Kapitel 1 Holomorphe Funktionen

§ 1 Komplexe Differenzierbarkeit

Ist $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ ein Element des $\mathbb{C}^n$ und $z_\nu = x_\nu + \mathrm{i}\, y_\nu$, so können wir auch schreiben:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\,\mathbf{y}, \text{ mit } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \text{ und } \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Manchmal verwenden wir auch die Bezeichnung $x_{n+\nu} := y_\nu$. Der $\mathbb{C}^n$ wird also durch

$$\mathbf{x} + \mathrm{i}\,\mathbf{y} \longleftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$$

mit dem $\mathbb{R}^{2n}$ identifiziert.

Das ***euklidische Skalarprodukt*** auf dem $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})_n := \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu$$

definiert, das ***hermitesche Skalarprodukt*** auf dem $\mathbb{C}^n$ durch

$$<\mathbf{z}\,, \mathbf{w}> := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu.$$

Sei $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\,\mathbf{y}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\,\mathbf{v}$. Es ist

$$(x_\nu + \mathrm{i}\, y_\nu) \cdot (u_\nu - \mathrm{i}\, v_\nu) = (x_\nu u_\nu + y_\nu v_\nu) + \mathrm{i}\,(y_\nu u_\nu - x_\nu v_\nu),$$

also

$$<\mathbf{z}\,, \mathbf{w}> = \big((\mathbf{x} \bullet \mathbf{u})_n + (\mathbf{y} \bullet \mathbf{v})_n\big) + \mathrm{i}\,\big((\mathbf{y} \bullet \mathbf{u})_n - (\mathbf{x} \bullet \mathbf{v})_n\big).$$

Es ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} <\mathbf{z}\,, \mathbf{w}> &= \operatorname{Re} <\mathbf{w}\,, \mathbf{z}> \;=\; (\mathbf{z} \bullet \mathbf{w})_{2n}\,, \\
\operatorname{Im} <\mathbf{z}\,, \mathbf{w}> &= -\operatorname{Im} <\mathbf{w}\,, \mathbf{z}> = \operatorname{Re}(<\mathbf{z}\,, \mathrm{i}\,\mathbf{w}>) \;=\; (\mathbf{z} \bullet \mathrm{i}\,\mathbf{w})_{2n}\,, \\
\operatorname{Re} <\mathbf{z}\,, \mathbf{z}> &= (\mathbf{x} \bullet \mathbf{x})_n + (\mathbf{y} \bullet \mathbf{y})_n \\
\text{und } \operatorname{Im} <\mathbf{z}\,, \mathbf{z}> &= 0\,, \qquad \text{d.h. } \mathbf{z} \perp \mathrm{i}\,\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Definition

Die ***euklidische Norm*** eines Vektors $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\,\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ wird gegeben durch

$$\|\mathbf{z}\| := \sqrt{<\mathbf{z}\,, \mathbf{z}>} = \sqrt{(\mathbf{x} \bullet \mathbf{x})_n + (\mathbf{y} \bullet \mathbf{y})_n} = \sqrt{(\mathbf{z} \bullet \mathbf{z})_{2n}}\,,$$

die ***euklidische Distanz*** zwischen zwei Vektoren $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ durch

$$\operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|.$$

Eine äquivalente Norm ist die ***Supremumsnorm*** oder der ***Betrag*** eines Vektors:

$$|\mathbf{z}| := \max_{\nu=1,\ldots,n} |z_\nu|.$$

Diese Norm leitet sich nicht von einem inneren Produkt ab, aber sie definiert die gleiche Topologie auf dem $\mathbb{C}^n$ wie die euklidische Norm.

Definition

Sei $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, alle $r_\nu > 0$, $\mathbf{z}_0 = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$. Dann nennt man

$$\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}| < r_\nu \text{ for } \nu = 1, \ldots, n\}$$

den (***offenen***) ***Polyzylinder*** mit ***Polyradius*** $\mathbf{r}$ und Zentrum $\mathbf{z}_0$. Ist $r \in \mathbb{R}_+$ und $\mathbf{r} := (r, \ldots, r)$, so schreiben wir $\mathsf{P}^n_r(\mathbf{z}_0)$ statt $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r})$. Schließlich nennt man $\mathsf{P}^n := \mathsf{P}^n_1(\mathbf{0})$ den ***Einheitspolyzylinder*** um $\mathbf{0}$.

