Kapitel 2 Analytische Mengen

§ 1 Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz

Mit $\mathbb{C}[\![\mathbf{z}]\!]$ bezeichnen wir den Ring der formalen Potenzreihen um den Nullpunkt.

Eine formale Potenzreihe $f = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ heißt *konvergent*, falls sie in einem Polyzylinder P um den Nullpunkt konvergent ist. Die Menge H_n der konvergenten Potenzreihen bildet eine nullteilerfreie $\mathbb{C}$-Algebra. Wir unterscheiden bei der Schreibweise meistens nicht zwischen einer Potenzreihe und der Funktion, gegen welche die Reihe konvergiert.

1.1 Satz. *$f \in H_n$ ist genau dann eine Einheit, wenn $f(0) \neq 0$ ist.*

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Ist umgekehrt $f(0) \neq 0$, so gibt es einen Polyzylinder P um Null, so dass $f(\mathbf{z})$ auf P gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, und man kann annehmen, dass f auf P keine Nullstelle besitzt. Dann ist auch $1/f$ auf P holomorph und Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe g, so dass $f \cdot g = 1$ ist. ∎

Die Menge $\mathfrak{m} := \{f \in H_n \,:\, f(\mathbf{0}) = 0\}$ aller Nicht-Einheiten in H_n ist ein Ideal.

1.2 Satz. *Das Ideal $\mathfrak{m}$ der Nicht-Einheiten ist das einzige maximale Ideal in H_n, und es ist $H_n/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$.*

Beweis: Ist $\mathfrak{a} \subset H_n$ ein echtes Ideal, so kann es keine Einheit enthalten, muss also in $\mathfrak{m}$ liegen. Der Homomorphismus $\varphi : H_n \to \mathbb{C}$, der durch $f \mapsto f(0)$ definiert wird, ist surjektiv und hat $\mathfrak{m}$ als Kern. ∎

Man nennt H_n eine *lokale* $\mathbb{C}$*-Algebra* oder auch eine $\mathbb{C}$*-Stellenalgebra*.

Jede formale Potenzreihe besitzt eine Darstellung

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^\lambda.$$

Man nennt dies die Entwicklung von f nach z_n. Ist f konvergent, so sind auch die Reihen f_λ konvergent. Einen geeigneten Konvergenzbegriff in H_n besitzen wir leider nicht. Allerdings gibt es einen Polyzylinder, auf dem alle Reihen $f_\lambda(\mathbf{z}')$ simultan konvergieren, und auf dem konvergiert dann auch die Reihe von holomorphen Funktionen $f_\lambda(\mathbf{z}')z_n^\lambda$. Das liegt an der absoluten Konvergenz der Reihen.

Definition. Ein Element $f \in H_n$ heißt *z_n-allgemein von der Ordnung k*, falls es eine Potenzreihe $\widetilde{f}(z_n)$ in einer Variablen gibt, so dass gilt:

1. $f(0, \ldots, 0, z_n) = z_n^k \cdot \widetilde{f}(z_n)$.
2. $\widetilde{f}(0) \neq 0$.

Ist f z_n-allgemein von irgend einer Ordnung, so nennt man f schlechthin *z_n-allgemein.*

Sei $f(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\mathbf{z}')z_n^\lambda$ die Entwicklung von f nach z_n. f ist genau dann z_n-allgemein von der Ordnung k, wenn $f_0(\mathbf{0}') = \cdots = f_{k-1}(\mathbf{0}') = 0$ und $f_k(\mathbf{0}') \neq 0$ ist. Dann ist $\widetilde{f}(z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{k+\nu}(\mathbf{0}')z_n^\nu$.

f ist also genau dann z_n-allgemein, wenn $f(0,\ldots,0,z_n) \not\equiv 0$ ist.

Hier sind einige Eigenschaften:

1. f ist genau dann eine Einheit in H_n, wenn f z_n-allgemein von der Ordnung 0 ist.

2. Sind die Reihen f_λ z_n-allgemein von der Ordnung k_λ, für $\lambda = 1, 2$, so ist $f_1 \cdot f_2$ z_n-allgemein von der Ordnung $k_1 + k_2$.

Die erste Eigenschaft sieht man so:

Ist $f(\mathbf{0}) \neq 0$ und $f(\mathbf{0}', z_n) = f_0(\mathbf{0}') + f_1(\mathbf{0}')z_n + \cdots$, so muss offensichtlich $f(\mathbf{0}') \neq 0$ sein, also f z_n-allgemein von der Ordnung 0. Die Umkehrung ist klar.

Es gibt übrigens Elemente $f \neq 0$ in H_n mit $f(\mathbf{0}) = 0$, die nicht z_n-allgemein sind, auch nicht nach einer Permutation der Koordinaten.

Definition. Sei $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n-1})$ ein Element des $\mathbb{C}^{n-1}$. Die lineare Abbildung $\sigma_\mathbf{c} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit

$$\sigma_\mathbf{c}(z_1, \ldots, z_n) := (z_1 + c_1 z_n, \ldots, z_{n-1} + c_{n-1}z_n, z_n)$$

nennt man eine *Scherung*.

Die Menge Σ aller Scherungen bildet eine Untergruppe der Gruppe der linearen Automorphismen von $\mathbb{C}^n$, mit $\sigma_\mathbf{0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ und $\sigma_{\mathbf{c}_1} \circ \sigma_{\mathbf{c}_2} = \sigma_{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2}$.

Man kann schreiben: $\sigma_\mathbf{c}(\mathbf{z}) := \mathbf{z} + z_n \cdot (\mathbf{c}, 0)$. Insbesondere ist $\sigma_\mathbf{c}(\mathbf{e}_n) = (\mathbf{c}, 1)$.

1.3 Satz. *Ist $f \in H_n$ ein Element $\neq 0$, so gibt es eine Scherung σ, so dass $f \circ \sigma$ z_n-allgemein ist. Dabei kann man σ beliebig nahe bei der Identität wählen.*

Beweis: Die Reihe f konvergiere im Polyzylinder $P = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |\mathbf{z}| < R\}$. Wir nehmen an, es gibt einen Polyzylinder $Q = \{\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1} : |\mathbf{z}'| < \varepsilon\}$, so dass $f \circ \sigma_\mathbf{c}(0,\ldots,0,z_n) \equiv 0$ für alle $\mathbf{c} \in Q$ und alle z_n mit $(0,\ldots,0,z_n) \in \sigma_\mathbf{c}^{-1}(P)$ ist. Dann ist $f(z_n\mathbf{c}, z_n) = f(z_n \cdot (\mathbf{c}, 1)) = f \circ \sigma_\mathbf{c}(0,\ldots,0,z_n) \equiv 0$ für solche $\mathbf{c}$ und z_n.

Sei $\alpha \in (0, R)$ und $r > 0$, so dass $[\alpha - r, \alpha + r] \subset (0, R)$ ist. Ist nun $|z_n - \alpha| < r$ (also $|z_n| > \alpha - r$), $|\mathbf{z}'| < \varepsilon(\alpha - r)$ und $\mathbf{c} := \frac{1}{z_n}\mathbf{z}'$, so liegt $\mathbf{c}$ in Q und $(z_n\mathbf{c}, z_n)$ in P. Das bedeutet:

$$W := \mathsf{P}^{n-1}_{\varepsilon(\alpha-r)}(\mathbf{0}') \times \Delta(\alpha, r) \subset \{(\lambda\mathbf{c}, \lambda) \,:\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \mathbf{c} \in Q\} \cap P.$$

Also verschwindet f auf der offenen Menge W identisch. Das kann aber nicht sein. Demnach gibt es eine Folge $(\mathbf{c}_\nu)$ in $\mathbb{C}^{n-1}$, die gegen $\mathbf{0}'$ konvergiert, so dass $f \circ \sigma_{\mathbf{c}_\nu}(0,\ldots,0,z_n)$ für kein ν identisch verschwindet. Also gibt es ein beliebig kleines $\mathbf{c}$, so dass $\sigma_\mathbf{c}$ z_n-allgemein ist. ∎

Bemerkung. Ist $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ beliebig, so gibt es ein $\mathbf{c}$ beliebig nahe bei $\mathbf{0}'$, so dass $f \circ \sigma_{\mathbf{c}_0+\mathbf{c}} = (f \circ \sigma_{\mathbf{c}_0}) \circ \sigma_{\mathbf{c}}$ z_n-allgemein ist. Das bedeutet, daß die Menge der σ, für die $f \circ \sigma$ z_n-allgemein ist, offen und dicht in Σ liegt.

Insbesondere kann man auch zu endlich vielen Elementen $f_1, \ldots, f_l \neq 0$ in H_n eine Scherung σ finden, so daß $f_1 \circ \sigma, \ldots, f_l \circ \sigma$ simultan z_n-allgemein sind.

Wir interessieren uns jetzt für Potenzreihen, die von einer Variablen polynomial abhängen. Ist $f \in H_n$ und $f(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\mathbf{z}') z_n^\lambda$ mit $f_\lambda = 0$ für $\lambda > s$, so ist f ein Element des Polynomringes $H_{n-1}[z_n]$. Ist $f_s \neq 0$, so ist $\deg(f) = s$. Ist f normiert und $f_\lambda(\mathbf{0}') = 0$ für $\lambda < s$, so ist f z_n-allgemein genau von der Ordnung s, und es ist $f(\mathbf{0}', z_n) = z_n^s$.

Definition. Ein normiertes Polynom $\omega \in H_{n-1}[z_n]$ mit $\deg(\omega) = s$ und $\omega(\mathbf{0}', z_n) = z_n^s$ nennt man ein *Weierstraß-Polynom.*

Ein normiertes Polynom $\omega \in H_{n-1}[z_n]$ mit $\deg(\omega) = s$ ist genau dann ein Weierstraß-Polynom, wenn es z_n-allgemein von der Ordnung s ist. Es folgt leicht, dass das Produkt von zwei Weierstraß-Polynomen wieder ein Weierstraß-Polynom ist.

Ist $g = e \cdot \omega$ das Produkt einer Einheit mit einem Weierstraß-Polynom vom Grad s, dann ist g auch z_n-allgemein von der Ordnung s, da die Einheit e z_n-allgemein von der Ordnung 0 ist.

Als nächstes betrachten wir symmetrische Polynome.

Definition. Ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_s]$ heißt *symmetrisch*, falls für alle i, j gilt:

$$p(u_1, \ldots, u_i, \ldots u_j, \ldots, u_s) = p(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_s).$$

Ein Spezialfall sind die *elementar-symmetrischen Polynome* $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, die folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(u_1, \ldots, u_s) &= u_1 + \cdots + u_s, \\
\sigma_2(u_1, \ldots, u_s) &= \sum_{i<j} u_i u_j, \\
&\vdots \\
\sigma_s(u_1, \ldots, u_s) &= u_1 \cdots u_s.
\end{aligned}$$

Das folgende Resultat wird z.B. bei van der Waerden bewiesen, und auch in dem Buch von Cox, Little und O'Shea (Chapter 7, §1, prop. 3).

1.4 Satz. *Ist $p \in \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_s]$ symmetrisch, so gibt es genau ein Polynom $Q(y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_s]$, so dass $p = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ ist.*

Ein spezielles symmetrisches Polynom ist das Quadrat der Vandermonde-Determinante:

$$p_V(u_1, \dots, u_s) = \prod_{i<j} (u_i - u_j)^2$$

Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $Q_V(y_1, \dots, y_s)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so daß gilt:

$$p_V(u_1, \dots, u_s) = Q_V(\sigma_1(u_1, \dots, u_s), \dots, \sigma_s(u_1, \dots, u_s)).$$

Definition. Ist $\omega(u) = u^s + a_1 u^{s-1} + \cdots + a_s$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{C}[u]$, so heißt $\Delta_\omega = Q_V(-a_1, a_2, \dots, (-1)^s a_s)$ die *Diskriminante* von ω.

Man kann zeigen:

$$(-1)^i a_i = \sigma_i(w_1, \dots, w_s),$$

wobei $w_1, \dots, w_s$ die Nullstellen des Polynoms ω sind. Also ist $\Delta_\omega = 0$ genau dann, wenn es ein Paar $i \neq j$ mit $w_i = w_j$ gibt.

Beispiel.

Sei $\omega(u) = u^2 - au + b$. Zur Berechnung der Diskriminante benutzen wir

$$p_V(u_1, u_2) = \prod_{i<j} (u_i - u_j)^2 = (u_1 - u_2)^2 = (u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2.$$

Dann ist $Q_V(y_1, y_2) = y_1^2 - 4y_2$, und $\Delta_\omega = Q_V(a, b) = a^2 - 4b$.

Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ nennt man $s_k(x_1, \dots, x_n) := x_1^k + \cdots + x_n^k$ eine *Potenzsumme.*

Die Potenzsummen sind symmetrische Polynome, also insbesondere Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen. Umgekehrt gilt:

1.5 Satz. *Jedes symmetrische Polynom in $\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_n]$ ist ein Polynom in den Potenzsummen $s_1, \dots, s_n$.*

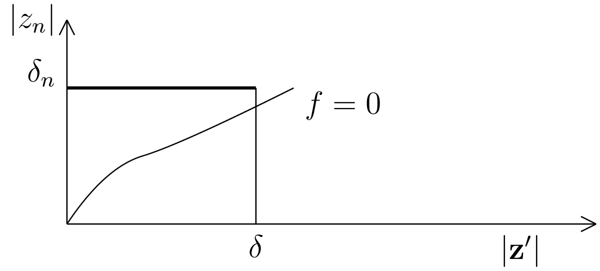
Auf den Beweis wird hier verzichtet (vgl. Cox/Little/O'Shea). Ein **Beispiel** ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) &= \frac{1}{2}[(x_1 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)] \\ &= \sigma_2(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

1.6 Satz. *Sei U eine offene Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^n$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $f(\mathbf{0}) = 0$. Ist f (genau genommen die Potenzreihenentwicklung von f im Nullpunkt) z_n-allgemein von der Ordnung $k \geq 1$, so gibt es Zahlen $\delta_n, \delta' > 0$, so dass gilt:*

1. *$f(\mathbf{z}', z_n) \neq 0$ für $|z_n| = \delta_n$ und $|\mathbf{z}'| < \delta'$.*
2. *Für jedes feste $\mathbf{z}'$ mit $|\mathbf{z}'| < \delta'$ hat die Gleichung $f(\mathbf{z}', z_n) = 0$ in $\Delta(0, \delta_n)$ genau k Lösungen (mit Vielfachheit gezählt).*

Beweis: Die Funktion $g(\zeta) := f(\mathbf{0}', \zeta)$ hat in $\zeta = 0$ eine isolierte Nullstelle der Ordnung k. Deshalb gibt es ein $\delta_n > 0$, so dass $g(\zeta) \neq 0$ für $0 < |\zeta| \leq \delta_n$ ist. Offensichtlich gibt es dann auch ein $\delta > 0$, so daß $f(\mathbf{z}', \zeta) \neq 0$ für $|\mathbf{z}'| \leq \delta$ und $|\zeta| = \delta_n$ ist. Sei $\varepsilon := \inf\{|f(\mathbf{z}', z_n)| : |\mathbf{z}'| \leq \delta \text{ und } |z_n| = \delta_n\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$.



Ist δ' mit $0 < \delta' < \delta$ klein genug gewählt, so ist

$$|f(\mathbf{z}', z_n) - f(\mathbf{0}', z_n)| < \varepsilon \leq |g(z_n)|$$

für $|\mathbf{z}'| < \delta'$ und $|z_n| = \delta_n$.

Sei nun $\mathbf{z}'$ festgehalten und $h(\zeta) := f(\mathbf{z}', z_n)$. Dann ist $|h(z_n) - g(z_n)| < |g(z_n)|$ für $|z_n| = \delta_n$. Aus dem Satz von Rouché folgt nun, dass h und g in $\Delta(0, \delta_n)$ gleich viele Nullstellen besitzen, dass also $f(\mathbf{z}', z_n) = 0$ für $|z_n| < \delta_n$ genau k Lösungen hat. ∎

1.7 Hilfssatz. *g und h seien holomorphe Funktionen in einer Veränderlichen. Hat h in a eine Nullstelle der Ordnung k, so ist*

$$\operatorname{res}_a\left(g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)}\right) = k \cdot g(a).$$

Beweis: Wir schreiben $h(z) = (z-a)^k \cdot r(z)$, mit $r(a) \neq 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)} &= g(z) \cdot \frac{k \cdot (z-a)^{k-1} r(z) + (z-a)^k r'(z)}{(z-a)^k r(z)} \\ &= g(z) \cdot \left[\frac{k}{z-a} + \frac{r'(z)}{r(z)}\right]. \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist holomorph, und der erste hat eine Polstelle erster Ordnung. Also ist

$$\operatorname{res}_a\left(g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)}\right) = \lim_{z \to a}(z-a) \cdot \left(g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)}\right) = k \cdot g(a).$$

■

1.8 Folgerung. *Sei h holomorph auf einer Umgebung U von $\overline{\Delta(0,\delta)} \subset \mathbb{C}$ und $\neq 0$ auf $\partial\Delta(0,\delta)$. Hat h in $\Delta(0,\delta)$ die Nullstellen $a_1,\dots,a_q$ mit Vielfachheiten $k_1,\dots,k_q$, so ist*

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{\zeta^m h'(\zeta)}{h(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{\nu=1}^{q} k_\nu a_\nu^m\,.$$

BEWEIS: Der Integrand ist meromorph, mit Polstellen bei $a_1,\dots,a_q$. Daher ist

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{\zeta^m h'(\zeta)}{h(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{\nu=1}^{q} \operatorname{res}_{a_\nu}\left(\frac{\zeta^m h'(\zeta)}{h(\zeta)}\right) = \sum_{\nu=1}^{q} k_\nu a_\nu^m\,.$$

■

1.9 Weierstraßscher Vorbereitungssatz. *Sei U eine offene Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^n$, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(\mathbf{0}) = 0$ und f z_n-allgemein von der Ordnung $k \geq 1$. Dann gibt es einen Poyzylinder P um $\mathbf{0}$ in U, ein Weierstraß-Polynom $\omega = \omega(\mathbf{z}', z_n)$ vom Grad k und eine holomorphe Funktion e, so dass gilt:*

1. *e hat keine Nullstellen in P.*
2. *$f = e \cdot \omega$ auf P.*

Dabei sind e und ω in der Nähe von $\mathbf{0}$ eindeutig bestimmt. Ist f ein Polynom in z_n, so gilt das auch für e.

