Big(\overline{D_{r_i}(0)}\Big)$, für $i = 1, \ldots, n$.

Da f schwach holomorph ist, können wir ein $\mathbf{z}' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in U_1 \times \cdots \times U_{n-1}$ festhalten und die Cauchy'sche Integralformel in einer Variablen auf $\zeta_n \mapsto f(\mathbf{z}', \zeta_n)$ anwenden. Für $z_n \in D_{r_n}(0)$ folgt dann:

$$f(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n}\, d\zeta_n.$$

Genauso erhalten wir für die vorletzte Variable z_{n-1} und $\mathbf{z}'' = (z_1, \ldots, z_{n-2}) \in U_1 \times \cdots \times U_{n-2}$:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}'', z_{n-1}, z_n) &= \frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int\limits_{|\zeta_{n-1}|=r_{n-1}} \frac{f(\mathbf{z}'', \zeta_{n-1}, z_n)}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}}\, d\zeta_{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^2 \int\limits_{|\zeta_{n-1}|=r_{n-1}} \int\limits_{|z_n|=r_n} \frac{f(\mathbf{z}'', \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_n\, d\zeta_{n-1},
\end{aligned}
$$

und nach n Schritten erhält man $f(\mathbf{z}) = C_{f|T}(\mathbf{z})$, für $\mathbf{z} \in P$. ∎

2.2. Theorem (Potenzreihenentwicklung)

Sei $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r}) \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder und T sein ausgezeichneter Rand. Ist $f : T \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so gibt es eine Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$, die auf ganz P gegen $C_f(\mathbf{z})$ konvergiert.

Die Koeffizienten a_ν dieser Reihe sind durch

$$
a_{\nu_1 \cdots \nu_n} = \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^n \int\limits_T \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\zeta_1^{\nu_1+1} \cdots \zeta_n^{\nu_n+1}}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.
$$

gegeben.

Beweis: Wir setzen $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}_0^n$. Für $\mathbf{z} \in P$ und $\boldsymbol{\zeta} \in T$ folgt dann:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{\mathbf{1}}} &= \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \frac{1}{\zeta_1 \cdots \zeta_n \cdot \left(1 - \dfrac{z_1}{\zeta_1}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{z_n}{\zeta_n}\right)} \\
&= \frac{1}{\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{1}}} \cdot \sum_{\nu_1=0}^\infty \left(\frac{z_1}{\zeta_1}\right)^{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_n=0}^\infty \left(\frac{z_n}{\zeta_n}\right)^{\nu_n}.
\end{aligned}
$$

Ist $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, so gilt für festes $\mathbf{z} \in P$ und beliebiges $\boldsymbol{\zeta} \in T$:

$$
\left| \frac{z_j}{\zeta_j} \right| = q_j := \frac{|z_j|}{r_j} < 1, \text{ for } j = 1, \ldots, n.
$$

Da T kompakt und f stetig auf T ist, gibt es eine Konstante M mit $|f(\boldsymbol{\zeta})| \leq M$ auf T. Dann wird $\sum_{\nu \geq 0} \big(f(\boldsymbol{\zeta})/\boldsymbol{\zeta}^{\nu+\mathbf{1}}\big)\mathbf{z}^\nu$ auf T von der konvergenten Reihe $(M/\mathbf{r}^{\mathbf{1}}) \sum_{\nu \geq 0} \mathbf{q}^\nu$ majorisiert, wobei $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ ist. Deshalb konvergiert die Reihe auf T normal gegen $f(\boldsymbol{\zeta})/(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{\mathbf{1}}$. Wir können Summation und Integration vertauschen:

$$
C_f(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^n \int_T \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{\mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta} = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu,
$$

mit

$$
a_\nu := \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^n \int_T \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\boldsymbol{\zeta}^{\nu+\mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta}.
$$

Die Reihe konvergiert für jedes $\mathbf{z} \in P$. ∎

2.3. Satz von Osgood

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. *f ist holomorph.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist schwach holomorph.*

Beweis: Wir wissen schon, dass eine holomorphe Funktion f komplex differenzierbar ist, und es ist trivial, dass f dann schwach holomorph ist.

Sei umgekehrt $f : B \to \mathbb{C}$ schwach holomorph und $\mathbf{z}_0 \in B$ ein beliebiger Punkt. Es gibt einen kleinen Polyzylinder P um $\mathbf{z}_0$, der relativ kompakt in B liegt. Ist T sein ausgezeichneter Rand, so ist $f|_P = C_{f|T}$, und das Cauchy-Integral ist die Grenzfunktion einer Potenzreihe. Also ist f holomorph. ∎

Bemerkung: Darüber hinaus gilt: Ist f schwach holomorph auf B, $\mathbf{z}_0 \in B$ ein Punkt und $P \subset\subset B$ ein Polyzylinder um $\mathbf{z}_0$, so gibt es eine Potenzreihe $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$, die auf ganz P gegen f konvergiert.