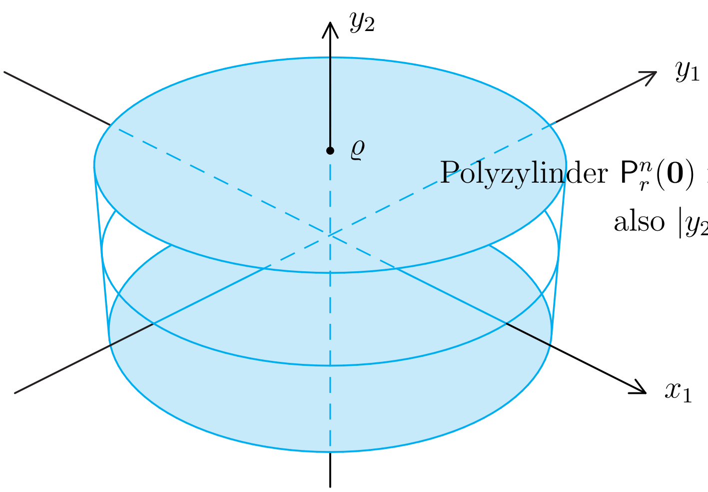
Ein Polyzylinder ist immer ein kartesisches Produkt von Kreisscheiben:

$$\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) = D_{r_1}(z_1^{(0)}) \times \ldots \times D_{r_n}(z_n^{(0)}).$$

Insbesondere ist

$$\mathsf{P}^n_r(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0| < r\}$$

und – wenn wir die Einheitskreisscheibe mit $\mathbb{D}$ bezeichnen – $\mathsf{P}^n = \underbrace{\mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}}_{n \text{ times}}$.



Polyzylinder $\mathsf{P}^n_r(\mathbf{0})$ für festes x_2 mit $0 < |x_2| < r$, also $|y_2| < \varrho := \sqrt{r^2 - x_2^2}$

Der topologische Rand eines Polyzylinders $\mathsf{P}^n(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ ist relativ kompliziert:

$$\partial \mathsf{P}^n(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \bigcup_{\nu=1}^{n} \Gamma_\nu\,,$$

mit

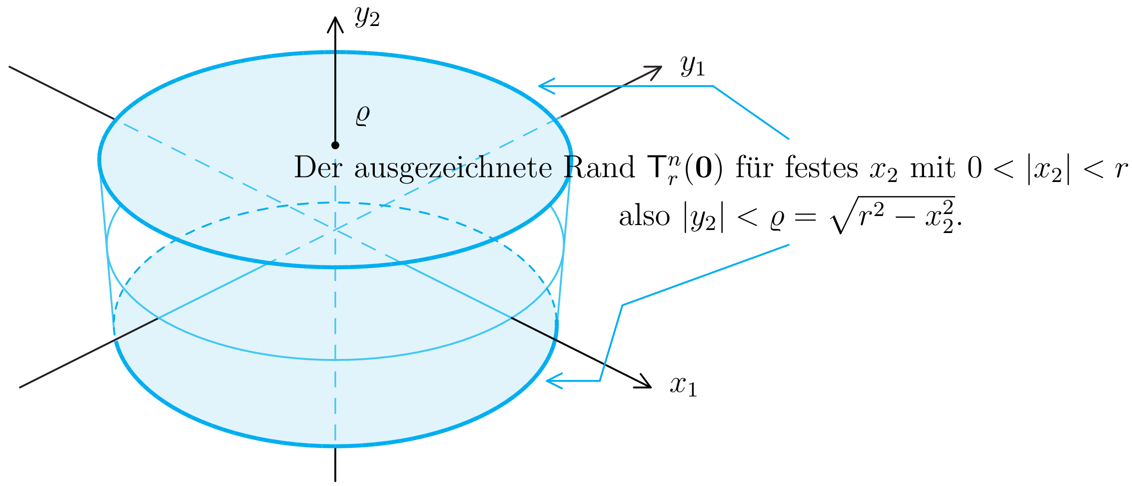
$$\Gamma_\nu := \{\mathbf{z} \,:\, |z_\nu - a_\nu| = r_\nu \text{ und } |z_\mu - a_\mu| \le r_\mu \text{ für } \mu \ne \nu\}.$$

Wir interessieren uns allerdings nicht besonders für den topologischen Rand des Polyzylinders. Der folgende Teil des Randes ist sehr viel wichtiger:

Definition

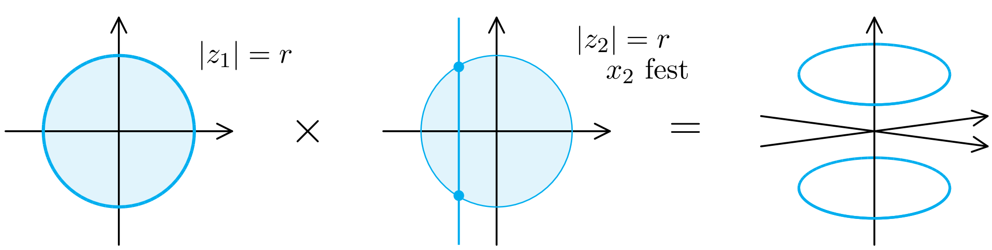
Der ***ausgezeichnete Rand*** des Polyzylinders $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r})$ ist die Menge

$$\mathsf{T}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}| = r_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}\,.$$



Der ausgezeichnete Rand ist das kartesische Produkt von n Kreisen, also ein n-dimensionaler ***Torus***.