BEWEIS: Da f z_n-allgemein von der Ordnung k ist, gibt es nach Satz 1.6 Zahlen $\delta_n, \delta' > 0$, so dass gilt:

1. $f(\mathbf{z}', z_n) \neq 0$ für $|z_n| = \delta_n$ und $|\mathbf{z}'| < \delta'$.
2. Für jedes feste $\mathbf{z}'$ mit $|\mathbf{z}'| < \delta'$ hat die Gleichung $f(\mathbf{z}', z_n) = 0$ in $\Delta(0,\delta_n)$ genau k Lösungen (mit Vielfachheit gezählt).

Seien etwa $\varphi_1(\mathbf{z}'),\dots,\varphi_k(\mathbf{z}')$ die Lösungen der Gleichung $f(\mathbf{z}', z_n) = 0$ in $\Delta(0,\delta_n)$. Dann setzen wir

$$\omega(\mathbf{z}', z_n) := \prod_{j=1}^{k} (z_n - \varphi_j(\mathbf{z}')).$$

Für jedes feste $\mathbf{z}'$ ist $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ ein normiertes Polynom vom Grad k :

$$\omega(\mathbf{z}', z_n) = z_n^k + a_{k-1}(\mathbf{z}') z_n^{k-1} + \cdots + a_0(\mathbf{z}').$$

Die Koeffizienten sind – bis auf das Vorzeichen – elementarsymmetrische Funktionen der Nullstellen. Außerdem gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{\zeta^m \cdot f_{\overline{\zeta}}(\mathbf{z}', \zeta)}{f(\mathbf{z}', \zeta)} \, d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\mathbf{z}')^m.$$

Da die linke Seite holomorph von $\mathbf{z}'$ abhängt, gilt das auch für die rechte Seite. Also sind alle Potenzsummen der Nullstellen holomorphe Funktionen von $\mathbf{z}'$. Da jedes symmetrische Polynom ein Polynom in den Potenzsummen ist, sind die Koeffizienten a_i holomorph.

Wir wissen, dass $f(\mathbf{0}', z_n) = z_n^k \cdot r(z_n)$ ist, mit einer holomorphen Funktion r und $r(0) \neq 0$. Das bedeutet, dass $\varphi_j(\mathbf{0}') = 0$ für $j = 1, \ldots, k$ ist, also $\omega(\mathbf{0}', z_n) = z_n^k$. Damit ist ω ein Weierstraß-Polynom.

Als nächstes setzen wir $e := f/\omega$. Für festes $\mathbf{z}'$ und $|z_n| \leq \delta_n$ besitzt

$$e(\mathbf{z}', z_n) = \frac{f(\mathbf{z}', z_n)}{\prod_{j=1}^{k}(z_n - \varphi_j(\mathbf{z}'))}$$

als Funktion von z_n keine Nullstelle mehr und ist offensichtlich holomorph in z_n. Nun benutzen wir die Cauchysche Integralformel:

$$e(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{e(\mathbf{z}', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta \ .$$

Da $\omega(\mathbf{z}', \zeta) \neq 0$ für $|\zeta| = \delta_n$ ist, ist der Integrand auf der rechten Seite holomorph in $\mathbf{z}'$, und aus den Sätzen über Parameterintegrale folgt, daß e holomorph in $\mathbf{z}'$ ist.

Zum Schluss ein paar Worte zur Eindeutigkeit. Für festes $\mathbf{z}'$ ist $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ durch die Nullstellen von f eindeutig festgelegt. Die Funktion e ergibt sich dann durch Division. Ist f ein Polynom in z_n, so kann man – da ω normiert ist – den Satz von der Division mit Rest in Polynomringen anwenden, und man erhält, dass auch e ein Polynom ist. ∎

Bemerkung. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen. Ist nämlich f z_n-allgemein von der Ordnung $k = 1$, so ist $f(\mathbf{0}', z_n) = c_1 z_n + c_2 z_n^2 + \cdots$, mit $c_1 \neq 0$. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial z_n}(\mathbf{0}', 0) \neq 0.$$

Das ist die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen (im Falle einer skalaren impliziten Funktion). Der Vorbereitungssatz von Weierstraß besagt nun, daß $f(\mathbf{z}', z_n) = u(\mathbf{z}', z_n) \cdot (z_n - a(\mathbf{z}'))$ ist, wobei a holomorph ist und u nahe $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ keine Nullstellen besitzt. Also ist

$$\{(\mathbf{z}', z_n) \,:\, f(\mathbf{z}', z_n) = 0\} = \{(\mathbf{z}', z_n) \,:\, z_n = a(\mathbf{z}')\}.$$

Das ist aber auch die Aussage des Satzes über implizite Funktionen.

1.10 Divisionsformel von Weierstraß. *Sei f holomorph nahe $\mathbf{0}$ und $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ ein Weierstraß-Polynom vom Grad k. Dann gibt es holomorphe Funktionen q und r auf einer Umgebung von $\mathbf{0}$, so dass gilt:*

1. *r ist ein Polynom vom Grad $< k$ in z_n.*
2. *Es ist $f = q \cdot \omega + r$.*

Dabei sind q und r in der Nähe von $\mathbf{0}$ eindeutig bestimmt. Ist f ein Polynom in z_n, so ist auch q ein Polynom in z_n.

BEWEIS: Wir können wieder Zahlen $\delta_n > 0$ und $\delta' > 0$ finden, so dass $\omega(\mathbf{z}', z_n)$ für $|z_n| = \delta_n$ und $|\mathbf{z}'| < \delta'$ keine Nullstellen besitzt. Für solche Punkte setzen wir

$$q(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)/\omega(\mathbf{z}', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta \, .$$

Offensichtlich ist q holomorph. Nun setzen wir $r := f - q \cdot \omega$. Die Cauchysche Integralformel liefert:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{z}', z_n) &= f(\mathbf{z}', z_n) - q(\mathbf{z}', z_n) \cdot \omega(\mathbf{z}', z_n) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta - q(\mathbf{z}', z_n) \cdot \omega(\mathbf{z}', z_n) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)\omega(\mathbf{z}', \zeta) - f(\mathbf{z}', \zeta)\omega(\mathbf{z}', z_n)}{\omega(\mathbf{z}', \zeta)(\zeta - z_n)} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)}{\omega(\mathbf{z}', \zeta)} \cdot \frac{\omega(\mathbf{z}', \zeta) - \omega(\mathbf{z}', z_n)}{\zeta - z_n} \, d\zeta \, . \end{aligned}$$

Die Funktion $g(\mathbf{z}', w) := \dfrac{\omega(\mathbf{z}', z_n + w) - \omega(\mathbf{z}', z_n)}{w}$ ist holomorph in $\mathbf{z}'$ und ein Polynom vom Grad $< k$ in w. Dann ist auch

$$r(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=\delta_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta)}{\omega(\mathbf{z}', \zeta)} g(\mathbf{z}', \zeta - z_n) \, d\zeta$$

ein Polynom vom Grad $< k$ in z_n.

Zur Eindeutigkeit: Es seien zwei Darstellungen gegeben,

$$f = q_1 \cdot \omega + r_1 = q_2 \cdot \omega + r_2.$$

Dann ist $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) \cdot \omega$. Auf der linken Seite steht ein Polynom in z_n vom Grad $< k$, die rechte Seite hat aber (bei festem $\mathbf{z}'$) k Nullstellen. Das ist nur möglich, wenn $r_1 - r_2 = 0$ ist. Aber dann folgt, dass auch $q_1 = q_2$ ist.

Ist f ein Polynom, so greift wieder der Satz von der Division mit Rest in $H_{n-1}[z_n]$.

■

§ 2 Die Algebra der Potenzreihen

Sei I ein beliebiger Integritätsbereich mit 1. Dann ist $I^* := I \setminus \{0\}$ eine kommutative Halbgruppe (in Bezug auf die Ring-Multiplikation), und die Menge $I^\times$ der Einheiten in I ist eine abelsche Gruppe.

Definition. Sei $a \in I^* \setminus I^\times$.

1. a heißt *irreduzibel* (oder *unzerlegbar*), falls gilt: Ist $a = a_1 \cdot a_2$ (mit $a_1, a_2 \in I^*$), so ist $a_1 \in I^\times$ oder $a_2 \in I^\times$.

2. a heißt *prim*, falls gilt: $a \,\Big|\, a_1 a_2 \quad \Longrightarrow \quad a \,\Big|\, a_1$ oder $a \,\Big|\, a_2$.

Irreduzible Elemente und Primelemente können auch in einer beliebigen kommutativen Halbgruppe betrachtet werden. In I^* ist jedes Primelement irreduzibel, und in manchen Ringen (z.B. in $\mathbb{Z}$ oder in $\mathbb{R}[X]$) ist sogar jedes irreduzible Element prim. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kann man irreduzible Elemente finden, die nicht prim sind.

Definition. I heißt ein *faktorieller Ring* (oder *ZPE-Ring*), wenn jedes Element $a \in I^* \setminus I^\times$ als Produkt von endlich vielen Primelementen geschrieben werden kann.

Die Zerlegung in Primelemente ist bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt. In einem ZPE-Ring ist jedes irreduzible Element prim, und je zwei Elemente haben einen *größten gemeinsamen Teiler* (ggT).

Jeder Hauptidealring ist ein ZPE-Ring, und in diesem Fall kann der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente a und b als Linearkombination von a und b geschrieben werden. Beispiele sind $\mathbb{Z}$ und $K[X]$ (mit einem beliebigen Körper K).

Ist I ein beliebiger Integritätsbereich, so wird der zugehörige Quotientenkörper mit $Q(I)$ bezeichnet. Die Menge der normierten Polynome $f(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in I$ bildet eine kommutative Halbgruppe $I^0[u]$. Deshalb kann man in $I^0[u]$ von Faktor-Zerlegung und Irreduzibilität sprechen.

2.1 Gaußsches Lemma. *Sei I ein faktorieller Ring und $Q = Q(I)$. Sind ω_1, ω_2 Elemente von $Q^0[u]$ mit $\omega_1\omega_2 \in I^0[u]$, so ist $\omega_\lambda \in I^0[u]$ für $\lambda = 1, 2$.*

Beweis: Für $\lambda = 1, 2$ sei $\omega_\lambda = a_{\lambda,0} + a_{\lambda,1} u + \cdots + a_{\lambda,s_\lambda - 1} u^{s_\lambda - 1} + u^{s_\lambda}$ mit $a_{\lambda,\nu} \in Q$. Es gibt also Elemente $d_\lambda \in I$, so dass $d_\lambda \cdot \omega_\lambda \in I[u]$ ist. Wir können d_λ so wählen, dass die Koeffizienten von $d_\lambda \cdot \omega_\lambda$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen (man spricht auch von *primitiven Polynomen*).

Wir setzen $d := d_1 d_2$ und nehmen an, dass es ein Primelement p mit $p \,\Big|\, d$ gibt. Dann teilt p nicht alle Koeffizienten $d_\lambda a_{\lambda,\nu}$ von $d_\lambda \cdot \omega_\lambda$ gleichzeitig. Sei μ_λ minimal, so dass gilt: $p \nmid d_\lambda a_{\lambda,\mu_\lambda}$. Dann folgt

$$(d_1\omega_1)(d_2\omega_2) = \cdots + u^{\mu_1 + \mu_2}(d a_{1,\mu_1} a_{2,\mu_2} + \text{ etwas, das durch } p \text{ teilbar ist}) + \cdots .$$

Da I faktoriell ist, teilt p das Produkt $(d_1 a_{1,\mu_1})(d_2 a_{2,\mu_2})$ nicht. Deshalb ist der Koeffizient $u^{\mu_1+\mu_2}$ nicht durch p teilbar. Aber weil $\omega_1\omega_2$ Koeffizienten in I hat, muss jeder Teiler von d jeden Koeffizienten von $d\cdot\omega_1\omega_2 = (d_1\omega_1)(d_2\omega_2)$ teilen. Das ist ein Widerspruch!

Wenn d keinen Primteiler besitzt, muss es eine Einheit sein. Aber dann sind d_1 und d_2 auch Einheiten, und $\omega_\lambda = d_\lambda^{-1}(d_\lambda\omega_\lambda)$ gehört zu $I^0[u]$. ∎

2.2 Satz. *Sei I ein Integritätsbereich, in dem die Aussage des Gaußschen Lemmas erfüllt ist: „Sind ω_1, ω_2 Elemente von $Q^0[u]$ mit $\omega_1\omega_2 \in I^0[u]$, so ist $\omega_\lambda \in I^0[u]$ für $\lambda = 1, 2$.“ Dann gilt:*

1. *Ist $a \in I^0[u]$ prim in $Q[u]$, so auch in $I^0[u]$.*
2. *Ist $a \in I^0[u]$ reduzibel in $Q[u]$, so auch in $I^0[u]$.*
3. *Jedes Element in $I^0[u]$ ist Produkt von endlich vielen Primelementen.*
4. *Ist $a \in I^0[u]$ irreduzibel, so ist a auch prim.*

BEWEIS: 1. Sei $a \in I^0[u]$ ein Primelement in $Q[u]$. Teilt a ein Produkt $a'a''$ in $I^0[u]$, so auch in $Q[u]$. Deshalb teilt es einen der Faktoren in $Q[u]$. Es gebe z.B. ein Element $b \in Q[u]$ mit $a' = ab$. Nach Gauß ist $b \in I^0[u]$. Das zeigt, daß a prim in $I^0[u]$ ist.

2. Sei $a \in I^0[u]$ ein Produkt von Nicht-Einheiten $a_1, a_2 \in Q[u]$. Ist $c_i \in Q$ der höchste Koeffizient von a_i, so ist $c_1c_2 = 1$, $c_i^{-1}a_i \in Q^0[u]$ und $a = (c_1^{-1}a_1)(c_2^{-1}a_2)$. Nach Gauß liegen die $c_i^{-1}a_i$ in $I^0[u]$, und sie können dort keine Einheiten sein. Also ist a reduzibel in $I^0[u]$.

3. Jedes Element $a \in I^0[u]$ ist ein endliches Produkt $a = a_1 \cdots a_l$ von Primelementen in $Q[u]$. Wie in (2) kann man die a_i normiert wählen. Indem man das Gaußsche Lemma mehrmals anwendet, kann man zeigen, dass die a_i zu $I^0[u]$ gehören. Nach (1) sind sie auch prim in $I^0[u]$.

4. Sei $a \in I^0[u]$ irreduzibel. Da a ein Produkt von Primelementen ist, muss es selbst prim sein. ∎

Wir wenden diese Ergebnisse jetzt auf $I = H_n$ an.

Definition. Sei $f \in H_n$, $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda$ die Entwicklung von f nach homogenen Polynomen. Unter der *Ordnung* von f verstehen wir die Zahl

$$\operatorname{ord}(f) := \min\{\lambda \in \mathbb{N}_0 \,:\, p_\lambda \neq 0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}(0) := \infty.$$

Dann gilt:

1. $\operatorname{ord}(f) \geq 0$ gilt für jedes Element $f \in H_n$.
2. $\operatorname{ord}(f) = 0 \iff f$ ist eine Einheit.
3. $\operatorname{ord}(f_1 \cdot f_2) = \operatorname{ord}(f_1) + \operatorname{ord}(f_2)$.

2.3 Theorem. *H_n ist ein faktorieller Ring.*

Beweis: Wir führen Induktion nach n.

Ist $n = 0$, so ist $H_n = \mathbb{C}$ ein Körper und jedes Element $\neq 0$ eine Einheit. In diesem Fall ist nichts zu zeigen.

Nun sei der Satz für $n-1$ bewiesen, $f \in H_n$ eine Nicht-Einheit, $f \neq 0$. Ist f zerlegbar und $f = f_1 \cdot f_2$ eine echte Zerlegung, so ist $\operatorname{ord}(f) = \operatorname{ord}(f_1) + \operatorname{ord}(f_2)$, und die Ordnungen der Faktoren sind echt kleiner als die Ordnung von f. Deshalb kann f in endlich viele irreduzible Faktoren zerlegt werden.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes irreduzible Element f prim ist. Wir nehmen an, dass f ein Produkt $f_1 f_2$ teilt, mit $f_\lambda \in (H_n)^*$ für $\lambda = 1, 2$. Es gibt eine Scherung σ, so daß $f_1 \circ \sigma$, $f_2 \circ \sigma$ und $f \circ \sigma$ z_n-allgemein sind. Wenn wir zeigen können, dass $f \circ \sigma$ einen Faktor $f_\lambda \circ \sigma$ teilt, dann gilt dies auch für f und f_λ. Deshalb können wir annehmen, dass f_1, f_2 und f z_n-allgemein sind.

Nach dem Vorbereitungssatz gibt es Einheiten e_1, e_2, e und Weierstraß-Polynome $\omega_1, \omega_2, \omega$, so dass $f_1 = e_1 \cdot \omega_1$, $f_1 = e_2 \cdot \omega_2$ und $f = e \cdot \omega$ gilt. Dann teilt ω das Produkt $\omega_1\omega_2$. Ist $\omega_1\omega_2 = q \cdot \omega$ mit $q \in H_n$, so ergibt die Divisions-Formel, dass q eindeutig bestimmt und ein Polynom in z_n ist. Also teilt ω das Produkt $\omega_1\omega_2$ sogar in $H^0_{n-1}[z_n]$. Da ω in H_n irreduzibel ist, ist es auch in $H^0_{n-1}[z_n]$ irreduzibel. Nach Induktionsvoraussetzung ist H_{n-1} faktoriell, also ω sogar prim in $H^0_{n-1}[z_n]$. Also muss ω einen der Faktoren ω_1 oder ω_2 in $H^0_{n-1}[z_n]$ teilen und damit auch in H_n. Das bedeutet: $f \,\Big|\, f_1$ oder $f \,\Big|\, f_2$ in H_n. ∎

Ist $\omega \in H_n[u]$ ein normiertes Polynom vom Grad s, so gibt es einen Polyzylinder P um $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$, wo alle Koeffizienten von ω gegen holomorphe Funktionen konvergieren. Wir können deshalb ω als parametrisierte Familie von Polynomen in einer Variablen u auffassen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $\omega(\mathbf{0}, u)$ in Linearfaktoren, und das gilt auch für jedes $\omega(\mathbf{z}, u)$, $\mathbf{z} \in P$. Wir zeigen jetzt, dass solche Zerlegungen auf einer Umgebung von $\mathbf{0}$ simultan von einer Zerlegung von ω in $H^0_n[u]$ induziert werden.