2.4. Weierstraß'scher Konvergenzsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und (f_k) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f holomorph.

Beweis: Die Grenzfunktion ist stetig. Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Punkt, $P \subset\subset G$ ein Polyzylinder um $\mathbf{z}_0$ und T sein ausgezeichneter Rand. Dann gilt:

$$f|_P = \lim_{k \to \infty} f_k|_P = \lim_{k \to \infty} C_{f_k|T}.$$

Da T kompakt ist, kann man Integral und Grenzwert vertauschen. So gilt für jedes feste $\mathbf{z} \in P$:

$$\lim_{k \to \infty} C_{f_k|T}(\mathbf{z}) = C_{\lim\limits_{k \to \infty} f_k|T}(\mathbf{z}) = C_{f|T}(\mathbf{z}).$$

Da f auf T stetig ist, hat das Cauchy-Integral $C_{f|T}$ eine Potenzreihenentwicklung auf P. Deshalb ist f holomorph in $\mathbf{z}_0$. ∎

2.5. Satz

Sei $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine Potenzreihe und G ihr Konvergenzgebiet. Dann ist die Grenzfunktion f von $S(\mathbf{z})$ holomorph auf G, und die formale Ableitung

$$S_{z_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_j > 0}} a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j - 1} \cdots z_n^{\nu_n}$$

konvergiert gegen f_{z_j}. Insbesondere sind auch alle partiellen Ableitungen von f holomorph.

Beweis: Da $S(\mathbf{z})$ auf G kompakt konvergiert, ist f lokal gleichmäßiger Limes einer Folge von Polynomen. Aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt nun, dass f holomorph ist. Aber auch die formal abgeleitete Reihe $S_{z_j}(\mathbf{z})$ konvergiert auf G kompakt, und ihre Grenzfunktion g_j ist dann holomorph auf G. Wir müssen noch zeigen, dass $f_{z_j} = g_j$ ist.

Sei $\mathbf{z}_0$ ein beliebiger Punkt von G. Da G ein vollständiges Reinhardt'sches Gebiet ist, gibt es einen Polyzylinder P um den Ursprung mit $\mathbf{z}_0 \in P \subset\subset G$. Wir definieren

$$f^*(\mathbf{z}) := \int_0^{z_j} g_j(z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_n)\, d\zeta + f(z_1, \ldots, 0, \ldots, z_n).$$

Als Integrationsweg wählen wir die Verbindungsstrecke zwischen 0 und z_j in der z_j-Ebene. Dann ist f^* auf P definiert.

Sei $S(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\mathbf{z})$ die Entwicklung von S in homogene Polynome, mit $p_k(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu|=k} a_\nu \mathbf{z}^\nu$. Die p_k sind holomorphe Funktionen, mit

$$(p_k)_{z_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|\nu|=k \\ \nu_j>0}} a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j-1} \cdots z_n^{\nu_n},$$

und diese Reihen konvergieren auf dem oben benutzten kompakten Integrationsweg gleichmäßig gegen g_j. Deshalb können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{z}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{z_j} (p_k)_{z_j}(z_1, \ldots, \zeta, \ldots, z_n)\, d\zeta + p_k(z_1, \ldots, 0, \ldots, z_n) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\mathbf{z}) \;=\; f(\mathbf{z}), \text{ für } \mathbf{z} \in P. \end{aligned}$$

Also ist speziell $f_{z_j}(\mathbf{z}_0) = f^*_{z_j}(\mathbf{z}_0) = g_j(\mathbf{z}_0)$. ∎

2.6. Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar in G.

Ist $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ ein Multiindex, so setzen wir $\nu! := \nu_1! \cdots \nu_n!$ und

$$D^\nu f(\mathbf{z}_0) := \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(\mathbf{z}_0).$$

2.7. Identitätssatz für Potenzreihen

Seien $f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ *und* $g(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} b_\nu \mathbf{z}^\nu$ *zwei konvergente Potenzreihen in einer Umgebung* $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$. *Gibt es eine Umgebung* $V(\mathbf{0}) \subset U$ *mit* $f|_V = g|_V$, *so ist* $a_\nu = b_\nu$ *für alle* ν.