Im Falle $n = 1$ reduziert sich ein Polyzylinder auf eine einfache Kreisscheibe, und sein ausgezeichneter Rand stimmt mit seinem topologischen Rand überein. Im Falle $n = 2$ können wir höchstens 3 der beteiligten 4 (reellen) Dimensionen bildlich darstellen. Halten wir etwa x_2 fest, so bleiben vom zweiten Kreis nur zwei Randpunkte übrig. Das kartesische Produkt des ersten Kreises mit diesen beiden Punkten ergibt die Vereinigung zweier Kreise.



Ein ***Bereich*** ist eine offene Menge im $\mathbb{C}^n$, ein ***Gebiet*** ist ein zusammenhängender Bereich. Jede offene Menge zerfällt in (höchstens abzählbar viele) Zusammenhangskomponenten.

Eine reelle Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ zerlegt ein Gebiet in zwei oder mehr Zusammenhangskomponenten. Für komplexe Hyperebenen im $\mathbb{C}^n$ (mit reeller Codimension

2) gilt das nicht. Um das deutlich zu machen, untersuchen wir Hyperebenen noch etwas genauer.

Ist $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$, so ist eine reelle Hyperebene durch $\mathbf{z}_0$ gegeben durch eine Gleichung

$$\mathrm{Re} < \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \, , \mathbf{a} > = 0, \qquad \text{für ein festes } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Man kann dafür auch schreiben: $(\mathbf{z} \bullet \mathbf{a})_{2n} = \beta$, mit $\beta := \mathrm{Re} < \mathbf{z}_0 \, , \mathbf{a} >$.

Durch $< \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \, , \mathbf{a} > = 0$ (bzw. $< \mathbf{z} \, , \mathbf{a} > = b$, mit $b \in \mathbb{C}$) wird eine komplexe Hyperebene beschrieben. Ist z.B. $n = 2$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$, so erhalten wir die Hyperebene

$$E := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \, : \, < \mathbf{z} \, , \mathbf{a} > = 0\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \, : \, z_2 = 0\}.$$

Ist $\varepsilon > 0$, so ergibt der Durchschnitt von E mit dem Polyzylinder $\mathsf{P}^n_\varepsilon(\mathbf{0})$ die Menge

$$E \cap \mathsf{P}^n_\varepsilon(\mathbf{0}) = \{(z_1, 0) \, : \, |z_1| < \varepsilon\},$$

also

$$(\mathbb{C}^2 \setminus E) \cap \mathsf{P}^n_\varepsilon(\mathbf{0}) = \{(z_1, z_2) \, : \, |z_1| < \varepsilon \text{ und } 0 < |z_2| < \varepsilon\} = D_\varepsilon(0) \times (D_\varepsilon(0) \setminus \{0\}).$$

Da beide Faktoren Gebiete sind, gilt dies auch für das kartesische Produkt. Also gilt allgemein:

> *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $E := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \, : \, < \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \, , \mathbf{a} > = 0\}$. Dann ist $G' := G \setminus E$ wieder ein Gebiet.*

Ist $1 \leq k \leq n$ und sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$, so wird durch die Gleichungen

$$< \mathbf{z} \, , \mathbf{a}_\mu > = b_\mu \qquad \mu = 1, \ldots, k,$$

eine komplexe Ebene P der ***Codimension*** k (also der Dimension $n - k$ über $\mathbb{C}$) definiert. Da in dieser Situation auch die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathsf{i}\,\mathbf{a}_1, \ldots, \mathsf{i}\,\mathbf{a}_k$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind, hat P die reelle Codimension $2k$ (also die Dimension $2n - 2k$ über $\mathbb{R}$).

Ein Sonderfall liegt vor, wenn $\mathbf{0}$ in P liegt, also P ein Untervektorraum ist.

1.1. Satz

Sei $P \subset \mathbb{C}^n$ eine reell $2k$-codimensionale Ebene, $\mathbf{0} \in P$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. *P ist ein komplexer Untervektorraum.*
2. *Liegt $\mathbf{z}$ in P, so liegt auch $\mathsf{i}\,\mathbf{z}$ in P.*

Beweis: 1) Die eine Richtung („ $\Longrightarrow$ “) ist klar.

2) „$\Longleftarrow$“: Nach Voraussetzung ist P schon ein reeller Vektorraum. Ist nun $c = \alpha + \mathsf{i}\,\beta \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{z} \in P$, so gehört auch $\mathsf{i}\,\mathbf{z}$ zu P und damit auch $c\mathbf{z} = \alpha\mathbf{z} + \beta(\mathsf{i}\,\mathbf{z})$. ∎