2.4 Henselsches Lemma. *Sei $\omega(\mathbf{0}, u) = \prod_{\lambda=1}^{l}(u - c_\lambda)^{s_\lambda}$ die Zerlegung in Linearfaktoren (mit $c_\nu \neq c_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $s_1 + \cdots + s_l = s$). Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $\omega_1, \ldots, \omega_l \in H^0_n[u]$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\deg(\omega_\lambda) = s_\lambda$, *für* $\lambda = 1, \ldots, l$.
2. $\omega_\lambda(\mathbf{0}, u) = (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$.

3. $\omega = \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_l$.

BEWEIS: Wir führen Induktion nach l. Der Fall $l = 1$ ist trivial. Nun nehmen wir an, daß der Satz schon für $l - 1$ bewiesen wurde.

Sei zunächst $u = 0$ eine Nullstelle von $\omega(\mathbf{0}, u)$. O.B.d.A. können wir dann annehmen, daß $c_1 = 0$ ist, also $\omega(\mathbf{0}, u) = u^{s_1} \cdot h(u)$, wobei h ein Polynom über $\mathbb{C}$ mit $\deg(h) = s - s_1$ und $h(0) \neq 0$ ist. Damit ist ω u-allgemein von der Ordnung s_1, und es gibt eine Einheit $e \in H_n^0[u]$ und ein Weierstraß-Polynom ω_1 mit $\omega = e \cdot \omega_1$. Da $\omega_1(\mathbf{0}, u) = u^{s_1}$ ist, folgt:

$$e(\mathbf{0}, u) = h(u) = \prod_{\lambda=2}^{l} (u - c_\lambda)^{s_\lambda}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente $\omega_2, \ldots, \omega_l \in H_n^0[u]$ mit $\deg(\omega_\lambda) = s_\lambda$, $\omega_\lambda(\mathbf{0}, u) = (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$ und $e = \omega_2 \cdots \omega_l$. Also ist $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l$ die gewünschte Zerlegung.

Ist $\omega(\mathbf{0}, 0) \neq 0$, so ersetzen wir ω durch $\omega'(\mathbf{z}, u) := \omega(\mathbf{z}, u + c_1)$ und erhalten wie oben eine Zerlegung $\omega' = \omega_1' \cdots \omega_l'$. Dann setzen wir

$$\omega_\lambda(\mathbf{z}, u) := \omega_\lambda'(\mathbf{z}, u - c_1).$$

Das ergibt eine Zerlegung $\omega = \omega_1 \cdots \omega_l$ im Sinne des Satzes. Die Eindeutigkeit zeigt man ebenfalls durch Induktion. ∎

Sei jetzt R ein kommutativer Ring mit 1. Bekanntlich wird ein R-Modul M *noethersch* genannt, wenn jeder Untermodul $N \subset M$ endlich erzeugt ist. Der Ring R selbst ist *noethersch*, wenn er ein noetherscher R-Modul ist, wenn also jedes Ideal in R (als Untermodul) endlich erzeugt ist. Jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset R$$

wird dann stationär, d.h., es gibt ein k_0, so daß $I_k = I_{k_0}$ für $k \geq k_0$ ist.

2.5 Lemma. *Ist R ein noetherscher Ring, so ist R^q ein noetherscher R-Modul.*

BEWEIS: Wir führen Induktion nach q.

Der Fall $q = 1$ ist trivial. Nun sei $q \geq 2$ und das Lemma für $q - 1$ schon bewiesen. Sei $M \subset R^q$ ein R-Untermodul. Dann ist

$$I := \{r \in R : \exists \, \mathbf{r}' \in R^{q-1} \text{ mit } (r, \mathbf{r}') \in M\}$$

ein Ideal in R und als solches endlich erzeugt durch Elemente $r_1, \ldots, r_l$. Zu jedem r_λ gibt es ein Element $\mathbf{r}_\lambda' \in R^{q-1}$, so dass $\mathbf{r}_\lambda := (r_\lambda, \mathbf{r}_\lambda')$ in M liegt.

Die Menge $M' := M \cap (\{0\} \times R^{q-1})$ kann mit einem R-Untermodul von R^{q-1} identifiziert werden, ist nach Induktions-Annahme also endlich erzeugt. Seien $\mathbf{r}_\lambda = (0, \mathbf{r}_\lambda')$, $\lambda = l + 1, \ldots, p$, Erzeugende von M'.

Ein beliebiges Element $\mathbf{x} \in M$ kann in der Form $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}')$ mit $x_1 \in I$ geschrieben werden. Dann ist $x_1 = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda r_\lambda$, $a_\lambda \in R$, und

$$\mathbf{x} - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda = \big(0, \mathbf{x}' - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}'_\lambda\big) \in M'.$$

Das bedeutet, dass es Elemente $a_{l+1}, \dots, a_p \in R$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{x} - \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda = \sum_{\lambda=l+1}^{p} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda.$$

Also bildet $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p\}$ ein Erzeugendensystem für M. ∎

2.6 Rückertscher Basissatz. *Der Ring H_n der konvergenten Potenzreihen ist noethersch.*

Beweis: Wir führen Induktion nach n. Ist $n = 0$, so ist $H_n = \mathbb{C}$ und die Behauptung trivial. Jetzt sei $n \geq 1$ und der Satz für $n-1$ bewiesen. $I \subset H_n$ sei ein Ideal $\neq 0$ und $g \neq 0$ ein Element von I. O.B.d.A. können wir außerdem annehmen, dass g z_n-allgemein von der Ordnung s ist.

Sei $\Phi = \Phi_g : H_n \to (H_{n-1})^s$ der *Weierstraß-Homomorphismus*, der wie folgt definiert wird: Zu jedem $f \in H_n$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $q \in H_n$ und $r = r_0 + r_1 z_n + \cdots + r_{s-1} z_n^{s-1} \in H_{n-1}[z_n]$, so dass $f = q \cdot g + r$ ist. Sei $\Phi(f) := (r_0, \dots, r_{s-1})$.

Offensichtlich ist Φ ein H_{n-1}-Modul-Homomorphismus. Nach Induktionsvoraussetzung ist H_{n-1} noethersch und deshalb $(H_{n-1})^s$ ein noetherscher H_{n-1}-Modul. Da $M := \Phi(I)$ ein H_{n-1}-Untermodul ist, ist M endlich erzeugt. Seien $\mathbf{r}_\lambda = (r_0^{(\lambda)}, \dots, r_{s-1}^{(\lambda)})$, $\lambda = 1, \dots, l$, Erzeugende von M.

Ist $f \in I$ beliebig, so gibt es eine Darstellung $f = q \cdot g + r$ mit $r = r_0 + r_1 z_n + \cdots + r_{s-1} z_n^{s-1}$, und es gibt Elemente $a_1, \dots, a_l \in H_{n-1}$, so dass $(r_0, r_1, \dots, r_{s-1}) = \Phi_g(f) = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \mathbf{r}_\lambda$ ist. Wir erhalten also die Darstellung

$$f = q \cdot g + \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \cdot \big(r_0^{(\lambda)} + r_1^{(\lambda)} z_n + \cdots + r_{s-1}^{(\lambda)} z_n^{s-1}\big).$$

Die Menge $\{g, r^{(1)}, \dots, r^{(l)}\}$ mit $r^{(\lambda)} = r_0^{(\lambda)} + r_1^{(\lambda)} z_n + \cdots + r_{s-1}^{(\lambda)} z_n^{s-1}$ bildet ein Erzeugendensystem von I. ∎

Eine *lokale holomorphe Funktion* in einem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist ein Paar (U, f), bestehend aus einer offenen Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und einer holomorphen Funktion f auf U. Zwei lokale Funktionen (U, f) und (V, g) in $\mathbf{z}_0$ werden äquivalent genannt, falls es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset U \cap V$ gibt, so dass $f|_W = g|_W$ ist. Die

Äquivalenzklasse einer lokalen holomorphen Funktion (U, f) in $\mathbf{z}_0$ nennt man den *Keim* von f in $\mathbf{z}_0$. Man bezeichnet diesen Keim mit dem Symbol $f_{\mathbf{z}_0}$. Die Menge der holomorphen Funktionskeime in $\mathbf{z}_0$ wird mit $\mathcal{O}_{\mathbf{z}_0}$ bezeichnet.

Wegen des Identitätssatzes ist der Keim $f_{\mathbf{z}_0}$ eindeutig bestimmt durch die Potenzreihenentwicklung $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ eines beliebigen Repräsentanten in $\mathbf{z}_0$. Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt nur von den Koeffizienten und nicht vom Entwicklungspunkt ab. Deshalb kann $\mathcal{O}_{\mathbf{z}_0}$ mit dem lokalen Ring H_n identifiziert werden. Lediglich der identifizierende Isomorphismus hängt vom Punkt ab.

Ein *Pseudopolynom* vom Grad s über einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist eine holomorphe Funktion ω auf $G \times \mathbb{C}$, die durch einen Ausdruck

$$\omega(\mathbf{z}, u) = u^s + h_1(\mathbf{z})u^{s-1} + \cdots + h_s(\mathbf{z})$$

mit $h_1, \ldots, h_s \in \mathcal{O}(G)$ gegeben ist, also ein Element von $\mathcal{O}(G)^0[u]$.

Bekanntlich ist $R := \mathcal{O}(G)$ ein Integritätsbereich. Mit Q bezeichnen wir den Quotientenkörper von R. Die Gruppe $Q[u]^\times$ der Einheiten im Integritätsbereich $Q[u]$ besteht aus den Polynomen $\neq 0$ vom Grad 0. Ist $R^* = R \setminus \{0\}$ die multiplikative Untergruppe der nirgends identisch verschwindenden holomorphen Funktionen auf G, so ist $Q[u]^\times \cap R = R^*$.

2.7 Satz. *Sind $\omega_1, \omega_2 \in Q^0[u]$ Pseudopolynome mit $\omega_1 \cdot \omega_2 \in R^0[u]$, so liegen ω_1 und ω_2 in $R^0[u]$.*

BEWEIS: Ist $\omega = u^s + (f_1/g_1)u^{s-1} + \cdots + (f_s/g_s)$ ein beliebiges Element von $Q^0[u]$, so liegen die g_i in R^*. Wegen des Identitätssatzes sind auch für alle $\mathbf{z} \in G$ die Keime $g_{i,\mathbf{z}} \neq 0$.

Für einen Augenblick lassen wir den Index i weg. Ist der Quotient von $f_\mathbf{z}$ und $g_\mathbf{z}$ holomorph, also $f_\mathbf{z} = h_\mathbf{z} \cdot g_\mathbf{z}$ mit $h_\mathbf{z} \in \mathcal{O}_\mathbf{z}$, so ist $h_\mathbf{z}$ eindeutig bestimmt, und es gibt eine Kugel B um $\mathbf{z}$ in G, so dass $h_\mathbf{z}$ durch eine holomorphe Funktion h auf B repräsentiert wird und die Gleichung $f = h \cdot g$ auf ganz B gilt. Ist der Quotient von $f_\mathbf{z}$ und $g_\mathbf{z}$ für jedes $\mathbf{z}$ holomorph, so wird durch $\mathbf{z} \mapsto h_\mathbf{z}(\mathbf{z})$ eine globale holomorphe Funktion h auf G definiert. Wir können $h = f/g$ schreiben.

Liegt also $\omega_\mathbf{z} := u^s + ((f_1)_\mathbf{z}/(g_1)_\mathbf{z})u^{s-1} + \cdots + ((f_s)_\mathbf{z}/(g_s)_\mathbf{z})$ für jedes $\mathbf{z} \in G$ in $\mathcal{O}^0_\mathbf{z}[u]$, so ist $\omega \in R^0[u]$.

Jetzt wenden wir das Gaußsche Lemma in jedem der faktoriellen Ringe $\mathcal{O}_\mathbf{z} \cong H_n$ an. Sei $\omega := \omega_1 \cdot \omega_2$. Dann ist $(\omega_1)_\mathbf{z} \cdot (\omega_2)_\mathbf{z} = \omega_\mathbf{z} \in \mathcal{O}^0_\mathbf{z}[u]$ in jedem $\mathbf{z} \in G$. Also sind die Koeffizienten der $(\omega_i)_\mathbf{z}$ holomorph, und nach den obigen Bemerkungen bedeutet das, dass die $\omega_i \in R^0[u]$ liegen. ∎

Nun folgt unmittelbar:

2.8 Satz. *Ist $G \in \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $R = \mathcal{O}(G)$, so ist $R^0[u]$ eine „faktorielle Halbgruppe", d.h., jedes Element ist Produkt endlich vieler Primelemente und jedes irreduzible Element ist prim.*

Die einzige Einheit in $R^0[u]$ ist die Eins (das einzige *normierte* Polynom vom Grad 0). Irreduzible Elemente sind Polynome vom Grad ≥ 1.

Sei nun wieder G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, $R = \mathcal{O}(G)$ und $Q = Q(R)$. Sind ω_1, ω_2 Pseudopolynome in $R^0[u]$, so gibt es eine Linearkombination $\omega_0 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \neq 0$ in $Q[u]$ mit minimalem Grad. Das ist ein größter gemeinsamer Teiler von ω_1 und ω_2 in $Q[u]$. Sei h das Produkt der Nenner der Koeffizienten von r_1 und r_2. Dann ist h eine Einheit in $Q[u]$ und

$$\omega := h\omega_0 = q_1\omega_1 + q_2\omega_2, \text{ mit } q_1 := r_1 h,\ q_2 := r_2 h \in R[u].$$

Offensichtlich ist auch ω ein größter gemeinsamer Teiler von ω_1 und ω_2 in $Q[u]$, aber ω ist Linearkombination von ω_1 und ω_2 in $R[u]$.

Hat $\omega \in R^0[u]$ positiven Grad, so gibt es eine eindeutige Primfaktorzerlegung $\omega = \omega_1 \cdots \omega_l$. Der Grad jedes einzelnen ω_i ist positiv. Wir sagen, ω ist ein *Pseudopolynom ohne mehrfache Faktoren*, falls die ω_i alle paarweise verschieden sind.

Die *(algebraische) Ableitung* eines Pseudopolynoms ist wie folgt definiert: Ist $\omega = \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu u^\nu$, so ist $D(\omega) := \sum_{\nu=1}^{s} \nu \cdot a_\nu \cdot u^{\nu-1}$ (also $D(\omega) = \dfrac{\partial\omega}{\partial u}$). Dann ist

$$\begin{aligned} D(\omega_1 + \omega_2) &= D(\omega_1) + D(\omega_2), \\ D(\omega_1 \cdot \omega_2) &= D(\omega_1) \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot D(\omega_2). \end{aligned}$$

2.9 Satz. *Ein Element $\omega \in R^0[u]$ besitzt genau dann keine mehrfachen Faktoren, wenn ein größter gemeinsamer Teiler von ω und $D(\omega)$ eine Funktion $h \in \mathcal{O}(G) \setminus \{0\}$ ist.*

BEWEIS: Hat ω das irreduzible Pseudopolynom ω_i als mehrfachen Faktor, so ist auch $D(\omega)$ durch ω_i teilbar. Das gilt auch in $Q[u]$. Also kann ein größter gemeinsamer Teiler keine Funktion $h \in R^*$ sein.

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß $\omega = \prod_i \omega_i$ keine mehrfachen Faktoren besitzt! Es ist

$$D(\omega) = \sum_i \omega_1 \cdots D(\omega_i) \cdots \omega_l.$$

Wenn der Grad des größten gemeinsamen Teilers γ von ω und $D(\omega)$ positiv ist, dann ist γ ein Produkt gewisser ω_i. Also teilt mindestens ein ω_i sowohl ω als auch $D(\omega)$. Aber dann teilt ω_i das Produkt $\omega_1 \cdots D(\omega_i) \cdots \omega_l$ und daher $D(\omega_i)$. Das ist aber unmöglich, denn $D(\omega_i)$ hat niedrigeren Grad. Also muss der Grad des größten gemeinsamen Teilers 0 sein, d.h., er ist eine Funktion $h \in R^*$. ∎

Ist $\omega \in R^0[u]$ ein Pseudopolynom über G, so ist die Diskriminante Δ_ω eine holomorphe Funktion auf G, deren Nullstellenmenge wir mit D_ω bezeichnen. Besitzt ω

keine mehrfachen Faktoren, so gibt es eine Linearkombination h von ω und $D(\omega)$ in R^*.

Sei $\mathbf{z} \in G$ ein Punkt mit $h(\mathbf{z}) \neq 0$. Dann ist der größte gemeinsame Teiler der Polynome $\omega(\mathbf{z}, u), D(\omega)(\mathbf{z}, u) \in \mathbb{C}[u]$ offensichtlich $= 1$. Das bedeutet, dass $\omega(\mathbf{z}, u)$ keine mehrfachen Faktoren besitzt, dass also alle Nullstellen verschieden sind. Damit ist $\Delta_\omega(\mathbf{z}) \neq 0$ und D_ω nirgends dicht.

Sei f eine nirgends identisch verschwindende holomorphe Funktion in einer Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^{n+1}$ mit $f(\mathbf{0}) = 0$. Nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation folgt aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz, dass $f_\mathbf{0} = e_\mathbf{0} \cdot \omega_\mathbf{0}$ ist, mit einer Einheit $e_\mathbf{0} \in H_{n+1}$ und einem Weierstraßpolynom $\omega_\mathbf{0} \in H_n[z_{n+1}]$. Wir können die Keime lokal durch holomorphe Funktionen repräsentieren. Es gibt ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$, das den Nullpunkt enthält, eine Kreisscheibe $D = \Delta(0, r)$, eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion e auf $G \times D$ und ein Pseudopolynom ω über G, so dass $f = e \cdot \omega$ auf $G \times D$ gilt. Wir können annehmen, dass $A \cap (G \times \partial D) = \varnothing$ ist. Dann folgt aus dem Beweis des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes, dass für jedes $\mathbf{z} \in G$ die Nullstellen von $\omega(\mathbf{z}, u)$ in D liegen. Also gilt:

$$A \cap (G \times D) = \{(\mathbf{z}, u) \in G \times \mathbb{C} \,:\, \omega(\mathbf{z}, u) = 0\}.$$

Man kann annehmen, dass ω keine mehrfachen Faktoren besitzt. Dann verschwindet die Diskriminante von ω nicht identisch. So ist die Untersuchung von analytischen Hyperflächen zurückgeführt auf die Untersuchung von Nullstellen von Pseudopolynomen mit nicht identisch verschwindender Diskriminante.