Beweis: Wir wissen, dass f und g holomorph und damit komplex differenzierbar sind. Dann gilt $D^\nu f(\mathbf{0}) = D^\nu g(\mathbf{0})$ für alle ν. Speziell ist $a_{0\ldots 0} = f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = b_{0\ldots 0}$, und sukzessive Differentiation ergibt

$$D^\nu f(\mathbf{0}) = \nu! \cdot a_\nu \quad \text{und} \quad D^\nu g(\mathbf{0}) = \nu! \cdot b_\nu\,, \text{ für alle } \nu.$$

∎

2.8. Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet,* $\mathbf{z}_0 \in G$ *ein Punkt und* $f : B \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion. Ist* $f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ *die (eindeutig bestimmte) Potenzreihenentwicklung nahe* $\mathbf{z}_0 \in G$, *so gilt*

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot D^\nu f(\mathbf{z}_0), \text{ für jedes } \nu \in \mathbb{N}_0^n.$$

2.9. Satz (Cauchy'sche Ungleichungen)

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet,* $f : G \to \mathbb{C}$ *holomorph,* $\mathbf{z}_0 \in G$ *ein Punkt und* $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) \subset\subset G$ *ein Polyzylinder mit ausgezeichnetem Rand* T. *Dann ist*

$$|D^\nu f(\mathbf{z}_0)| \leq \frac{\nu!}{\mathbf{r}^\nu} \cdot \sup_T |f|.$$

Beweis: Sei $f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von f in $\mathbf{z}_0$. Dann ist $D^\nu f(\mathbf{z}_0) = \nu! a_\nu$ und $a_\nu = \left(\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\right)^n \int_T \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z}_0)^{\nu + \mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta}$, also

$$\begin{aligned} |D^\nu f(\mathbf{z}_0)| &\leq \frac{\nu!}{(2\pi)^n} \int_T \frac{|f(\boldsymbol{\zeta})|}{\mathbf{r}^{\nu+\mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta} \\ &= \frac{\nu!}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} \frac{|f(z_1^{(0)} + r_1 e^{\mathsf{i}\, t_1}, \ldots, z_n^{(0)} + r_n e^{\mathsf{i}\, t_n})|}{\mathbf{r}^\nu}\, dt_1 \cdots dt_n \\ &\leq \frac{\nu!}{\mathbf{r}^\nu} \cdot \sup_T |f|. \end{aligned}$$

∎

Im Folgenden sei G immer ein **Gebiet** im $\mathbb{C}^n$.

2.10. Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Seien f_1, f_2 zwei holomorphe Funktionen auf G. Wenn es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset G$ mit $f_1|_U = f_2|_U$ gibt, dann ist $f_1 = f_2$.

Beweis: Wir betrachten $f := f_1 - f_2$ und die Menge

$$N := \{\mathbf{z} \in G \,:\, D^\nu f(\mathbf{z}) = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{\nu}\}.$$

dann ist $N \neq \varnothing$, da $U \subset N$ ist. Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt und

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$$

die Potenzreihenentwicklung von f in einer Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$. Wenn $\mathbf{z}_0$ zu N gehört, dann ist $f|_V \equiv 0$ und deshalb $V \subset N$. Das zeigt, dass N offen ist. Weil alle Ableitungen $D^\nu f$ stetig sind, ist N abgeschlossen. Da G ein Gebiet ist, erhalten wir $N = G$ und $f_1 = f_2$. ∎

Bemerkung: Im Gegensatz zu der Theorie der Funktionen von einer komplexen Variablen reicht es nicht aus, wenn f_1 und f_2 auf einer Menge M mit einem Häufungspunkt in G übereinstimmen. Betrachten wir z.B. $G = \mathbb{C}^2$ und $M = \{(z_1, z_2) \,:\, z_2 = 0\}$, so stimmen die holomorphen Funktionen $f_1(z_1, z_2) := z_2(z_1 - z_2)$ und $f_2(z_1, z_2) := z_2(z_1 + z_2)$ auf M überein, es ist aber $f_1(0,1) = -1$ und $f_2(0,1) = 1$.

2.11. Maximumprinzip

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn $|f|$ in einem Punkt $\mathbf{z}_0 \in G$ ein lokales Maximum annimmt, so ist f konstant.

Beweis: Sei $B \subset G$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathbf{z}_0$. Für ein beliebiges $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_{\mathbf{w}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi_{\mathbf{w}}(\zeta) = \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{w}$. Dann ist $B_{\mathbf{w}} := \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \varphi_{\mathbf{w}}(\zeta) \in B\}$ eine offene, zusammenhängende Umgebung der Null in $\mathbb{C}$, und $f \circ \varphi_{\mathbf{w}}$ eine holomorphe Funktion von einer komplexen Variablen auf $B_{\mathbf{w}}$. Da $|f \circ \varphi_{\mathbf{w}}|$ ein lokales Maximum im Nullpunkt annimmt, muss diese Funktion auf $B_{\mathbf{w}}$ konstant sein. Aber die Richtung $\mathbf{w}$ wurde beliebig gewählt, also muss f auf B konstant sein. Aus dem Identitätssatz folgt, dass f auf G konstant ist. ∎