Im allgemeinen kann ein reell k-codimensionaler Unterraum $P \subset \mathbb{C}^n$ natürlich nicht komplex sein. Aber P enthält einen größten komplexen Unterraum, nämlich

$$P^c := P \cap \mathsf{i}\,P.$$

Dabei ist $\dim_{\mathbb{R}} P^c$ gerade und $\geq 2(2n-k)-2n = 2(n-k)$. Ist $n \geq 2$ und $k = 1$ (der Fall einer Hyperebene), so ist $2n-2 \leq \dim_{\mathbb{R}} P^c \leq 2n-1$, also $\dim_{\mathbb{C}} P^c = n-1$. Ist $k > 1$, so kann $P^c = \{\mathbf{0}\}$ sein. Ist z.B. $P = \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \, : \, \text{ alle } z_i \text{ reell}\}$, so sind P und $\mathsf{i}\,P$ jeweils n-dimensional (über $\mathbb{R}$), es ist $P \cap \mathsf{i}\,P = \{\mathbf{0}\}$ und $P + \mathsf{i}\,P = \mathbb{C}^n$. Ist andererseits $P = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathsf{i}\,\mathbf{y} \, : \, y_n = 0\}$, so ist P reell $(2n-1)$-dimensional, auch $P + \mathsf{i}\,P = \mathbb{C}^n$ und $P \cap \mathsf{i}\,P = \{\mathbf{z} \, : \, z_n = 0\}$ komplex $(n-1)$-dimensional. Zwischen diesen beiden Extremen bewegt man sich.

Definition

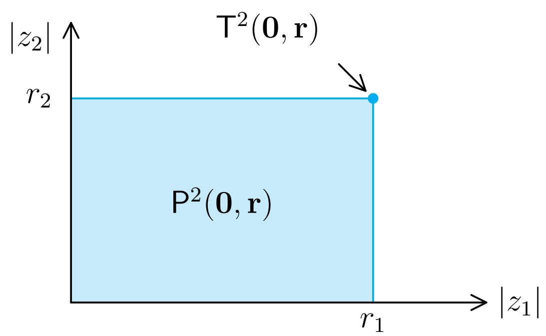
Die Menge $\mathscr{V} := \{\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, r_\nu \geq 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$ nennt man den ***absoluten Raum***, die Abbildung $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathscr{V}$ mit $\tau(z_1, \ldots, z_n) := \big(|z_1|, \ldots, |z_n|\big)$ die ***natürliche Projektion***.

τ ist stetig und surjektiv. Für $\mathbf{r} \in \mathscr{V}$, ist $\tau^{-1}(\mathbf{r})$ der Torus $\mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. Für $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ sei $\mathsf{P}_{\mathbf{z}} := \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \tau(\mathbf{z}))$ und $\mathsf{T}_{\mathbf{z}} := \mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \tau(\mathbf{z})) = \tau^{-1}(\tau(\mathbf{z}))$.

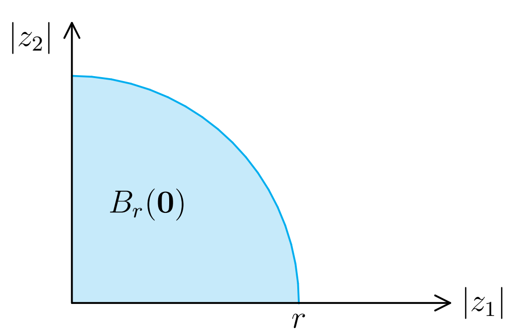
Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt ***Reinhardt'sches Gebiet***, falls mit jedem $\mathbf{z} \in G$ der Torus $\mathsf{T}_{\mathbf{z}}$ ebenfalls in G enthalten ist.

Reinhardt'sche Gebiete G werden durch ihre Bilder im absoluten Raum charakterisiert: $\tau^{-1}\tau(G) = G$. Deshalb kann man sie als Gebiete in $\mathscr{V}$ visualisieren. Beispiele sind Kugeln und Polyzylinder um den Nullpunkt.



Polyzylinder mit Polyradius $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$

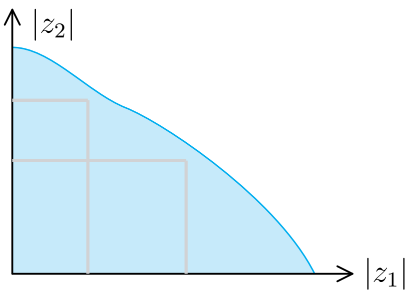


Kugel mit Radius r

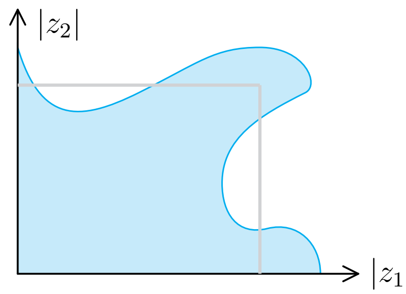
Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Reinhardt'sches Gebiet.