2.10 Satz. *f und g seien holomorphe Funktionen in der Nähe eines Punktes $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$. Sind die Keime $f_{\mathbf{z}_0}, g_{\mathbf{z}_0}$ in $\mathcal{O}_{\mathbf{z}_0}$ teilerfremd, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$, so dass für jedes $\mathbf{z} \in U$ die Keime $f_\mathbf{z}$ und $g_\mathbf{z}$ in $\mathcal{O}_\mathbf{z}$ teilerfremd sind.*

BEWEIS: Wir können annehmen, dass $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ ist und $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ Weierstraßpolynome (in z_n) sind. Da $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ in H_n teilerfremd sind, sind sie es auch in $H^0_{n-1}[z_n]$. Ist Q der Quotientenkörper von H_{n-1}, so folgt aus dem Gaußschen Lemma, dass $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ teilerfremd in $Q[z_n]$ sind.

Wir können den größten gemeinsamen Teiler $h \in (H_{n-1})^*$ von $f_\mathbf{0}$ und $g_\mathbf{0}$ als Linearkombination

$$h = a \cdot f_\mathbf{0} + b \cdot g_\mathbf{0}$$

darstellen, wobei $a, b \in H_{n-1}[z_n]$ sind. Ist $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ eine genügend kleine Umgebung des Ursprungs, so konvergieren die Potenzreihen a, b gegen Pseudopolynome über U' und h gegen eine holomorphe Funktion auf U', die nicht identisch verschwindet.

Sei nun $\mathbf{w} = (\mathbf{w}', w_n)$ ein Punkt von U. Ist $\varphi_\mathbf{w}$ ein gemeinsamer Teiler von $f_\mathbf{w}$ und $g_\mathbf{w}$, so teilt dieser $h_\mathbf{w}$, ein Polynom vom Grad 0 (als Polynom in z_n). Also hängt $\varphi_\mathbf{w}$ nicht von z_n ab. Da $\varphi_\mathbf{w}$ nicht identisch verschwindet, muss es das Produkt einer

Einheit und eines Weierstraßpolynoms vom Grad 0 sein. Dann ist aber $\varphi_{\mathbf{w}}$ selbst eine Einheit, und $f_{\mathbf{w}}$ und $g_{\mathbf{w}}$ sind teilerfremd. ∎

2.11 Nullstellensatz für Hyperflächen. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine Hyperfläche, also eine analytische Teilmenge, die lokal immer durch eine Gleichung beschrieben werden kann.*

1. *Zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in A$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$, so dass gilt:*
   (a) *$U \cap A = \{\mathbf{z} \in U \,:\, f(\mathbf{z}) = 0\}$.*
   (b) *Ist h eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $h|_A = 0$, so gibt es eine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset U \cap V$ und eine holomorphe Funktion q auf W, so dass $h|_W = q \cdot (f|_W)$ ist.*
2. *Ist $\widetilde{f}$ irgend eine andere holomorphe Funktion auf U mit $\{\mathbf{z} \in U \,:\, \widetilde{f}(\mathbf{z}) = 0\} = U \cap A$, so gibt es für jede holomorphe Funktion h auf einer Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $h|_A = 0$ eine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset U \cap V$, eine holomorphe Funktion $\widetilde{q}$ auf W und ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $h^k|_W = \widetilde{q} \cdot (\widetilde{f}|_W)$ ist. Ist $\widetilde{f}$ in $\mathbf{z}_0$ prim, so kann man $k = 1$ wählen.*

BEWEIS: Wir nehmen an, dass $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ ist. Dann betrachten wir eine beliebige Funktion $\widetilde{f}$ nahe $\mathbf{0}$, deren Nullstellenmenge gerade A ist. Nach Wahl geeigneter Koordinaten können wir eine Einheit e und ein Weierstraßpolynom $\widetilde{\omega}$ in z_n finden, so dass $\widetilde{f} = e \cdot \widetilde{\omega}$ ist. Wir wählen eine Umgebung $U = U' \times U''$ des Ursprungs, so dass gilt:

1. $A \cap U = \{(\mathbf{z}', z_n) \in U \,:\, \widetilde{\omega}(\mathbf{z}', z_n) = 0\}$.
2. Es gibt eine Primfaktorzerlegung $\widetilde{\omega} = \omega_1^{k_1} \cdots \omega_l^{k_l}$ auf U.

Wir setzen $\omega := \omega_1 \cdots \omega_l$. Das ist ein Pseudopolynom ohne mehrfache Faktoren über U', das ebenfalls A als Nullstellenmenge hat.

Nun sei h eine holomorphe Funktion, die auf A verschwindet. O.B.d.A. sei h auch auf U definiert. Nach der Divisionsformel gibt es eine holomorphe Funktion q und ein Pseudopolynom r mit $\deg(r) < \deg(\omega)$, so dass gilt:

$$h = q \cdot \omega + r.$$

Da ω keine mehrfachen Faktoren besitzt, ist der größte gemeinsame Teiler von ω und $\partial\omega/\partial z_n$ eine nicht identisch verschwindende holomorphe Funktion g in den Variablen $z_1, \ldots, z_{n-1}$, und wir können Pseudopolynome q_1, q_2 finden, so dass gilt:

$$g = q_1 \cdot \omega + q_2 \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z_n}.$$

Eventuell muss man die Umgebung etwas verkleinern, aber wir bezeichnen sie weiterhin als U.

Wenn das Polynom $\omega(\mathbf{z}'_0, \zeta)$ (für ein festes $\mathbf{z}'_0 \in U'$) in $\mathbb{C}[\zeta]$ eine mehrfache Nullstelle ζ_0 hat, dann ist $\omega(\mathbf{z}'_0, \zeta_0) = \partial\omega/\partial z_n(\mathbf{z}'_0, \zeta_0) = 0$ und deshalb $g(\mathbf{z}'_0) = 0$. Das bedeutet: Ist $g(\mathbf{z}') \neq 0$, so hat $\omega(\mathbf{z}', \zeta)$ genau $s := \deg(\omega)$ verschiedene Nullstellen. Da h auf $N(\omega)$ verschwindet, muss $h(\mathbf{z}', \zeta)$ zumindest diese s verschiedenen Nullstellen besitzen. Da $\deg(r) < s$ ist, muss $r(\mathbf{z}', \zeta)$ das Nullpolynom in $\mathbb{C}[\zeta]$ sein. Die Koeffizienten von r verschwinden also auf $U' \setminus N(g)$ und wegen des Identitätssatzes dann auf ganz U'. Damit ist $r = 0$ und $h = q \cdot \omega$.

Die Funktion $f := \omega$ erfüllt demnach die Bedingungen des ersten Teils des Satzes. Sei nun $k := \max(k_1, \ldots, k_l)$. Dann ist $h^k = \omega^k \cdot q^k$. Ist $\omega^k = \widetilde{\omega} \cdot p$, so ist $h^k = \widetilde{f} \cdot (e^{-1} \cdot p \cdot q^k)$. Das ergibt den zweiten Teil des Satzes.

Ist $\widetilde{f} = e \cdot \widetilde{\omega}$, so ist $\widetilde{\omega} = \omega_1$ und $h = q \cdot \omega_1 = \widetilde{f} \cdot (e^{-1} q)$. ∎

Die Funktion f aus dem ersten Teil des Beweises nennen wir eine *minimale definierende Funktion* für A.

§ 3 Verzweigte Überlagerungen

Wir wollen jetzt die Geometrie analytischer Hyperflächen genauer studieren. Lokal und nach einer geeigneten Koordinatentransformation können wir annnehmen, dass die Hyperfläche A die Nullstellenmenge eines Pseudopolynoms ω über einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist. Wir nehmen ferner an, dass der Nullpunkt in G liegt und dass $\omega = \omega(\mathbf{z}, u) \in \mathcal{O}(G)^0[u]$ im Nullpunkt u-allgemein ist. Verkleinert man G notfalls, so kann man erreichen, dass es eine Scheibe $D = \{u \in \mathbb{C} : |u| < r\}$ gibt, so dass $A \cap (G \times \partial D) = \varnothing$ ist. Dann liegen alle Nullstellen von ω in $G \times \mathbb{C}$ bereits in $G \times D$ (vgl. die Bemerkung am Ende des vorigen Paragraphen).

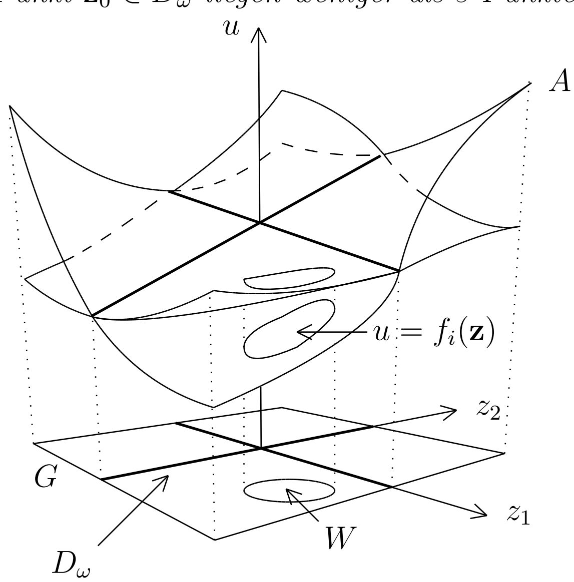
Wir können ω in Primfaktoren zerlegen. Da jede Potenz eines Primfaktors in den gleichen Punkten wie der Primfaktor selbst verschwindet, können wir annehmen, daß ω keine mehrfachen Faktoren besitzt. Dann verschwindet die Diskriminante Δ_ω nicht identisch in G. Es sei $D_\omega = \{\mathbf{z} \in G : \Delta_\omega(\mathbf{z}) = 0\}$.

3.1 Satz (über verzweigte Überlagerungen). *Unter den beschriebenen Voraussetzungen gilt:*

Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus D_\omega$, so gibt es eine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset G \setminus D_\omega$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ auf W mit $f_i(\mathbf{z}) \neq f_j(\mathbf{z})$ für $i \neq j$ und $\mathbf{z} \in W$, so dass gilt:

$$\omega(\mathbf{z}, u) = (u - f_1(\mathbf{z})) \cdots (u - f_s(\mathbf{z})) \text{ in } W \times \mathbb{C}.$$

Über jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in D_\omega$ liegen weniger als s Punkte.



Bemerkung. Ein Punkt $\mathbf{z} \in G$, über dem weniger als s Punkte liegen, wird *Verzweigungspunkt* genannt. Alle Punkte der Diskriminantenmenge D_ω sind Verzweigungspunkte. Über allen anderen Punkten ist A lokal die Vereinigung disjunkter Graphen holomorpher Funktionen und daher dort regulär. Man nennt A dort auch *unverzweigt*.

BEWEIS: Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus D_\omega$, so hat das Polynom $\omega(\mathbf{z}_0, u)$ genau s verschiedene Nullstellen. Wir schreiben $\omega(\mathbf{z}_0, u) = (u - c_1) \cdots (u - c_s)$, wobei die c_i alle verschieden sind. Ist $\omega(\mathbf{z}, u) = u^s + h_1(\mathbf{z})u^{s-1} + \cdots + h_s(\mathbf{z})$, dann besitzt der Keim

$$\omega_{\mathbf{z}_0} := u^s + (h_1)_{\mathbf{z}_0} u^{s-1} + \cdots + (h_s)_{\mathbf{z}_0} \in H_n[u]$$

nach dem Henselschen Lemma eine Zerlegung $\omega_{\mathbf{z}_0} = \omega_{1,\mathbf{z}_0} \cdots \omega_{s,\mathbf{z}_0}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\omega_{i,\mathbf{z}_0}(\mathbf{z}_0, u) = u - c_i$ für $i = 1, \ldots, s$.
2. $\deg(\omega_{i,\mathbf{z}_0}) = 1$.

Wir haben $\omega_{i,\mathbf{z}_0} = u - r_i$, mit $r_i \in H_n$. Es gibt eine zusammenhängende Umgebung $W(\mathbf{z}_0) \subset G \setminus D_\omega$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ auf W, so daß die r_i gegen f_i konvergieren. Da die Keime von ω und $(u - f_1) \cdots (u - f_s)$ in $\mathbf{z}_0$ übereinstimmen, folgt aus dem Identitätssatz:

$$\omega|_{W \times \mathbb{C}} = (u - f_1) \cdots (u - f_s).$$

Da $W \subset G \setminus D_\omega$ ist, folgt: $f_i(\mathbf{z}) \neq f_j(\mathbf{z})$ für $i \neq j$ und $\mathbf{z} \in W$.

Über jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in D_\omega$ hat $\omega(\mathbf{z}_0, u)$ mehrfache Faktoren. Also besteht $N(\omega) \cap (\{\mathbf{z}_0\} \times \mathbb{C})$ aus weniger als s Punkten. ∎

Beispiele.

1. Sei $G = \mathbb{C}$ und $\omega = z_1^2 - z_2$. Dann ist die Diskriminante gegeben durch $\Delta_\omega(z_2) = 4z_2$ und daher $D_\omega = \{0\} \subset \mathbb{C}$. Zu jedem Punkt $z_2 \in \mathbb{C}^*$ gibt es eine Umgebung $W \subset \mathbb{C} - D_\omega$, wo $\sqrt{z_2}$ wohl-definiert ist. Dort ist dann $\omega = (z_1 - \sqrt{z_2}) \cdot (z_1 + \sqrt{z_2})$. Das ergibt eine Fläche über $\mathbb{C}$, die eine zusammenhängende unverzweigte 2-blättrige Überlagerung über $\mathbb{C} - \{0\}$ darstellt. Der Nullpunkt ist ein Verzweigungspunkt. So erhalten wir die *(verzweigte) Riemannsche Fläche* von $\sqrt{z}$.

2. Eine völlig andere Situation ergibt sich im Falle des Pseudopolynoms $\omega = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2) \cdot (z_1 + z_2)$. Die Diskriminante ist in diesem Falle die Funktion $4z_2^2$, und die Diskriminantenmenge D_ω ist wieder der Ursprung in $\mathbb{C}$. Die Menge $A = N(\omega)$ besteht aus zwei Blättern, die sich über dem Nullpunkt treffen und die biholomorph auf $\mathbb{C}$ projiziert werden. Die Menge $A \setminus \{\mathbf{0}\}$, also die Menge der unverzweigten Punkte von A, ist nicht mehr zusammenhängend.

   Im Grunde werden durch diese beiden Beispiele schon alle typischen Fälle beschrieben.

Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\omega(\mathbf{z}, u)$ ein Pseudopolynom vom Grad s über G, so setzen wir $G^* = G \setminus D_\omega$ und

$$A := \{(\mathbf{z}, u) \in G \times \mathbb{C} \,:\, \omega(\mathbf{z}, u) = 0\}.$$

$A^* = A|G^*$ sei der Teil von A, der über G^* liegt. Dann ist A^* eine unverzweigte Überlagerung von G^*. Da A^* sogar eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $G^* \times \mathbb{C}$ ist, können wir von holomorphen Funktionen auf A^* sprechen. Ist $\pi : A \to G$ die kanonische Projektion und f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset G^*$, so ist $f \circ \pi$ holomorph auf $\pi^{-1}(U)$.

Für holomorphe Funktionen auf A^* gelten ähnliche Sätze wie für holomorphe Funktionen auf Gebieten des $\mathbb{C}^n$. Man erhält z.B. die folgenden Resultate:

3.2 Satz. *Sei A_1 eine Zusammenhangskomponente von A^* und M eine analytische Teilmenge von A_1. Dann ist entweder $M = A_1$ oder M nirgends dicht in A_1.*

BEWEIS: Da A_1 eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist und jeder Punkt von A_1 eine Umgebung besitzt, die biholomorph äquivalent zu einer Kugel ist, kann man den gleichen Beweis wie im $\mathbb{C}^n$ benutzen. ∎

3.3 Satz. *Ist f holomorph auf A^* und A_1 eine Zusammenhangskomponente von A^*, dann verschwindet f entweder identisch auf A_1 oder die Nullstellenmenge von f ist nirgends dicht in A_1.*

3.4 Satz. *Sei A_1 wieder eine Zusammenhangskomponente von A^* und M eine nirgends dichte analytische Menge in A_1. Ist f eine holomorphe Funktion auf $A_1 \setminus M$, die längs M beschränkt bleibt, so besitzt f eine eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung auf A_1.*

Ist $\omega(\mathbf{z}, u) = u^s + a_1(\mathbf{z})u^{s-1} + \cdots + a_s(\mathbf{z})$ ein Pseudopolynom über G und $A = \{(\mathbf{z}, u) \in G \times \mathbb{C} \,:\, \omega(\mathbf{z}, u) = 0\}$, so nennt man die Projektion $\pi := \mathrm{pr}_1|_A : A \to G$ auch *Weierstraß-Abbildung.* Sie ist stetig und surjektiv und auf A^* sogar holomorph. Außerdem hat sie endliche Fasern.

3.5 Satz. *Die Weierstraß-Abbildung besitzt folgende Eigenschaften:*

1. *Ist $M \subset A$ abgeschlossen, so ist auch $\pi(M)$ abgeschlossen in G.*
2. *Ist $\mathbf{z}_0 \in G$, $\pi^{-1}(\mathbf{z}_0) = \{(\mathbf{z}_0, c_0)\}$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $\pi^{-1}(V) \subset V \times \Delta(c_0, \varepsilon)$.*
3. *π ist offen: Ist $\mathbf{p}_0 \in A$, $U = U(\mathbf{p}_0) \subset A$ eine offene Umgebung (in der Relativtopologie) und $\pi(\mathbf{p}_0) = \mathbf{z}_0$, so gibt es eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $V \subset \pi(U)$.*

BEWEIS: 1) Sei $M \subset A$ abgeschlossen und $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Häufungspunkt von $\pi(M)$. Dann gibt es eine Folge $(\mathbf{z}_\nu, c_\nu) \in M$, so dass $(\mathbf{z}_\nu)$ gegen $\mathbf{z}_0$ konvergiert. Weil $\omega(\mathbf{z}_\nu, c_\nu) = 0$ ist, gilt:

$$c_\nu^s = -\left(a_1(\mathbf{z}_\nu)c_\nu^{s-1} + \cdots + a_s(\mathbf{z}_\nu)\right).$$

Ist $|c_\nu| \geq 1$, so folgt aus dieser Gleichung die Abschätzung

$$|c_\nu| = |a_1(\mathbf{z}_\nu) + \cdots + a_s(\mathbf{z}_\nu)c_\nu^{1-s})| \leq |a_1(\mathbf{z}_\nu)| + \cdots + |a_s(\mathbf{z}_\nu)|.$$

Weil die holomorphen Koeffizienten auf einer passenden Umgebung von $\mathbf{z}_0$ simultan durch eine Konstante $M > 0$ nach oben abgeschätzt werden können, ist $|c_\nu| \leq \max(1, s \cdot M)$ (für alle ν). Dann kann man eine Teilfolge (c_{ν_i}) finden, die gegen eine Zahl $c_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es ist klar, daß $\omega(\mathbf{z}_0, c_0) = 0$ ist. Weil alle Punkte $(\mathbf{z}_{\nu_i}, c_{\nu_i})$ in M liegen, muss auch der Grenzwert $(\mathbf{z}_0, c_0)$ in M liegen. Also gehört $\mathbf{z}_0$ zu $\pi(M)$.