1. G heißt ***eigentlich***, falls $\mathbf{0} \in G$ ist.
2. G heißt ***vollständig***, falls gilt: $\forall\, \mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n \,:\, \mathsf{P}_{\mathbf{z}} \subset G$.



vollständiges Reinhardt'sches Gebiet



eigentliches Reinhardt'sches Gebiet

Wir wollen jetzt Polynome und Potenzreihen von n Veränderlichen untersuchen. Dazu führen wir Multi-Indizes ein. Für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ sei

$$|\nu| := \sum_{i=1}^{n} \nu_i \quad \text{und} \quad \mathbf{z}^\nu := z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}.$$

Die Schreibweise $\nu \geq 0$ (bzw. $\nu > 0$) bedeutet, dass $\nu_i \geq 0$ für jedes i (bzw. $\nu \geq 0$ und $\nu_i > 0$ für wenigstens ein i) ist.

Eine Funktion der Gestalt

$$\mathbf{z} \mapsto p(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu| \leq m} a_\nu \mathbf{z}^\nu, \text{ mit } a_\nu \in \mathbb{C} \text{ für } |\nu| \leq m,$$

nennt man ein ***Polynom*** (vom ***Grad*** $\leq m$). Gibt es ein ν mit $|\nu| = m$ und $a_\nu \neq 0$, so hat $p(\mathbf{z})$ genau den ***Grad*** m. Für das Nullpolynom ist kein Grad definiert. Ein Ausdruck der Form $a_\nu \mathbf{z}^\nu$ mit $a_\nu \neq 0$ wird als ***Monom*** vom Grad $m := |\nu|$ bezeichnet. Ein Polynom $p(\mathbf{z})$ heißt ***homogen*** vom Grad m, falls es nur aus Monomen vom Grad m besteht.

1.2. Satz

Ein Polynom $p(\mathbf{z}) \neq 0$ vom Grad m ist genau dann homogen, wenn gilt:

$$p(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^m \cdot p(\mathbf{z}), \qquad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

BEWEIS: Sei $p(\mathbf{z}) = a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ein Monom vom Grad m. Dann ist

$$p(\lambda \mathbf{z}) = a_\nu (\lambda \mathbf{z})^\nu = \lambda^m \cdot a_\nu \mathbf{z}^\nu = \lambda^m \cdot p(\mathbf{z}).$$

Das Gleiche gilt für endliche Summen von Monomen

Umgekehrt sei $p(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu|\le N} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ein beliebiges Polynom mit $p(\lambda\mathbf{z}) = \lambda^m \cdot p(\mathbf{z})$. Wenn wir alle Monome vom Grad i sammeln, dann erhalten wir ein Polynom $p_i(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu|=i} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ mit $p_i(\lambda\mathbf{z}) = \lambda^i \cdot p_i(\mathbf{z})$. Für festes $\mathbf{z}$ sind die zwei Polynome

$$\lambda \mapsto p(\lambda\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{N} p_i(\mathbf{z}) \cdot \lambda^i \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto \lambda^m \cdot p(\mathbf{z})$$

gleich. Das ist nur möglich, wenn die Koeffizienten gleich sind, d.h., $p_m(\mathbf{z}) = p(\mathbf{z})$ und $p_i(\mathbf{z}) = 0$ für $i \ne m$. Also ist $p = p_m$ homogen. ∎

Ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ eine komplexe Zahl c_ν gegeben, so kann man die Reihe $\sum_{\nu\ge 0} c_\nu$ bilden und auf Konvergenz untersuchen.

Definition

Die Reihe $\sum_{\nu\ge 0} c_\nu$ heißt ***konvergent***, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0^n$ gibt, so dass $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{\varphi(i)}| < \infty$ ist. Die komplexe Zahl $\sum_{i=1}^{\infty} c_{\varphi(i)}$ nennt man den ***Grenzwert*** der Reihe.

Es ist klar, dass dieser Konvergenzbegriff unabhängig von der Abbildung φ ist und dass er absolute Konvergenz bedeutet.

1.3. Satz

$\sum_{\nu\ge 0} c_\nu$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\Big\{ \sum_{\nu\in I} |c_\nu| \,:\, I \subset \mathbb{N}_0^n \text{ endlich} \Big\}$$

eine beschränkte Menge ist.

Der Beweis ist trivial.

1.4. Beispiel

$q_1, \ldots, q_n$ seien reelle Zahlen mit $0 < q_i < 1$ für $i = 1, \ldots, n$, sowie $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_n)$. Dann ist $\mathbf{q}^\nu = q_1^{\nu_1} \cdots q_n^{\nu_n}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ eine positive reelle Zahl.

Ist $I \subset \mathbb{N}_0^n$ eine endliche Menge, so gibt es eine Zahl N mit $I \subset \{0, 1, \ldots, N\}^n$, und daher ist

$$\Big| \sum_{\nu\in I} \mathbf{q}^\nu \Big| = \sum_{\nu\in I} \mathbf{q}^\nu \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{\nu_i=0}^{N} q_i^{\nu_i} \le \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - q_i}.$$

Da die Partialsummen beschränkt sind, ist die Reihe konvergent. Der Grenzwert ist

$$\sum_{\nu \geq 0} \mathbf{q}^{\nu} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - q_i}.$$

Wir sprechen von einer ***verallgemeinerten geometrischen Reihe***.