2) Sei nun $\pi^{-1}(\mathbf{z}_0) = \{(\mathbf{z}_0, c_0)\}$. Ist $\varepsilon > 0$, so ist $U := A \cap (G \times \Delta(c_0, \varepsilon))$ eine offene Umgebung von $(\mathbf{z}_0, c_0)$ in A und daher $\pi(A \setminus U)$ eine abgeschlossene Menge in G, die $\mathbf{z}_0$ nicht enthält. Das bedeutet, dass $\mathbf{z}_0$ in der offenen Menge $G \setminus \pi(A \setminus U)$ liegt. Ist $V = V(\mathbf{z}_0)$ eine offene Umgebung von $\mathbf{z}_0$ in $G \setminus \pi(A \setminus U)$ und $(\mathbf{z}, c) \in \pi^{-1}(V)$, so liegt $(\mathbf{z}, c)$ nicht in $A \setminus U$, also in U und damit in $V \times \Delta(c_0, \varepsilon)$.

3) Ist $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{z}_0, c_0) \in A$, so betrachten wir eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{p}_0) \subset A$. Wir können annehmen, dass U die Gestalt $U = (B \times D) \cap A$ hat, mit einer offenen zusammenhängenden Umgebung $B = B(\mathbf{z}_0) \subset G$ und $D = \Delta(c_0, \varepsilon)$. Weil $\omega(\mathbf{z}_0, c_0) = 0$ ist, gibt es nach dem Henselschen Lemma ein $k \geq 1$ und (unter Umständen nach Verkleinerung von B) zwei Pseudopolynome ω_1, ω_2 über B, so dass gilt:

1. $\omega = \omega_1 \cdot \omega_2$ über B.

2. $\omega_1(\mathbf{z}_0, u) = (u - c_0)^k$.

Sei nun $A_1 = \{(\mathbf{z}, u) \in B \times \mathbb{C} : \omega_1(\mathbf{z}, u) = 0\} \subset A$. Weil $A_1 \cap \pi^{-1}(\mathbf{z}_0) = \{(\mathbf{z}_0, c_0)\}$ ist, folgt aus dem zweiten Teil, dass es eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset B$ gibt, so dass $A_1 \cap (V \times \mathbb{C}) \subset V \times D \subset U$ ist. Weil außerdem $\pi : A_1 \cap (V \times \mathbb{C}) \to V$ surjektiv ist (denn ω_1 hat als Polynom vom Grad ≥ 1 über jedem Punkt $\mathbf{z} \in V$ mindestens eine Nullstelle), folgt: $V \subset \pi(U)$. ■

3.6 Folgerung (Stetigkeit der Wurzeln). *Ist $\omega(\mathbf{z}, u) \in \mathcal{O}(G)^0[u]$, $\mathbf{z}_0 \in G$, $c_0 \in \mathbb{C}$ und $\omega(\mathbf{z}_0, c_0) = 0$, so gibt es zu jeder Folge $(\mathbf{z}_\nu)$ in G mit $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{z}_\nu = \mathbf{z}_0$ eine Folge (c_ν) in $\mathbb{C}$, so dass gilt:*

1. $\lim_{\nu \to \infty} c_\nu = c_0$.

2. *$\omega(\mathbf{z}_\nu, c_\nu) = 0$ für alle ν.*

BEWEIS: $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{z}_0, c_0)$ liegt in $A = N(\omega)$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $U := A \cap (G \times \Delta(c_0, \varepsilon))$, so gibt es eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $V \subset \pi(U)$.

Weiter gibt es ein ν_0, so daß $\mathbf{z}_\nu \in V$ ist, für $\nu \geq \nu_0$. Aber dann gibt es auch Zahlen $c_\nu \in \Delta(c_0, \varepsilon)$, so daß $(\mathbf{z}_\nu, c_\nu) \in U$ ist, für $\nu \geq \nu_0$. Die Folge der c_ν hat die gewünschten Eigenschaften. ∎

3.7 Satz. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

1. $\pi|_{A^*} : A^* \to G^*$ *ist offen und abgeschlossen.*
2. A^* *zerfällt in endlich viele Zusammenhangskomponenten. Ist* A_1 *eine solche Komponente, so ist* $\pi|_{A_1} : A_1 \to G^*$ *surjektiv.*

Beweis: Dass $\pi|_{A^*}$ offen ist, ist klar. Sei nun $M \subset A^*$ abgeschlossen (in der Relativtopologie) und nicht leer, $\mathbf{z}_0 \in G^*$ ein Häufungspunkt von $\pi(M)$. Es gibt eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset\subset G^*$ und offene Mengen $V_1, \ldots, V_s \subset\subset A^*$ (nämlich holomorphe Graphen über U), so dass gilt:

1. $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup \ldots \cup V_s$,
2. $V_\sigma \cap V_\tau = \varnothing$ für $\sigma \neq \tau$,
3. $\pi|_{V_\sigma} : V_\sigma \to U$ ist topologisch, für alle σ.

Sei nun $(\mathbf{z}_\nu)$ eine Folge in $U \cap \pi(M)$, die gegen $\mathbf{z}_0$ konvergiert. Dann gibt es Elemente $x_\nu \in \pi^{-1}(U) \cap M$ mit $\pi(x_\nu) = \mathbf{z}_\nu$. Weil $\pi^{-1}(U) \cap M$ Vereinigung der endlich vielen Mengen $V_\sigma \cap M$ ist, muss es ein σ geben, so dass unendlich viele x_ν in $V_\sigma \cap M$ liegen. Letzteres ist eine beschränkte Menge. Also gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{ν_n}) in $V_\sigma \cap M$. Ist x_0 der Grenzwert dieser Folge, so ist $\pi(x_0) = \mathbf{z}_0$ und insbesondere $x_0 \in A^*$, also sogar $x_0 \in M$. Damit liegt $\mathbf{z}_0$ in $\pi(M)$, und $\pi(M)$ ist abgeschlossen in G^*.

Ist A_1 eine Zusammenhangskomponente von A^*, so ist $\pi(A_1)$ offen und abgeschlossen (und nicht leer) in G^*, also $= G^*$. Das bedeutet, dass $\pi|_{A_1}$ surjektiv ist.

Ist $\mathbf{z}_0 \in G^*$ beliebig, so trifft $\pi^{-1}(\mathbf{z}_0)$ jede Zusammenhangskomponente A_1 von A^* in einer nicht leeren endlichen Menge, die Summe der Kardinalzahlen dieser Mengen ergibt eine endliche Zahl s. Also kann es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten geben. ∎

Wir wollen jetzt untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen der Zerlegung eines Pseudopolynoms in Primfaktoren und der Zerlegung seiner Nullstellenmenge in „irreduzible" Komponenten besteht.

3.8 Satz. *Sei* $G \subset \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet,* $\omega(\mathbf{z}, u)$ *ein Pseudopolynom vom Grad* s *über* G *ohne mehrfache Faktoren und* $A = N(\omega) \subset G \times \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

ω *ist genau dann irreduzibel, wenn* $A \cap ((G \setminus E) \times \mathbb{C})$ *für jede nirgends dichte analytische Teilmenge* $E \subset G$ *mit* $D_\omega \subset E$ *zusammenhängend ist.*

BEWEIS: Sei $G^* := G \setminus D_\omega$. Weil $A \cap (G^* \times \mathbb{C})$ eine Mannigfaltigkeit und $E \setminus D_\omega \subset G^*$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge ist, ist $A \cap (G^* \times \mathbb{C})$ genau dann zusammenhängend, wenn $A \cap (((G \setminus E) \times \mathbb{C})$ für jedes E zusammenhängend ist. Deshalb brauchen wir nur den Fall $E = D_\omega$ zu betrachten.

Ist ω reduzibel, so definiert jeder irreduzible Faktor ω_i von ω eine analytische Menge A_i über G^*. Der Durchschnitt zweier verschiedener A_i ist jeweils leer, denn sonst hätte $\omega(\mathbf{z}_0, u)$ in mindestens einem $\mathbf{z}_0 \in G^*$ einen mehrfachen Faktor. Das kann aber nur über den Punkten von D_ω passieren. Weil die A_i in $A^* = A|G^*$ abgeschlossen und offen sind, kann A^* nicht zusammenhängend sein.

Umgekehrt bestehe nun $A|G^*$ aus den Zusammenhangskomponenten A_i, $i = 1, \ldots, N$, mit $N > 1$. Jeder Punkt $\mathbf{z} \in G^*$ besitzt eine Kugelumgebung $B \subset G^*$, so dass $A_i|B$ in Graphen von holomorphen Funktionen $f_{ij}, j = 1, \ldots, s_i$, zerfällt. In jedem Fall bilden wir das Pseudopolynom

$$\omega_i(\mathbf{z}, u) := (u - f_{i,1}(\mathbf{z})) \cdots (u - f_{i,s_i}(\mathbf{z})).$$

Die Nullstellenmenge von ω_i ist genau die Menge $A_i|B$. Diese Nullstellenmenge und das Pseudopolynom ω_i bestimmen sich auf eindeutige Weise gegenseitig. Deshalb stimmen die Pseudopolynome zur Komponente A_i über den Durchschnitten zweier Kugelumgebungen überein. Man erhält also globale holomorphe Pseudopolynome ω_i über G^*. Ist $\mathbf{z}_0 \in D_\omega$, so gibt es eine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0)$, so dass $A_i|(W \setminus D_\omega) \subset A|W$ eine beschränkte Menge ist. Deshalb sind die Koeffizienten von ω_i lokal beschränkt und können holomorph nach G fortgesetzt werden. Wir bezeichnen die so gewonnenen fortgesetzten Polynome wieder mit ω_i. Über G^* ist $\omega = \omega_1 \cdots \omega_N$, und aus Stetigkeitsgründen folgt, dass $\omega = \omega_1 \cdots \omega_N$ über ganz G gilt. ∎

Sind die ω_i irreduzible Faktoren von ω, so nennen wir ihre Nullstellenmengen A_i die *irreduziblen Komponenten* von A. Die Mengen $A_i^* = A_i|G^*$ sind die Zusammenhangskomponenten von $A^* = A|G^*$.

3.9 Satz. *Sind $\widetilde{\omega}, \omega$ Pseudopolynome ohne mehrfache Faktoren über einem Gebiet G und ist $\widetilde{A} = \{\widetilde{\omega} = 0\} \subset A = \{\omega = 0\}$, so ist $\widetilde{\omega}$ ein Faktor von ω.*

BEWEIS: D bezeichne die Vereinigung der Diskriminantenmengen von $\widetilde{\omega}$ und ω. Das ist eine nirgends dichte analytische Menge in G, und wir setzen $G^* := G \setminus D$. Über G^* zerlegen wir die beiden unverzweigten Überlagerungen in Zusammenhangskomponenten. Jede Zusammenhangskomponente Y von $\widetilde{A}^*$ muss natürlich in einer Zusammenhangskomponenten Z von A^* liegen. Weil aber Y (als analytische Teilmenge) abgeschlossen und (als Vereinigung von Graphen) offen in Z ist, muss $Y = Z$ sein. Das bedeutet, dass $\widetilde{A}^* = A_1 \cup \cdots \cup A_{s^*}$ und $A^* = A_1 \cup \cdots \cup A_s$ mit $s^* \leq s$ ist, mit Zusammenhangskomponenten A_i. Aus den Komponenten gewinnen wir Pseudopolynome über G^*, die zu Pseudopolynomen $\omega_1, \ldots, \omega_s$ über G führen, mit $\widetilde{\omega} = \omega_1 \cdots \omega_{s^*}$ und $\omega = \omega_1 \cdots \omega_s$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Ähnlich wird das folgende Resultat bewiesen.

3.10 Satz. *Sei ω ein Pseudopolynom ohne mehrfache Faktoren. Ist $A = \{\omega = 0\}$ die disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen M', M'', die in $G \times \mathbb{C}$ abgeschlossen sind, so gibt es Pseudopolynome ω', ω'' über G mit $M' = \{\omega' = 0\}$, $M'' = \{\omega'' = 0\}$ und $\omega' \cdot \omega'' = \omega$.*

Beweis: Die Konstruktion wird zunächst außerhalb D_ω durchgeführt. Wir setzen $G^* = G \setminus D_\omega$ und benutzen die Tatsache, dass jede nicht leere offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge von $A^* = A|G^*$ die Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von A^* sein muss. Die Mengen $M'|G^*$ und $M''|G^*$ sind nach Voraussetzung abgeschlossen und dann (weil die eine die Komplementärmenge zur anderen ist) auch offen in A^*. Ist $\omega = \omega_1 \cdots \omega_s$ die Zerlegung in irreduzible Faktoren, so entsprechen die Nullstellenmengen der ω_i den Zusammenhangskomponenten von A^*. Deshalb können wir annehmen, dass es ein s^* mit $0 \le s^* \le s$ gibt, so dass für $\omega' = \omega_1 \cdots \omega_{s^*}$ und $\omega'' = \omega_{s^*+1} \cdots \omega_s$ gilt: $M'|G^* = \{(u, \mathbf{z}) \in G^* \times \mathbb{C} : \omega'(u, \mathbf{z}) = 0\}$ und $M''|G^* = \{(u, \mathbf{z}) \in G^* \times \mathbb{C} : \omega''(u, \mathbf{z}) = 0\}$.

Wir nehmen an, dass $M'|G^* = \varnothing$ und damit $M''|G^* = A^*$ ist. Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathrm{clos}_M(N)$ den Abschluss der Menge N in der Menge M. Wegen der Stetigkeit der Wurzeln ist dann

$$A = \mathrm{clos}_A(A^*) = \mathrm{clos}_A(M''|G^*) = M''.$$

Das kann aber nicht sein, weil $M' \neq \varnothing$ ist. Also sind die Mengen $M'|G^*$ und $M''|G^*$ nicht leer (d.h., $0 < s^* < s$), und ihre Abschlüsse in $G \times \mathbb{C}$ sind M' bzw. M''. ∎

Als nächstes wollen wir Nullstellenmengen von mehreren holomorphen Funktionen untersuchen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, der gemeinsamen Nullstellenmenge N eines Pseudopolynoms ω über $G \subset \mathbb{C}^n$ und einer zusätzlichen holomorphen Funktion f in einer Umgebung von $A = \{(\mathbf{z}, u) \in G \times \mathbb{C} : \omega(\mathbf{z}, u) = 0\}$. Wir benutzen dabei die Projektion von N auf G.

3.11 Satz. *Sei $f = f(\mathbf{z}, u)$ eine stetige Funktion auf A, die außerhalb von $D_\omega \times \mathbb{C}$ holomorph ist und auf keiner Umgebung eines Punktes von A identisch verschwindet. Dann ist die Projektion von $N = \{f = \omega = 0\}$ auf G eine analytische Menge $N' = \{\overline{f} = 0\}$, wobei $\overline{f}$ eine holomorphe Funktion auf G ist, die nicht identisch verschwindet.*

Beweis: Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus D_\omega$, so finden wir eine Kugel $B \subset G \setminus D_\omega$ um $\mathbf{z}_0$, so daß $\omega(\mathbf{z}, u) = (u - f_1(\mathbf{z})) \cdots (u - f_s(\mathbf{z}))$ über B gilt. Die Funktion f verschwindet auf keinem der Graphen $u = f_i(\mathbf{z})$ identisch. Folglich verschwindet auch

$$\overline{f}(\mathbf{z}) := f(\mathbf{z}, f_1(\mathbf{z})) \cdots f(\mathbf{z}, f_s(\mathbf{z}))$$

nicht identisch. Für $\mathbf{z} \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{f}(\mathbf{z}) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, i \text{ mit } (\mathbf{z}, f_i(\mathbf{z})) \in N \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{z} \in N' \end{aligned}$$

Wie üblich erhalten wir die holomorphe Funktion $\overline{f}$ auf ganz $G \setminus D_\omega$. Sie ist beschränkt längs D_ω und kann deshalb zu einer holomorphen Funktion auf G fortgesetzt werden.

Offensichtlich ist $\{\mathbf{z} \in G \setminus D_\omega \,:\, \overline{f}(\mathbf{z}) = 0\} = (G \setminus D_\omega) \cap N'$. Wir müssen noch zeigen, daß $\{\mathbf{z} \in D_\omega \,:\, \overline{f}(\mathbf{z}) = 0\} = D_\omega \cap N'$ ist.

Ist $\mathbf{z}_0 \in D_\omega \cap N'$, so gibt es ein $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $(\mathbf{z}_0, c_0) \in N$, also $\omega(\mathbf{z}_0, c_0) = f(\mathbf{z}_0, c_0) = 0$. Wir wählen eine Folge $(\mathbf{z}_\nu)$ in $G \setminus D_\omega$, die gegen $\mathbf{z}_0$ konvergiert. Nach dem Satz von der Stetigkeit der Wurzeln gibt es eine Zahlenfolge c_ν, die gegen c_0 konvergiert, so dass stets $\omega(\mathbf{z}_\nu, c_\nu) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(\mathbf{z}_\nu, c_\nu)$ gegen $f(\mathbf{z}_0, c_0) = 0$. Nun ist aber $\overline{f}(\mathbf{z}_\nu) = f(\mathbf{z}_\nu, c_\nu) \cdot a_\nu$, mit einer beschränkten Folge (a_ν). Also ist auch $\overline{f}(\mathbf{z}_0) = 0$.

Sei nun umgekehrt $\mathbf{z}_0 \in D_\omega$ und $\overline{f}(\mathbf{z}_0) = 0$. Wir nehmen an, $\mathbf{z}_0$ liegt nicht in N'. Dann enthält $A \cap (\{\mathbf{z}_0\} \times \mathbb{C})$ keinen Punkt von N. Weil N abgeschlossen ist, gibt es eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$, so dass $N \cap (V \times \mathbb{C}) = \varnothing$ ist. Dann kann man eine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset\subset V$ und ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $|f| \geq \varepsilon$ auf $A \cap (W \times \mathbb{C})$ ist. Dann ist es aber unmöglich, dass $\overline{f}(\mathbf{z}_0) = 0$ ist. ∎

Wir betrachten jetzt die folgende „Standard-Situation“:

Sei G ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, und ω ein Pseudopolynom über G ohne mehrfache Faktoren. Sei f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $A = \{\omega(\mathbf{z}, u) = 0\} \subset G \times \mathbb{C}$, die auf keiner offenen Teilmenge von A identisch verschwindet, und

$$N := \{(\mathbf{z}, u) \in G \times \mathbb{C} \,:\, \omega(\mathbf{z}, u) = f(\mathbf{z}, u) = 0\}.$$

Schließlich sei N' die Projektion von N auf G.

Wir wollen definieren, was „unverzweigte Punkte“ von N sind. Leider müssen wir dabei zulassen, dass solche unverzweigten Punkte von N auch über der Verzweigungsmenge von ω liegen können.

Deshalb halten wir einen Punkt $\mathbf{z}_0 \in N'$ fest und wählen in der Nähe spezielle Koordinaten. Weil $\overline{f}$ nirgends identisch verschwindet und $\overline{f}(\mathbf{z}_0) = 0$ ist, gibt es beliebig nahe bei der Identität eine Scherung $\sigma = \sigma_{\mathbf{c}}$, so dass $\overline{f}(\mathbf{z}_0 + \sigma(\mathbf{z}))$ z_n-allgemein ist, nach Anwendung der Transformation also die Parallele zur z_n-Achse die analytische Menge N' in $\mathbf{z}_0$ in einem isolierten Punkt trifft.

Wir können deshalb annehmen, dass es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$, ein Gebiet $G' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ und ein Pseudopolynom ω' über G' gibt, so dass gilt:

$$N' \cap U = \{(\mathbf{z}', z_n) \in G' \times \mathbb{C} \,:\, \omega'(\mathbf{z}', z_n) = 0\}.$$

Definition. In der Standard-Situation nennen wir einen Punkt $(\mathbf{z}, u) \in N \cap (U \times \mathbb{C})$ einen *unverzweigten Punkt* von N, falls $\mathbf{z}$ in $N' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$ liegt und es eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}) \subset N' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$ und eine holomorphe Funktion g

auf V gibt, so dass $N \cap (V \times \mathbb{C})$ in einer Umgebung von $(\mathbf{z}, u)$ mit dem Graphen $\{u = g(\mathbf{w}) \,:\, \mathbf{w} \in V\}$ übereinstimmt.

3.12 Theorem. *In der Standard-Situation kann man in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes $(\mathbf{z}_1, u_1)$ der Menge $N \cap (U \times \mathbb{C})$ unverzweigte Punkte von N finden.*

Beweis: Wir geben einen Algorithmus an, wie man solche unverzweigten Punkte findet. Dazu starten wir bei dem Punkt $(\mathbf{z}_1, u_1) \in N \cap (U \times \mathbb{C})$.

1. Schritt: Es gibt eine Umgebung $U_1 = U_1(\mathbf{z}_1) \subset U$ und ein $\delta > 0$, so dass $(\mathbf{z}_1, u_1)$ der einzige Punkt von A über $\mathbf{z}_1$ in $W_1 := U_1 \times \Delta(u_1, \delta)$ ist und $A \cap W_1$ durch ein Pseudopolynom ω_1 über U_1 gegeben wird:

$$A \cap W_1 = \{(\mathbf{z}, u) \in U_1 \times \mathbb{C} \,:\, \omega_1(\mathbf{z}, u) = 0\}.$$

2. Schritt: Sei $\pi : W_1 \to U_1$ die kanonische Projektion. Dann liegt $N_1' := \pi(W_1 \cap N)$ in $N' \cap U_1$. Nun sei $\mathbf{z}_2 \in N_1' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$. Man kann eine offene Umgebung $U_2 = U_2(\mathbf{z}_2) \subset U_1 \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$ finden, und wenn man U_2 klein genug wählt, so ist $N_2' := \pi((U_2 \times \Delta) \cap N) = N' \cap U_2$ (denn andernfalls würde $N' \cap U_2$ Verzweigungspunkte enthalten). Wir setzen $W_2 := U_2 \times \Delta$.

3. Schritt: Nun schränken wir ω_1 auf die (reguläre) analytische Menge N_2' ein, lassen etwaige mehrfache Faktoren weg und erhalten ein Pseudopolynom ω_2 über N_2' ohne mehrfache Faktoren, so dass gilt:

$$N \cap W_2 = \{(\mathbf{z}, u) \in N_2' \times \mathbb{C} \,:\, \omega_2(\mathbf{z}, u) = 0\}.$$

4. Schritt: Sei $\mathbf{z}_3 \in N_2' \setminus D_{\omega_2}$. Nach Konstruktion gibt es solche Punkte, und wir können ein $u_3 \in \mathbb{C}$ finden, so dass $(\mathbf{z}_3, u_3)$ in $N \cap W_2$ liegt. Weil die Umgebung W_1 beliebig klein gewählt werden kann, existieren solche Punkte beliebig nahe bei $(\mathbf{z}_1, u_1)$.

Behauptung: $(\mathbf{z}_3, u_3)$ ist ein unverzweigter Punkt von N.

Beweis dafür: Nach Konstruktion liegt $(\mathbf{z}_3, u_3)$ in $N \cap (U \times \mathbb{C})$ und $\mathbf{z}_3 \in N' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$. Man kann eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}_3) \subset U_2 \setminus D_{\omega_2}$ finden, so dass $N \cap (U \times \mathbb{C})$ in der Nähe von $(\mathbf{z}_3, u_3)$ durch einen holomorphen Graphen über $V \cap N'$ beschrieben werden kann, denn über $N' \cap V$ zerfällt ω_2 in Linearfaktoren. ∎

Wir wollen nun allgemeinere analytische Mengen studieren. Da man leichter mit Pseudopolynomen als mit beliebigen holomorphen Funktionen arbeiten kann, führen wir sogenannte „eingebettet-analytische Mengen“ ein. Das sind gewisse Teilmengen von gemeinsamen Nullstellenmengen endlich vieler Pseudopolynome, und sie sind nicht a priori analytisch. Später wird sich allerdings herausstellen, dass sie es doch sind.

Sei $G \subset \mathbb{C}^{n-d} = \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{n-d}) \,:\, z_\nu \in \mathbb{C}$ für $\nu = 1, \ldots, n-d\}$ ein Gebiet und $\omega_i(\mathbf{z}; u_i)$, $i = 1, \ldots, d$, ein System von Pseudopolynomen über G ohne mehrfache Faktoren. Die Nullstellenmengen

$$A_i := \{(\mathbf{z}; \mathbf{u}) \in G \times \mathbb{C}^d \,:\, \omega_i(\mathbf{z}; u_i) = 0\}$$

treffen sich in $G \times \mathbb{C}^d$ transversal. Ist $D_i \subset G$ die Diskriminantenmenge von ω_i, so nennen wir $D := D_1 \cup \ldots \cup D_d \subset G$ die *vereinigte Diskriminantenmenge* des Systems der ω_i. Schließlich sei

$$\widehat{A} := \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in G \times \mathbb{C}^d \,:\, \omega_i(\mathbf{z}; u_i) = 0, \text{ für } i = 1, \ldots, d\}.$$

Ist $B \subset G \setminus D$ eine Kugel, so gibt es zu jedem i eine endliche Menge $J_i = \{1, \ldots, s_i\}$ und holomorphe Funktionen $f_{ij} : B \to \mathbb{C}$, $j \in J_i$, so dass gilt:

1. $f_{ij}(\mathbf{z}) \neq f_{ik}(\mathbf{z})$ für $\mathbf{z} \in B$ und $j \neq k$.
2. $A_i|B = \bigcup\limits_{j \in J_i} \{(\mathbf{z}; u_1, \ldots, u_d) \in B \times \mathbb{C}^d \,:\, u_i = f_{ij}(\mathbf{z})\}$.

Damit besteht

$$\begin{aligned}
\widehat{A}|B &= \bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{j \in J_i} \{(\mathbf{z}; u_1, \ldots, u_d) \in B \times \mathbb{C}^d \,:\, u_i = f_{ij}(\mathbf{z})\} \\
&= \bigcup_{\mathbf{j} \in J_1 \times \ldots \times J_d} \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in B \times \mathbb{C}^d \,:\, \mathbf{u} = F_{\mathbf{j}}(\mathbf{z})\} \\
&\quad (\text{mit } F_{(j_1, \ldots, j_d)}(\mathbf{z}) := (f_{1,j_1}(\mathbf{z}), \ldots, f_{d,j_d}(\mathbf{z})))
\end{aligned}$$

aus endlich vielen disjunkten holomorphen Graphen. Jeder dieser Graphen ist in einer Zusammenhangskomponente Z von $\widehat{A}|(G \setminus D)$ enthalten. Wir bezeichnen den Abschluss von Z in $\widehat{A}$ als eine *irreduzible eingebettet-analytische Komponente* von $\widehat{A}$.

Definition. Ist $\widehat{A}$ wie oben definiert, so nennt man jede Vereinigung endlich vieler irreduzibler eingebettet-analytischer Komponenten von $\widehat{A}$ eine *eingebettet-analytische Menge* der Dimension $n - d$.

Definitionsgemäß kann jede eingebettet-analytische Menge A in endlich viele irreduzible Komponenten zerlegt werden. Man beachte übrigens, dass $\widehat{A}|(G \setminus D)$ in endlich viele Zusammenhangskomponenten zerfällt. Der Beweis geht wie im Falle $d = 1$.

Die umgebende Menge $\widehat{A} \supset A$ ist nicht eindeutig bestimmt. Manchmal kann $\widehat{A}$ kleiner gemacht werden, indem man diejenigen irreduziblen Faktoren der ω_i weglässt, die auf A nicht identisch verschwinden. Dann sind die ω_i eindeutig durch A bestimmt.

3.13 Satz. *Sei* $A \subset \widehat{A} := \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in G \times \mathbb{C}^d \,:\, \omega_i(\mathbf{z}; u_i) = 0,$ *für* $i = 1, \ldots, d\}$ *eine eingebettet-analytische Menge. Dann gibt es Polynome* $\Omega_\mu \in \mathcal{O}(G)[u_1, \ldots, u_d]$, $\mu = 1, \ldots, m$, *so dass gilt:*

$$A = \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in G \times \mathbb{C}^d \,:\, \Omega_1(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \ldots = \Omega_m(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0\}.$$

Insbesondere ist jede eingebettet-analytische Funktion analytisch.

BEWEIS: Sei $D \subset G$ die vereinigte Diskriminantenmenge der ω_i und $G^* := G \setminus D$. Nach Definition ist $A^* := A|G^*$ eine endliche Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $\widehat{A}^* := \widehat{A}|G^*$. Das gleiche gilt für $A^{**} := \widehat{A}^* \setminus A^*$. Sowohl A^* als auch A^{**} sind offene Teilmengen von $\widehat{A}^*$.

Für jede Kugel $B \subset G^*$ ist $\widehat{A}|B$ disjunkte Vereinigung von Graphen

$$\Gamma^B_{j_1 \ldots j_d} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in B \times \mathbb{C}^d \,:\, u_i = f_{i,j_i}(\mathbf{z}) \text{ für } i = 1, \ldots, d\}.$$

Jeder dieser Graphen muss (als zusammenhängende Menge) entweder ganz in A^* oder ganz in A^{**} liegen. Wir setzen

$$P_B(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \prod_{\Gamma^B_{j_1 \ldots j_d} \subset A^*} \sum_{i=1}^{d} (u_i - f_{i,j_i}(\mathbf{z}))v_i$$

auf $B \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$. Über dem Durchschnitt zweier Kugeln B_1 und B_2 erhält man die gleichen Graphen, und deshalb ist dort $P_{B_1} = P_{B_2}$. So ergibt sich eine globale Funktion $P(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ auf $G^* \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$, die man als Polynom aus $\mathcal{O}(G^* \times \mathbb{C}^d)[v_1, \ldots, v_d]$ schreiben kann:

$$P(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_d} \Omega_{\nu_1 \ldots \nu_d}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) v_1^{\nu_1} \cdots v_d^{\nu_d},$$

wobei die Koeffizienten $\Omega_{\nu_1 \ldots \nu_d}(\mathbf{z}, \mathbf{u})$ in $\mathcal{O}(G^*)[u_1, \ldots, u_d]$ liegen. Wie üblich kann man sie auf ganz $G \times \mathbb{C}^d$ holomorph fortsetzen. Wir nummerieren die endlich vielen Koeffizienten durch: $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$. Dann setzen wir $A_0 := \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \subset G \times \mathbb{C}^d \,:\, \Omega_1(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \ldots = \Omega_m(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0\}$.

Wir zeigen, daß $A_0|G^* = A^*$ ist, also auch $A_0 = A$.

a) Sei zunächst $(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0) \in A^*$. Dann gibt es eine Kugel B um $\mathbf{z}_0$ und ein eindeutig bestimmtes d-Tupel $(j_1, \ldots, j_d)$, so daß $(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0)$ in $\Gamma^B_{j_1 \ldots j_d}$ liegt. Also ist $P(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0$ für jedes $\mathbf{v}$. Das geht nur, wenn alle Koeffizienten $\Omega_\mu(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0)$ verschwinden, wenn also $(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0)$ in A_0 liegt.

b) Nun sei umgekehrt $(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0) \in A_0|G^*$. Dann ist $\mathbf{z}_0 \in G^*$ und $\Omega_\mu(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ für $\mu = 1, \ldots, m$, also $P(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0$ für jedes $\mathbf{v}$. Aber $P(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v})$ ist ein endliches Produkt komplexer Linearformen auf dem $\mathbb{C}^d$. Weil $\mathbb{C}^d$ nicht die Vereinigung endlich vieler echter Unterräume sein kann, muss zumindest eine der Linearformen identisch verschwinden. Das bedeutet, es gibt ein d-Tupel $(j_1, \ldots, j_d)$, so dass $(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0) \in \Gamma^B_{j_1 \ldots j_d} \subset A^*$ (für eine geeignete Kugel B) gilt.

Damit ist alles bewiesen. ■

Sei $A \subset G \times \mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^n$ eine **irreduzible** eingebettet-analytische Menge über G.

3.14 Abbildungssatz. *Ist $A_1 \subset G_1 \times \mathbb{C}^{d_1} \subset \mathbb{C}^{n_1}$ eine weitere eingebettet-analytische Menge über G_1 und $\mathbf{F}$ eine holomorphe Abbildung von einer Umgebung von A nach $G_1 \times \mathbb{C}^{d_1}$, so dass $\mathbf{F}(U) \subset A_1$ für eine nicht leere offene Teilmenge $U \subset A$ gilt, so ist sogar $\mathbf{F}(A) \subset A_1$.*

BEWEIS: Sei $D \subset G$ die vereinigte Diskriminantenmenge der Pseudopolynome $\omega_i(\mathbf{z}, z_i)$, durch die $\widehat{A}$ (die Einbettungsmenge von A) beschrieben wird, sowie $G^* = G \setminus D$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathbf{F}(A \cap (G^* \times \mathbb{C}^d)) \subset A_1$ ist. Da wir zwei Punkte von $A \cap (G^* \times \mathbb{C}^d)$ jeweils durch eine Kette von beliebig kleinen Kugeln verbinden können, brauchen wir den Beweis nur für solch eine Kugel zu führen. Deshalb ersetzen wir A durch eine Kugel B in $\mathbb{C}^{n-d}$ und nehmen an, dass $\mathbf{F}$ in einer Umgebung von $\overline{B}$ definiert ist.

Sei A_1 eingebettet-analytisch in $\widehat{A}_1 \subset G_1 \times \mathbb{C}^{d_1}$. Dann wird A_1 durch endliche viele holomorphe Funktionen $\Omega_\mu \in \mathcal{O}(G_1)[v_1, \ldots, v_{d_1}]$ beschrieben. Wenn $\mathbf{F}$ einen nicht leeren offenen Teil U von B nach A_1 abbildet, dann ist $\Omega_\mu \circ \mathbf{F}|_U \equiv 0$ für $\mu = 1, \ldots, m$. Aus dem Identitätssatz folgt, dass $\Omega_\mu \circ \mathbf{F} \equiv 0$ auf ganz B und daher $\mathbf{F}(B) \subset A_1$ ist. ■

Wir arbeiten jetzt mit folgender Standard-Situation:

Sei $A \subset \widehat{A} \subset G \times \mathbb{C}^d$ eine eingebettet-analytische Menge der Dimension $n - d$, D die vereinigte Diskriminantenmenge. Außerdem sei f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von A, die auf keiner offenen Teilmenge von A identisch verschwindet, und $N = \{(\mathbf{z}; \mathbf{u}) \in A : f(\mathbf{z}; \mathbf{u}) = 0\}$.

$\pi : A \to G$ sei die kanonische Projektion, $N' := \pi(N)$. Ist $\mathbf{z} \in G \setminus D$, so liegt immer die gleiche Anzahl von Punkten aus A über $\mathbf{z}$, etwa $(\mathbf{z}; \mathbf{u}_1), \ldots, (\mathbf{z}; \mathbf{u}_s)$. Wir setzen $\overline{f}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}; \mathbf{u}_1) \cdots f(\mathbf{z}; \mathbf{u}_s)$ und erhalten so eine holomorphe Funktion $\overline{f}$ auf $G \setminus D$, die längs D beschränkt ist und deshalb holomorph nach G fortgesetzt werden kann. Dann ist $N' = \{\mathbf{z} \in G : \overline{f}(\mathbf{z}) = 0\}$.

Sei $\mathbf{z}_0 \in N'$. Nach einer „beliebig kleinen“ linearen Koordinatentransformation in den Variablen $z_1, \ldots, z_{n-d}$ schneidet die Gerade L, die parallel zur z_{n-d}-Achse durch $\mathbf{z}_0$ geht, die Hyperfläche N' in einem isolierten Punkt. Nach Weierstraß können wir eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$, ein Gebiet $G' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ und ein Pseudopolynom $\omega'(\mathbf{z}', z_{n-d})$ über G' ohne mehrfache Faktoren finden, so dass gilt:

$$U \cap N' = \{\mathbf{z} = (\mathbf{z}', z_{n-d}) \in G' \times \mathbb{C} : \omega'(\mathbf{z}', z_{n-d}) = 0\}, \text{ mit } \mathbf{z}' = (z_1, \ldots, z_{n-d-1}).$$

Ein Punkt $(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1) \in N$ soll *unverzweigt* heißen, falls gilt:

1. $\mathbf{z}_1 \in N' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$.