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge und $\{f_\nu : \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine Familie von komplexwertigen Funktionen auf M. Mit $\|f_\nu\|_M$ sei das Supremum von $|f_\nu|$ auf M bezeichnet.

Definition

Die Reihe $\sum_{\nu \geq 0} f_\nu$ heißt ***normal konvergent*** auf M, falls die Reihe der positiven reellen Zahlen $\sum_{\nu \geq 0} \|f_\nu\|_M$ konvergent ist.

Ist $\sum_{\nu \geq 0} f_\nu$ auf M normal konvergent, so gibt es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0^n$, so dass $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{\varphi(i)}\|_M < \infty$ ist. Nach dem Majoranten-Kriterium konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\varphi(i)}(\mathbf{z})$ für jedes $\mathbf{z} \in M$. Sei f die (komplexwertige) Grenzfunktion auf M. Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\varphi(i)}$ normal und damit auch gleichmäßig auf M. Sind alle f_ν stetig, so ist auch die Grenzfunktion stetig.

Ist $\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine Familie von komplexen Zahlen und $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Punkt, so nennt man

$$\sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^{\nu}$$

eine ***Potenzreihe*** um $\mathbf{z}_0$. Konvergiert die Reihe normal auf einer Menge M, so konvergiert sie gegen eine stetige Funktion auf M.

1.5. Abel'sches Lemma

$P' \subset\subset P \subset \mathbb{C}^n$ seien Polyzylinder um den Nullpunkt. Wenn die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^{\nu}$ in einem Punkt des ausgezeichneten Randes von P konvergiert, dann konvergiert sie normal auf P'.

BEWEIS: Wir bezeichnen den ausgezeichneten Rand von P mit $\partial_0 P$. Sei $\mathbf{w} \in \partial_0 P$ ein Punkt, für den $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{w}^{\nu}$ konvergent ist. Dann gibt es eine Konstante c, so dass $|a_\nu \mathbf{w}^{\nu}| \leq c$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ gilt.

Wir wählen reelle Zahlen q_i mit $0 < q_i < 1$, so dass $|z_i| \leq q_i |w_i|$ für jedes $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in P'$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt. Es folgt:

$$|a_\nu \mathbf{z}^{\nu}| \leq \mathbf{q}^{\nu} \cdot c, \text{ für } \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n),\ \mathbf{z} \in P',\ \text{und } \nu \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dann ist auch $\|a_\nu \mathbf{z}^{\nu}\|_{P'} \leq \mathbf{q}^{\nu} \cdot c$, und aus der Konvergenz der verallgemeinerten geometrischen Reihe folgt, dass $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^{\nu}$ normal konvergent auf P' ist. ∎

Definition

Die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ ***konvergiert kompakt*** in einem Gebiet G, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig konvergiert.

1.6. Folgerung

Sei $P \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder um den Nullpunkt und $\mathbf{w}$ ein Punkt des ausgezeichneten Randes von P. Wenn die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ in $\mathbf{w}$ konvergiert, dann konvergiert sie auf P kompakt.

BEWEIS: Sei $K \subset P$ kompakt. Dann gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so dass $K \subset q \cdot P \subset\subset P$ ist. Deshalb ist die Reihe auf K normal konvergent. ∎

Sei $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine Potenzreihe um den Nullpunkt und

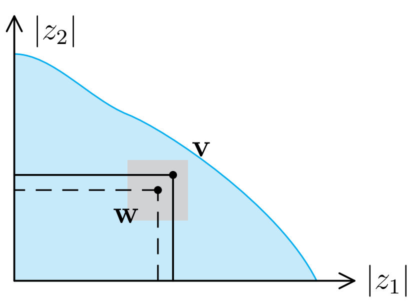
$$B := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, S(\mathbf{z}) \text{ konvergent}\}.$$

1.7. Satz

Der offene Kern $\mathring{B}$ ist ein vollständiges Reinhardt'sches Gebiet, und $S(\mathbf{z})$ konvergiert kompakt in $\mathring{B}$.

BEWEIS: Sei $\mathbf{w}$ ein Punkt von $\mathring{B}$. Es gibt einen Polyzylinder $\mathsf{P}^n(\mathbf{w}, \varepsilon) \subset \mathring{B}$ und einen Punkt $\mathbf{v} \in \mathsf{P}^n(\mathbf{w}, \varepsilon) \cap (\mathbb{C}^*)^n$, so dass $\mathbf{w} \in P_\mathbf{v}(\mathbf{0})$ ist (man wähle $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ mit $v_i := (1 + \delta) w_i$ und $0 < \delta < \varepsilon / |w_i|$ für $i = 1, \dots, n$ und $w_i \neq 0$, bzw. $v_i := \delta$ mit $0 < \delta < \varepsilon$ im Falle $w_i = 0$).