2. Es gibt eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}_1) \subset N' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$ und eine holomorphe Abbildung $\mathbf{g} : V \to \mathbb{C}^d$, so dass $N \cap (V \times \mathbb{C}^d)$ nahe $(\mathbf{z}_1, u_1)$ mit dem Graphen $\{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in V \times \mathbb{C}^d \,:\, \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{z})\}$ übereinstimmt.

Offensichtlich ist N in solchen Punkten eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - d - 1$.

3.15 Satz. *In der Standard-Situation gilt: Zu jedem Punkt $(\mathbf{z}_1; \mathbf{u}_1) \in N \cap (U \times \mathbb{C}^d)$ gibt es einen linearen Koordinatenwechsel (beliebig nahe bei der Identität) in den Koordinaten $z_1, \ldots, z_{n-d}$, so dass der affine Raum parallel zur $(z_{n-d}; u_1, \ldots, u_d)$-„Achse" durch $(\mathbf{z}_1; \mathbf{u}_1)$ die Menge N in einem isolierten Punkt trifft. In jeder Umgebung von $(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1)$ gibt es unverzweigte Punkte von N.*

Beweis: Hat man wie oben eine Gerade $L \subset \mathbb{C}^{n-d}$ parallel zur z_{n-d}-Achse durch $\mathbf{z}_1$ gefunden, die N' in einem isolierten Punkt trifft, so trifft der Raum $L \times (\mathbf{u}_1 + \mathbb{C}^d)$ die Menge N bei $(\mathbf{z}_1; \mathbf{u}_1)$ in einem isolierten Punkt. Es bleibt nur noch die Existenz unverzweigter Punkte zu zeigen. Dazu modifizieren wir den vom Fall $d = 1$ her bekannten Algorithmus sinngemäß.

1) Es gibt eine Umgebung $U_1 = U_1(\mathbf{z}_1) \subset U \subset G \subset \mathbb{C}^{n-d}$, einen Polyzylinder P um $\mathbf{u}_1$ und Pseudopolynome $\omega_1^*, \ldots, \omega_d^*$ über U_1, so dass für $W_1 := U_1 \times \mathsf{P}$ gilt:

a) $A \cap W_1 = \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in U_1 \times \mathbb{C}^d \,:\, \omega_1^*(\mathbf{z}, u_1) = \ldots = \omega_d^*(\mathbf{z}, u_d) = 0\}$,

b) $(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1)$ ist der einzige Punkt von $A \cap W_1$ über $\mathbf{z}_1$.

2) Es sei $\pi : W_1 \to U_1$ die kanonische Projektion und $N_1' := \pi(W_1 \cap N)$, sowie $\mathbf{z}_2 \in N_1' \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$. Wir wählen eine Umgebung $U_2(\mathbf{z}_2) \subset U_1 \setminus (D_{\omega'} \times \mathbb{C})$, setzen $W_2 := U_2 \times \mathsf{P}$ und wählen dabei U_2 so klein, dass $N_2' := \pi(W_2 \cap N) = N' \cap U_2$ ist.

3) Über der regulären analytischen Menge N_2' erhalten wir eine Darstellung

$$N \cap W_2 = \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in N_2' \times \mathbb{C}^d \,:\, \omega_1^{**}(\mathbf{z}, u_1) = \ldots = \omega_d^{**}(\mathbf{z}, u_d) = 0\},$$

mit Pseudopolynomen ω_i^{**} ohne mehrfache Faktoren.

4) Sei $\mathbf{z}_3 \in N_2'$ kein Punkt der gemeinsamen Diskriminantenmenge der ω_i^{**}. Dann gibt es ein $\mathbf{u}_3 \in \mathbb{C}^d$, so dass $(\mathbf{z}_3, \mathbf{u}_3)$ in $N \cap W_2$ liegt. Offensichtlich gibt es eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}_3)$, so dass $N \cap (V \times \mathbb{C}^d)$ in der Nähe von $(\mathbf{z}_3, \mathbf{u}_3)$ die Gestalt eines holomorphen Graphen hat. Damit ist $(\mathbf{z}_3, \mathbf{u}_3)$ unverzweigt. ∎

Mit den gleichen Bezeichnungen wie bisher gilt:

3.16 Satz. *Sei $N' := \pi(N) \subset G$. Zu jedem Punkt $(\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0) \in N \subset G \times \mathbb{C}^d$ gibt es nach einer (beliebig kleinen) linearen Koordinatentransformation in den Koordinaten $z_1, \ldots, z_{n-d}$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$, ein Gebiet G' im Raum der Variablen $z_1, \ldots, z_{n-d-1}$ und ein Pseudopolynom ω' über G' ohne mehrfache Faktoren, so daß gilt:*

1. *$N' \cap U = \{\omega' = 0\}$.*

2. *$N \cap (U \times \mathbb{C}^d)$ ist eine eingebettet-analytische Menge der Dimension $n-d-1$.*

BEWEIS: Wir benutzen die Bezeichnungen und Ergebnisse von oben. A sei in die gemeinsame Nullstellenmenge der Pseudopolynome $\omega_1, \dots, \omega_d$ eingebettet. Die erste Aussage des Satzes ist schon klar. Nun setzen wir $\overline{\omega}_{d+1} := \omega'$. Indem wir die ω_i auf $(N' \cap U) \times \mathbb{C}^d$ einschränken und sie mit Hilfe der Abbildung

$$(z_1, \dots, z_{n-d}; u_1, \dots, u_d) \mapsto (z_1, \dots, z_{n-d-1}; u_1, \dots, u_d)$$

auf $G' \times \mathbb{C}^d$ projizieren, erhalten wir Pseudopolynome $\overline{\omega}_i(\mathbf{z}', u_i)$ über G'. Ist $\mathbf{z}' \in G' \setminus D_{\omega'}$, so besteht N' über einer Umgebung von $\mathbf{z}'$ aus Graphen $\{z_{n-d} = \varphi_\nu(\mathbf{z}')\}$, $\nu = 1, \dots, N$. Dort ist dann $\overline{\omega}_i(\mathbf{z}', u_i) = \prod_{\nu=1}^{N} \omega_i(\mathbf{z}', \varphi_\nu(\mathbf{z}'); u_i)$. Ist $(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in N$, so ist $\omega_i(\mathbf{z}, u_i) = 0$ für $i = 1, \dots, d$, und außerdem gibt es ein ν, so dass $\mathbf{z} = (\mathbf{z}', \varphi_\nu(\mathbf{z}'))$ und $\omega'(\mathbf{z}', \varphi_\nu(\mathbf{z}')) = 0$ ist. Das bedeutet, dass $N \cap (U \times \mathbb{C}^d)$ in der gemeinsamen Nullstellenmenge von $\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{d+1}$ enthalten ist. Sei $\underline{A}$ die Vereinigung derjenigen irreduziblen Komponenten dieser Menge, die unverzweigte Punkte von N enthalten. Da N der Abschluß der unverzweigten Punkte ist, folgt, daß $N \cap (G' \times \mathbb{C}^{d+1}) \subset \underline{A}$ ist.

In der Nähe eines unverzweigten Punktes ist N regulär von der Dimension $n-d-1$. Aber außerhalb der vereinigten Diskriminantenmenge der $\overline{\omega}_i$ sieht die entsprechende Komponente von $\underline{A}$ lokal wie ein holomorpher Graph über dem $(n-d-1)$-dimensionalen Raum aus. Das bedeutet, dass es zu jeder Komponente A_i von $\underline{A}$ eine kleine offene Menge $W \subset \mathbb{C}^n$ mit $W \cap N = W \cap A_i$ gibt. Wie beim Beweis des Abbildungssatzes folgern wir daraus, dass f auf ganz A_i verschwindet. Für die Polynome $\omega_1, \dots, \omega_d$ gilt das erst recht, und deshalb liegt jede irreduzible Komponente von $\underline{A}$ in N. Also ist $N \cap (U \times \mathbb{C}^d) = \underline{A}$ eingebettet-analytisch. ∎

Wir wollen eingebettet-analytische Mengen benutzen, um zu zeigen, dass ein beliebiger Durchschnitt von analytischen Mengen wieder eine analytische Menge ist.

Wir betrachten zunächst folgende Situation: Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Punkt. Außerdem sei eine Familie $\mathcal{S}$ von lokalen analytischen Funktionen f bei $\mathbf{z}_0$ gegeben, so dass gilt:

1. Zu jedem $f \in \mathcal{S}$ gibt es eine zusammenhängende offene Umgebung $U(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $f \in \mathcal{O}(U)$ und $f \not\equiv 0$.

2. $f(\mathbf{z}_0) = 0$.

Wir wollen eine „maximale“ analytische Menge S^* in einer Umgebung $U^*(\mathbf{z}_0) \subset G$ konstruieren, so dass es zu jeder Nullstellenmenge N von endlich vielen Elementen $f \in \mathcal{S}$ eine Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $S^* \cap V \subset N \cap V$ gibt. Dann ist S^* nahe $\mathbf{z}_0$ eindeutig bestimmt und kann als gemeinsame Nullstellenmenge der Funktionen $f \in \mathcal{S}$ aufgefasst werden. Diese Menge kann auch dann nicht-trivial sein, wenn die Definitionsbereiche der Funktionen f nur den Punkt $\mathbf{z}_0$ gemeinsam haben. Ist z.B. $\mathcal{S}$ die Menge der Funktionen $f_k(\mathbf{z}) := z_n^k/(1 - kz_n)$, definiert auf $U_k := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}(z_n) < 1/k\}$, so ist S^* die analytische Menge $\{z_n = 0\}$ in einer beliebigen Umgebung von $\mathbf{0}$, während der Durchschnitt aller U_k keine Umgebung des Ursprungs enthält.

Wir führen Induktion nach der Codimension der eingebettet-analytischen Mengen, die sich aus den Funktionen $f \in \mathcal{S}$ ergeben.

(A) Wir beginnen mit einer beliebigen Funktion $f \in \mathcal{S}$. Die Gleichung $f = 0$ definiert eine analytische Menge S. Wir beschreiben S in der Nähe von $\mathbf{z}_0$ durch ein Pseudopolynom und zerlegen S in irredzible Komponenten S_i (der Codimension 1) in einer Umgebung $U(\mathbf{z}_0)$ (gegeben durch Pseudopolynome $\omega_i(\mathbf{z}', z_n)$ in $G' \times \mathbb{C}$), und wir wählen die Umgebung U so klein, daß die S_i in der ganzen Umgebung irreduzibel bleiben.

(B) Als nächstes versuchen wir, Komponenten der Codimension 2 zu bekommen. Wenn auf einer Komponente S_i jede Funktion $f \in \mathcal{S}$ nahe $\mathbf{z}_0$ identisch verschwindet, so lassen wir S_i unverändert (und erhalten S_i als Komponente der Codimension 1 für S^*). Andernfalls gibt es ein $f' \in \mathcal{S}$, das auf keiner Umgebung von $\mathbf{z}_0$ auf S_i identisch verschwindet. Wir wenden Satz 3.16 an. Nach einer beliebig kleinen linearen Koordinatentransformation in den Koordinaten $\mathbf{z}' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ ist die Menge $S_i \cap \{f' = 0\}$ eine endliche Vereinigung von irreduziblen eingebettet-analytischen Mengen S_{ij} der Codimension 2, die irreduzibel bleiben, wenn wir zu einer kleineren Umgebung von $\mathbf{z}_0$ übergehen. Dabei sind die S_{ij} in die Nullstellenmenge zweier Pseudopolynome $\omega_1^{ij}(z_1, \ldots, z_{n-2}; z_{n-1})$ und $\omega_2^{ij}(z_1, \ldots, z_{n-2}; z_n)$ eingebettet.

(C) Jetzt folgt Codimension 3. Dazu müssen wir nur die Komponenten S_{ij} betrachten. Wir lassen S_{ij} unverändert, falls jedes f auf S_{ij} identisch verschwindet (und erhalten so Komponenten der Codimension 2 für S^*). Anderfalls finden wir ein $f'' \in \mathcal{S}$, das auf S_{ij} nicht identisch verschwindet, und wir können (nach einem beliebig kleinen Koordinatenwechsel in den Variablen $\mathbf{z}'' = (z_1, \ldots, z_{n-2})$) die Menge $S_{ij} \cap \{f'' = 0\}$ als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen eingebettet-analytischen Mengen S_{ijk} schreiben, die in der Nullstellenmenge von drei Pseudopolynomen $\omega_\lambda^{ijk}(z_1, \ldots, z_{n-3}; z_\lambda)$, $\lambda = n-2, n-1, n$, eingebettet sind.

(D) So fahren wir fort und erhalten ggf. Komponenten der Codimension 1, 2, … , $n-1$. Gibt es eine 1-dimensionale Komponente $S = S_{i_1 \ldots i_{n-1}}$, so dass nicht jedes $f \in \mathcal{S}$ auf S verschwindet, so müssen wir dieses S durch die Menge $\{\mathbf{z}_0\}$ ersetzen. Spätestens dort endet das Verfahren. Insgesamt sind nur endlich viele Schritte erforderlich.

Wir haben nun ein endliches System $\mathcal{S}_0$ von lokalen holomorphen Funktionen $f, f', f'', \ldots$ und ein endliches System $\mathcal{A}$ von irreduziblen eingebettet-analytischen Mengen S_i, S_{ij}, $S_{ijk}, \ldots$ erhalten, und wir können annehmen, dass sie alle auf ein und derselben Umgebung $U(\mathbf{z}_0) \subset G$ definiert sind, dass jedes d-dimensionale $S \in \mathcal{A}$ in eine Menge $G'_d \times \mathbb{C}^{n-d}$ eingebettet ist und dass es zur Einbettung von S

eine vereinigte Diskriminantenmenge $D_S \subset G'_d \subset \mathbb{C}^d$ gibt. Der erforderliche lineare Koordinatenwechsel in $\mathbf{z}'$ kann am Anfang der Prozedur erledigt werden, also einmal für alle Schritte gemeinsam.

Wenn eine irreduzible eingebettet-analytische Menge $S \in \mathcal{A}$ die Vereinigung der anderen Mengen von $\mathcal{A}$ in einem offenen Teil trifft, dann trifft sie auch mindestens ein irreduzibles $S' \in \mathcal{A}$, $S' \neq S$, in einem offenen Teil. Aus dem Abbildungssatz folgt, dass S vollständig in S' enthalten ist. In diesem Fall lassen wir S weg und bezeichnen das neue System wieder mit $\mathcal{A}$. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir, dass der Durchschnitt von jedem S mit der Vereinigung aller anderen Mengen aus $\mathcal{A}$ nirgendwo dicht in S ist. Außerdem sind natürlich auch die Punkte von S über D_S nirgendwo dicht in S.

Sei jetzt $S^* = \bigcup_{S\in\mathcal{A}} S$ die Vereinigung aller übrig gebliebenen Komponenten. Dann ist S^* als Nullstellenmenge der endlich vielen holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{S}_0$ eine analytische Menge. Ist $\widehat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$ eine beliebige endliche Teilmenge, so verschwindet in der Nähe von $\mathbf{z}_0$ jedes $f \in \widehat{\mathcal{S}}$ auf S^*. Also ist $S^* \subset N(\widehat{\mathcal{S}})$, und S^* ist durch seine Eigenschaften offensichtlich eindeutig bestimmt.

Schließlich wollen wir zeigen, dass die Zerlegung von S^* in die irreduziblen eingebettet-analytischen Komponenten $S \in \mathcal{A}$ eindeutig ist. Ein Punkt in einem $S \in \mathcal{A}$ ist ein regulärer Punkt von S^*, wenn er nicht im Durchschnitt von S mit der Vereinigung der übrigen Komponenten und nicht über D_S liegt. Deshalb ist $\dot{S} = S \cap \mathrm{Reg}(S^*)$ zusammenhängend, und somit in einer Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Reg}(S^*)$ enthalten. Das bedeutet aber, dass für $S \in \mathcal{A}$ die Mengen $\dot{S}$ die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Reg}(S^*)$ sein müssen. Weil S jeweils der Abschluss von $\dot{S}$ ist, sind die Komponenten S (nahe $\mathbf{z}_0$) eindeutig bestimmt.

3.17 Theorem. *Der Durchschnitt von (beliebig vielen) analytischen Mengen ist wieder eine analytische Menge und lokal eine endliche Vereinigung von irreduziblen eingebettet-analytischen Mengen. Diese Zerlegung ist lokal eindeutig bestimmt.*

BEWEIS: Sei $\{A_\iota : \iota \in I\}$ eine Familie von analytischen Mengen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{z}_0 \in A := \bigcap_{\iota\in I} A_\iota$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten das System $\mathcal{S}$ aller lokalen holomorphen Funktionen f, für die gilt:

1. f ist auf einer offenen Umgebung U von $\mathbf{z}_0$ (die von f abhängt) definiert.
2. $f \not\equiv 0$ nahe $\mathbf{z}_0$.
3. Es gibt ein $\iota \in I$, so dass f nahe $\mathbf{z}_0$ auf A_ι verschwindet.

Wie oben ist $\mathbf{z}_0$ in einer analytischen Menge S^* enthalten, die die Vereinigung irreduzibler eingebettet-analytischer Mengen S ist und die durch ein endliches Teilsystem $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ gegeben ist.

Liegt $\mathbf{z} \in A$ genügend nahe bei $\mathbf{z}_0$, so ist jedes $f \in \mathcal{S}_0$ in $\mathbf{z}$ definiert und verschwindet auf einem A_ι und damit in $\mathbf{z}$. Das zeigt, dass $A \subset S^*$ in einer Umgebung von $\mathbf{z}_0$ gilt.