Nach Folgerung 1.6 konvergiert $S(\mathbf{z})$ in $P_\mathbf{v}(\mathbf{0})$, und deshalb ist $T_\mathbf{w} \subset \mathring{B}$. Liegt $\mathbf{w}$ sogar in $(\mathbb{C}^*)^n$, so folgt aus 1.6, dass der ganze Polyzylinder $P_\mathbf{w}(\mathbf{0})$ in $\mathring{B}$ liegt.



Um zu sehen, dass die offene Menge $\mathring{B}$ ein vollständiges Reinhardt'sches Gebiet ist, müssen wir nur noch zeigen, dass sie zusammenhängend ist. Aber das ist sehr einfach. Jeder Punkt aus $\mathring{B}$ kann mit einem Punkt in $\mathring{B} \cap (\mathbb{C}^*)^n$ verbunden werden, und dann innerhalb eines geeigneten Polyzylinders mit dem Ursprung.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass $\mathring{B}$ eine Vereinigung von relativ kompakten Polyzylindern um den Nullpunkt ist. Deshalb konvergiert $S(\mathbf{z})$ kompakt in $\mathring{B}$. ∎

Die Menge $\mathring{B}$ nennt man das ***Konvergenzgebiet*** von $S(\mathbf{z})$.

1.8. Satz

Sei G das Konvergenzgebiet der Potenzreihe $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$. Dann konvergiert auch

$$S_{z_j}(\mathbf{z}) := \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_j > 0}} a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j - 1} \cdots z_n^{\nu_n}$$

kompakt auf G.

BEWEIS: Sei $\mathbf{w}$ irgend ein Punkt in $(\mathbb{C}^*)^n \cap G$ und $|a_\nu \mathbf{w}^\nu| \leq c$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$. Ist $0 < q < 1$ und $\mathbf{z} = q \cdot \mathbf{w}$, so ist

$$|a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j} \cdots z_n^{\nu_n}| = \frac{\nu_j}{|z_j|} \cdot |a_\nu \mathbf{z}^\nu| \leq \frac{c}{|z_j|} \cdot \nu_j \cdot q^{|\nu|}.$$

Aber

$$\sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_j > 0}} \nu_j q^{|\nu|} = \left(\sum_{\nu_1 = 0}^{\infty} q^{\nu_1} \right) \cdots \left(\sum_{\nu_j = 1}^{\infty} \nu_j q^{\nu_j} \right) \cdots \left(\sum_{\nu_n = 0}^{\infty} q^{\nu_n} \right)$$

ist konvergent. Also ist $S_{z_j}(\mathbf{z})$ konvergent, und es folgt, dass S_{z_j} normal konvergent auf $P_{\mathbf{z}}(\mathbf{0})$ ist. Da jede kompakte Menge $K \subset G$ durch endlich viele Polyzylinder dieser Art überdeckt werden kann, konvergiert S_{z_j} auf P kompakt. ∎

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt ***holomorph***, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$ und eine Potenzreihe $S(\mathbf{z}) := \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ gibt, die auf U gegen $f(\mathbf{z})$ konvergiert.

Die Menge der holomorphen Funktionen auf B wird mit $\mathcal{O}(B)$ bezeichnet.

Offensichtlich ist jede holomorphe Funktion stetig.

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathbf{z}_0 \in B$ ein Punkt. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt ***komplex differenzierbar*** in $\mathbf{z}_0$, falls eine Abbildung $\Delta : B \to \mathbb{C}^n$ existiert, so dass gilt:

1. Δ ist stetig in $\mathbf{z}_0$.
2. $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^\top$ für $\mathbf{z} \in B$.

Ist $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, so lautet die Gleichung (2) etwas ausführlicher:

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) + \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_\nu^{(0)}) \Delta_\nu(z_1, \dots, z_n).$$

Wie üblich zeigt man: Ist f komplex differenzierbar in $\mathbf{z}_0$, so ist der Wert der Funktion Δ bei $\mathbf{z}_0$ eindeutig bestimmt. Die eindeutig bestimmten Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) := \Delta_\nu(\mathbf{z}_0) = \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta(\mathbf{z}_0)^\top$$

nennt man die ***partiellen Ableitungen*** von f in $\mathbf{z}_0$. Der Vektor

$$\nabla f(\mathbf{z}_0) := (f_{z_1}(\mathbf{z}_0), \dots, f_{z_n}(\mathbf{z}_0)) = \Delta(\mathbf{z}_0)$$

wird als der ***komplexe Gradient*** von f in $\mathbf{z}_0$ bezeichnet.

Bemerkungen:

1. Ist f in $\mathbf{z}_0$ komplex differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

2. f heißt ***komplex differenzierbar in einem Bereich*** B, wenn f in jedem Punkt von B komplex differenzierbar ist. Sind alle partiellen Ableitungen in $\mathbf{z}_0$ wieder komplex differenzierbar, so nennt man f in $\mathbf{z}_0$ ***zweimal komplex differenzierbar***, und man erhält ***zweite Ableitungen***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial z_\mu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu z_\mu}(\mathbf{z}_0).$$

   Induktiv definiert man so partielle Ableitungen von beliebiger Ordnung.

3. Summen, Produkte und Quotienten (mit nicht verschwindenden Nennern) von komplex differenzierbaren Funktionen sind wieder komplex differenzierbar.

Eine Funktion f heißt ***partiell differenzierbar*** in $\mathbf{z}_0$, falls alle partiellen Ableitungen $f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0)$ existieren. Sie heißt ***schwach holomorph*** auf B, falls sie auf B stetig und partiell differenzierbar ist. Für $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in B$ und $\nu = 1, \dots, n$ sind dann die Funktionen

$$\zeta \mapsto f(z_1, \dots, z_{\nu-1}, \zeta, z_{\nu+1}, \dots, z_n)$$

holomorphe Funktionen von einer Variablen.

Ist f komplex differenzierbar auf B, so ist f auch schwach holomorph auf B. Später werden wir sehen, dass die Umkehrung ebenfalls gilt.

1.9. Satz

Sei $P \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder um Null und $S(z) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine Potenzreihe, die auf P gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f komplex differenzierbar in $\mathbf{0}$, mit

$$f_{z_1}(\mathbf{0}) = a_{1,0,\ldots,0}\,, \ldots,\ f_{z_n}(\mathbf{0}) = a_{0,\ldots,0,1}.$$

Beweis: Wir wählen einen kleinen Polyzylinder $P_\varepsilon \subset\subset P$ um Null, so dass $S(\mathbf{z})$ auf P_ε normal konvergent ist. Dann sind auch alle Reihen normal konvergent, die man durch Umordnung erhält, und sie konvergieren gegen den gleichen Grenzwert. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu \\ &= a_{0,0,\ldots,0} + z_1 \cdot \sum_{\substack{\nu_1 > 0 \\ \nu_2,\ldots,\nu_n \geq 0}} a_\nu z_1^{\nu_1 - 1} z_2^{\nu_2} \cdots z_n^{\nu_n} \\ &\quad + z_2 \cdot \sum_{\substack{\nu_1 = 0,\, \nu_2 > 0 \\ \nu_3,\ldots,\nu_n \geq 0}} a_\nu z_2^{\nu_2 - 1} \cdots z_n^{\nu_n} + \cdots + z_n \cdot \sum_{\substack{\nu_1 = \ldots = \nu_{n-1} = 0 \\ \nu_n > 0}} a_\nu z_n^{\nu_n - 1} \\ &= f(\mathbf{0}) + z_1 \cdot \Delta_1(\mathbf{z}) + \cdots + z_n \cdot \Delta_n(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Da die Reihen $\Delta_1(\mathbf{z}), \ldots, \Delta_n(\mathbf{z})$ auf P_ε gegen stetige Funktionen konvergieren, ist f komplex differenzierbar in $\mathbf{0}$, mit $f_{z_\nu}(\mathbf{0}) = \Delta_\nu(\mathbf{0})$. ∎

1.10. Satz

Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ ein fester Vektor, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definiert durch $L(\mathbf{w}) := \mathbf{w} \cdot A + \mathbf{b}$.

Ist $B \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{C}$ in $\mathbf{z}_0 \in B$ komplex differenzierbar, so ist auch $g := f \circ L$ in $\mathbf{w}_0 := (\mathbf{z}_0 - \mathbf{b}) \cdot A^{-1}$ komplex differenzierbar, und es ist $\nabla g(\mathbf{w}_0) = \nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot A^\top$.

Beweis: Es ist $L(\mathbf{w}_0) = \mathbf{z}_0$ und $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^\top$, Δ stetig in $\mathbf{z}_0$,

$$\text{also} \quad \begin{aligned} g(\mathbf{w}) &= f(\mathbf{w} \cdot A + \mathbf{b}) \\ &= g(\mathbf{w}_0) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \cdot A \cdot \Delta(\mathbf{w} \cdot A + \mathbf{b})^\top \\ &= g(\mathbf{w}_0) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \cdot \Delta^*(\mathbf{w})^\top, \ \text{mit } \Delta^*(\mathbf{w}) := \Delta(L(\mathbf{w})) \cdot A^\top. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

1.11. Folgerung

Ist $B \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist f auf B auch komplex differenzierbar.

Beweis: Sei $\mathbf{z}_0 \in B$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine Potenzreihe $S(\mathbf{w})$, die auf einer Umgebung von $\mathbf{0}$ gleichmäßig gegen eine im Nullpunkt komplex differenzierbare Funktion g konvergiert, so dass gilt:

$$f(\mathbf{z}_0 + \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}), \text{ für } \mathbf{w} \text{ nahe } \mathbf{0}.$$

Sei $L(\mathbf{z}) := \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$. Dann ist $f = g \circ L$ nach dem vorhergehenden Satz in $\mathbf{0} - (-\mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$ komplex differenzierbar. ∎