Sei nun umgekehrt $\mathbf{z}$ ein Punkt im Durchschnitt von S^* mit einer kleinen Umgebung von $\mathbf{z}_0$. Jede der analytischen Mengen A_ι ist durch endlich viele holomorphe Funktionen $f_1^\iota, \ldots, f_N^\iota$ aus dem System $\mathcal{S}$ gegeben. Nach Konstruktion verschwindet dann jedes f_ν^ι auf jeder eingebettet-analytischen Komponente S von S^*, insbesondere in $\mathbf{z}$. Deshalb gilt $S^* \subset A_\iota$ für alle ι. Also ist S^* im Durchschnitt A aller A_ι enthalten, und wir erhalten die Gleichung $A = S^*$ nahe $\mathbf{z}_0$. Da S^* eine analytische Menge ist, die eine eindeutige Zerlegung in irreduzible eingebettet-analytische Mengen besitzt, ist alles bewiesen. ∎

Insbesondere besitzt jede analytische Menge lokal eine eindeutige Zerlegung in irreduzible eingebettet-analytische Komponenten.

3.18 Satz. *Das System $\mathcal{A}$ aller analytischer Mengen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *G und die leere Menge gehören zu $\mathcal{A}$.*
2. *Mit $A_1, \ldots, A_l \in \mathcal{A}$ ist auch $A = \bigcup_{i=1}^{l} A_i \in \mathcal{A}$.*
3. *Ist I eine Indexmenge und $\{A_\iota : \iota \in I\}$ eine Familie von analytischen Mengen in G, so ist auch $A = \bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ eine analytische Menge in G.*

Beweis:

(1) G ist definiert durch die Null-Funktion, und $\varnothing$ durch die konstante Funktion 1.

(2) Sei $\mathbf{z} \in A = A_1 \cup \cdots \cup A_l$. Dann gibt es in einer Umgebung $U(\mathbf{z})$ holomorphe Funktionen $f_{i,j} : i = 1, \ldots, l \; j = 1, \ldots, d_i$, so dass für alle i gilt:

$$U \cap A_i = N(f_{i,1}, \ldots, f_{i,d_i}).$$

Also ist $U \cap A = N(f_{1,j_1} \cdots f_{l,j_l} : j_i = 1, \ldots, d_i)$.

3) Dies folgt sofort aus dem Theorem. ∎

Die analytischen Mengen bilden also die abgeschlossenen Mengen einer Topologie in G. Wir nennen diese Topologie die *(analytische) Zariski-Topologie* von G. Sie spielt eine wichtige Rolle in der komplexen Algebraischen Geometrie.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine analytische Teilmenge. A heißt *irreduzibel*, falls die Menge $\operatorname{Reg}(A)$ der regulären Punkte von A zusammenhängend ist.

Jede irreduzible eingebettet-analytische Menge ist auch eine irreduzible analytische Menge.

Es folgt, dass eine irreduzible Menge A in allen regulären Punkten die gleiche Dimension hat. Diese Zahl d nennt man die *Dimension* von A und bezeichnet sie mit $\dim(A)$.

3.19 Theorem. *Jede analytische Menge A besitzt eine eindeutige Zerlegung in abzählbar viele irreduzible analytische Teilmengen A_i. Die Überdeckung $\mathcal{A} = \{A_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ ist lokal-endlich.*

BEWEIS: Wir zerlegen $\mathrm{Reg}(A)$ in Zusammenhangskomponenten. Sei A' eine solche Komponente. Sie habe in allen Punkten die Dimension d.

Wir betrachten einen Punkt $\mathbf{z}_0 \in A$, der in $\overline{A'}$ liegt. In einer Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ können wir A in endlich viele irreduzible eingebettet-analytische Komponenten $A_1, \dots, A_m$ zerlegen. Sei A_i^* die Menge derjenigen Punkte von A_i, die nicht über der vereinigten Diskriminantenmenge liegen. Einige d-dimensionale A_i^* treffen A'. Ihre Vereinigung A^* ist in A' enthalten und dicht in $A' \cap U$. Daher stimmt der Abschluss von A^* in U mit $\overline{A'} \cap U$ überein. Aber der Abschluss von A^* ist als Vereinigung von endlich vielen A_i eine analytische Menge.

Somit folgt, dass $\overline{A'}$ eine analytische Menge ist, dass nur endlich viele $\overline{A'}$ die Umgebung U treffen, und dass die Vereinigung aller $\overline{A'}$ ganz A ergibt (wie es schon lokal der Fall ist). Da die Topologie von G abzählbar ist, folgt, dass die Familie der $\overline{A'}$ abzählbar ist. ∎

3.20 Folgerung. *Ist A irreduzibel und $A = A_1 \cup A_2$ mit beliebigen analytischen Mengen A_1, A_2, so ist $A = A_1$ oder $A = A_2$.*

Manchmal wird diese Bedingung auch als Definition der Irreduzibilität benutzt.

3.21 Satz. *Es seien $A, B \subset G$ irreduzible analytische Mengen. Wenn es eine offene Menge $U \subset G$ gibt, so dass $A \cap U \neq \varnothing$ und $A \cap U \subset B \cap U$ ist, dann ist $A \subset B$.*

BEWEIS: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Abbildungssatz. ∎

Als Folgerung ergibt sich:

3.22 Identitätssatz (für analytische Mengen). *Seien $A, B \subset G$ irreduzible analytische Mengen. Wenn es einen Punkt $\mathbf{z}_0 \in A \cap B$ und eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ mit $A \cap U = B \cap U$ gibt, dann ist $A = B$.*

3.23 Satz. *Seien $A, B \subset G$ analytische Teilmengen mit $A \subset B$. Ist A irreduzibel, so ist A in einer irreduziblen Komponente von B enthalten.*

BEWEIS: Sei $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ die eindeutig bestimmte Zerlegung in irreduzible Komponenten. Wir können eine offene Menge $U \subset G$ und eine endliche Menge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\} \subset \Lambda$ finden, so dass $U \cap A \neq \varnothing$ irreduzibel ist, sowie

$$U \cap B = (U \cap B_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (U \cap B_{\lambda_l}).$$

Dann ist $U \cap A = U \cap A \cap B = (U \cap A \cap B_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (U \cap A \cap B_{\lambda_l})$. Also gibt es einen Index j, so dass $U \cap A = U \cap A \cap B_{\lambda_j}$ ist, also $U \cap A \subset U \cap B_{\lambda_j}$. Es folgt, dass A in B_{λ_j} enthalten ist. ∎

Jetzt können wir den Begriff der Dimension auf beliebige analytische Mengen erweitern.

Definition. Ist $A \subset G$ eine analytische Menge mit irreduziblen Komponenten A_i, so nennt man $\dim(A) := \sup_i \dim(A_i)$ die *(komplexe) Dimension* von A.

Für eine analytische Menge A in einem Gebiet G des $\mathbb{C}^n$ ist stets $0 \le \dim(A) \le n$.

Eine analytische Menge heißt *rein-dimensional* von der Dimension d, falls alle ihre irreduziblen Komponenten die gleiche Dimension d besitzen.

§ 4 Reguläre and singuläre Punkte

Wir wollen den folgenden einfachen Satz beweisen.

4.1 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine irreduzible kompakte analytische Menge, so besteht A aus einem einzigen Punkt.*

Beweis: Wir zeigen unter den Voraussetzungen des Satzes: „Ist f holomorph in einer Umgebung von A, so ist $f|_A$ konstant“. Daraus ergibt sich, dass alle Koordinatenfunktionen auf A konstant sein müssen, und das bedeutet, dass A nur aus einem einzelnen Punkt besteht.

Wir nehmen an, dass A die Dimension $n-d$ hat. Weil A kompakt ist, gibt es einen Punkt $\mathbf{z}_0 \in A$, wo $|f|$ sein Maximum annimmt. Weil A irreduzibel ist, folgt aus den Sätzen des vorherigen Paragraphen: Nach einem linearen Koordinatenwechsel gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und ein Gebiet $G' \subset \mathbb{C}^{n-d}$, so dass $A \cap U$ eine eingebettet-analytische Menge über G' ist. Sei $D \subset G'$ die vereinigte Diskriminantenmenge. Über jedem $\mathbf{z}' \in G' \setminus D$ hat $A \cap U$ gleich viel, etwa s Punkte. Der Punkt $\mathbf{z}_0$ liegt über einem $\mathbf{z}'_0 \in G'$, und wir können annehmen, dass er der einzige Punkt von $A \cap U$ über $\mathbf{z}'_0$ ist.

Wir betrachten $f|_{A\cap U}$ über $G' \setminus D$. Wenn $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s$ auf $\mathbf{z}'$ abgebildet werden, so definieren wir $f_i(\mathbf{z}') := \sigma_i(f(\mathbf{z}_1), \dots, f(\mathbf{z}_s))$, wobei σ_i die i-te elementarsymmetrische Funktion ist. Die Funktionen f_i sind holomorph auf $G' \setminus D$ und beschränkt längs D, lassen sich also zu holomorphen Funktionen auf G' fortsetzen. Weil über $\mathbf{z}'_0$ nur der Punkt $\mathbf{z}_0$ liegt, nimmt der Absolutbetrag jeder so fortgesetzten Funktion sein Maximum in $\mathbf{z}'_0$ an. Nach dem Maximumprinzip ist daher jede dieser Funktionen konstant auf G'. Da die Werte von f aus den Werten der f_i rekonstruiert werden können, muss auch f konstant auf $A \cap U$ sein, insbesondere in einer offenen Teilmenge von $\mathrm{Reg}(A)$. Da $\mathrm{Reg}(A)$ zusammenhängend ist, muss f konstant auf $\mathrm{Reg}(A)$ sein, und aus Stetigkeitsgründen dann auch auf ganz A. ∎

Es folgt, daß jede kompakte analytische Teilmenge $A \subset G$ nur aus endlich vielen Punkten besteht.

4.2 Der Einbettungssatz von Remmert-Stein. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $M \subset G$ eine analytische Menge und $\mathbf{0} \in M$. Die Ebene $E = \{z_1 = \cdots = z_{n-d} = 0\}$ schneide M in $\mathbf{0}$ in einem isolierten Punkt. Dann gibt es Polyzylinder $P \subset \mathbb{C}^{n-d}$ und $Q \subset \mathbb{C}^d$ um $\mathbf{0}$ und Pseudopolynome $\omega_i(\mathbf{z}'; z_i)$, $i = n-d+1, \dots, n$, so dass gilt:*

$$M \cap (P \times \mathbb{C}^d) \subset \widehat{A} := \{(\mathbf{z}'; \mathbf{z}'') \in P \times \mathbb{C}^d \,:\, \omega_i(\mathbf{z}', z_i) = 0 \text{ für } i = n-d+1, \dots, n\}$$

und

$$\widehat{A} \subset P \times Q.$$

Dabei ist keine Koordinatentransformation notwendig!

Ist die Menge der $(n-d)$-dimensionalen regulären Punkte dicht in M, so ist M selbst eine eingebettet-analytische Menge.

Beweis: In einer Umgebung $V = V(\mathbf{0})$ ist M die Nullstellenmenge $N(f_1, \dots, f_N)$ von endlich vielen holomorphen Funktionen . Da $M \cap E = \{\mathbf{0}\}$ ist, gibt es ein i, so dass f_i in keiner Umgebung der $\mathbf{0}$ auf der z_n-Achse identisch verschwindet. O.B.d.A. ist f_1 z_n-allgemein, und wir können den Weierstraßschen Vorbereitungssatz anwenden, der impliziert, daß M lokal in der Nullstellenmenge eines Pseudopolynoms $\omega(z_1, \dots, z_{n-1}; z_n)$ enthalten ist.

Wir beweisen jetzt durch Induktion nach d, dass M lokal in der Nullstellenmenge von d Pseudopolynomen enthalten ist. Im Falle $d = 1$ ist schon alles gezeigt. Ist $d > 1$, so ist $n - d < n - 1$. Wir betrachten dann die Projektion $\pi_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ mit $\mathbf{z} \mapsto \widetilde{\mathbf{z}} = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Den Funktionen $f_2, \dots, f_N$ können wir wie üblich holomorphe Funktionen $\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_N$ von $\widetilde{\mathbf{z}}$ zuordnen, so dass in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ gilt:

$$\pi_n(\{\omega = f_2 = \cdots = f_N = 0\}) = \underline{M} := \{\widetilde{\mathbf{z}} \,:\, \overline{f}_2(\widetilde{\mathbf{z}}) = \cdots = \overline{f}_N(\widetilde{\mathbf{z}}) = 0\}.$$

Der Durchschnitt von $\widetilde{E} = \{\widetilde{\mathbf{z}} \,:\, z_1 = \cdots = z_{n-d} = 0\}$ mit $\underline{M}$ enthält wieder $\mathbf{0}$ als isolierten Punkt. Damit liegt bei $\underline{M}$ die gleiche Situation wie bei M vor, aber die Dimension ist um 1 kleiner. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Pseudopolynome $\omega_{n-d+1}, \dots, \omega_{n-1}$, so dass $\underline{M}$ lokal in der Menge

$$\{(\mathbf{z}', z_{n-d+1}, \dots, z_{n-1}) \,:\, \omega_{n-d+1}(\mathbf{z}'; z_{n-d+1}) = \cdots = \omega_{n-1}(\mathbf{z}'; z_{n-1}) = 0\}$$

enthalten ist.

Da wir an Stelle der Projektion π_n auch die Projektion $\pi_{n-1} : \mathbf{z} \mapsto (z_1, \dots, z_{n-2}, z_n)$ verwenden können, erhalten wir auch noch ein Pseudopolynom $\omega_n(\mathbf{z}'; z_n)$, so dass schließlich M in $\widehat{A} = \{\omega_{n-d+1} = \cdots = \omega_{n-1} = \omega_n = 0\}$ enthalten ist. Wir können Polyzylinder $P \subset \mathbb{C}^{n-d}$ und $Q \subset \mathbb{C}^d$ finden, so dass sich alles in $P \times Q$ abspielt.

Wenn die regulären Punkte der Dimension $n - d$ dicht in M liegen, so können wir die Vereinigung A derjenigen irreduziblen eingebettet-analytischen Komponenten von $\widehat{A}$ bilden, die solch einen regulären Punkt enthalten. Dann müssen A und M übereinstimmen, und alles ist bewiesen. ∎

Bemerkung. Die Bedingung, dass die regulären Punkte der Dimension $n - d$ dicht in M liegen, ist z.B. dann nicht erfüllt, wenn M niedrigere Dimension hat, also gar keine regulären Punkte der Dimension $n - d$ besitzt, oder auch, wenn M niederdimensionale Zweige besitzt.

Man kann den Einbettungssatz wie folgt erweitern: Wenn es keine Ebene F der Dimension $d+1$ gibt, so dass $\mathbf{0}$ isoliert in $M \cap F$ ist, dann kann man eine eingebettet-analytische Menge A finden, so dass $A \subset M \subset \widehat{A}$ ist. Zum Beweis braucht man den „Projektionssatz“: Ist $\pi : P \times Q \to P$ die kanonische Projektion (in der obigen Situation), so ist $\pi(M) \subset P$ analytisch (vgl. dazu Rothstein/Kopfermann, Seite

123). Wegen der Zusatzbedingung kann $\pi(M)$ in P nicht nirgends dicht sein, es muss dann also $\pi(M) = P$ sein. Über einem Punkt $\mathbf{p} \in P$ außerhalb der vereinigten Diskriminantenmenge D der ω_i liegt $\widehat{A}$ in Form endlich vieler regulärer Blätter S_j. Die Vereinigung der endlich vielen Mengen $M \cap S_j$ kann nur dann M ergeben, wenn eines der Blätter in M enthalten ist. Also enthält M eine offene und zusammenhängende Teilmenge U von $\widehat{A}$, und man kann annehmen, dass U nicht über der Diskriminantenmenge liegt. Offensichtlich muss U in einer irreduziblen eingebettet-analytischen Komponente A von $\widehat{A}$ liegen. Sei $A^* := A|(P \setminus D)$. Dann ist $M \cap A^*$ eine analytische Teilmenge von A^* mit nicht-leerem Inneren. Also muss $M \cap A^* = A^*$ und daher $A \subset M$ sein.

Dieses Zusatzergebnis werden wir hier allerdings nicht benutzen.

Gelegentlich werden wir noch den folgenden Spezialfall brauchen:

4.3 Satz. *Sei $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-d}$ die kanonische Projektion auf die ersten $n-d$ Komponenten, $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subset G$ eine analytische Menge und $G' \subset \mathbb{C}^{n-d}$ ein Gebiet mit $\pi(G) \subset G'$. Außerdem gebe es ein Gebiet $\widetilde{G} \subset G$, so dass jeder Punkt $\mathbf{z}' \in G'$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}') \subset\subset G'$ besitzt, so dass gilt:*

$$(\overline{U} \times \mathbb{C}^d) \cap A \subset (\overline{U} \times \mathbb{C}^d) \cap \widetilde{G} \subset\subset (\overline{U} \times \mathbb{C}^d) \cap G.$$

Ist die Menge der regulären $(n-d)$-dimensionalen Punkte dicht in A, so ist A eine eingebettet-analytische Menge über G'.

Beweis: Sei $\mathbf{z}'_0 \in G'$ beliebig. Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Menge $(\{\mathbf{z}'_0\} \times \mathbb{C}^d) \cap A$ kompakt und analytisch ist. Deshalb besteht sie nur aus endlich vielen Punkten $(\mathbf{z}'_0, \mathbf{u}_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, N$. Nach dem Einbettungssatz von Remmert-Stein besitzt jeder dieser Punkte eine Umgebung $V_\nu \subset G' \times \mathbb{C}^d$, so dass $A \cap V_\nu$ jeweils eine eingebettet-analytische Teilmenge einer gemeinsamen Nullstellenmenge $\widehat{A}_\nu$ von d Pseudopolynomen $\omega_i^\nu(\mathbf{z}'; u_i)$ ist, $i = 1, \ldots, d$. Nun sei

$$\omega_i(\mathbf{z}'; u_i) := \prod_{\nu=1}^{N} \omega_i^\nu(\mathbf{z}', u_i), \text{ für } i = 1, \ldots, d.$$

Über einer geeigneten Umgebung $U'(\mathbf{z}'_0) \subset G'$ liegt $A \cap (U' \times \mathbb{C}^d)$ in der Nullstellenmenge $\widehat{A} = \bigcup_\nu \widehat{A}_\nu$ der Pseudopolynome $\omega_1, \ldots, \omega_d$. Die lokal gegebenen Pseudopolynome können zu globalen Pseudopolynomen über G' zusammengeklebt werden. ∎

Bemerkung. Eine analytische Menge $A \subset G$ muss in G immer von Rand zu Rand laufen. Die Voraussetzungen des obigen Satzes sorgen dafür, dass dies – bezogen auf die Projektion π – nicht oben oder unten in Projektionsrichtung geschieht. Um A als endliche verzweigte Überlagerung über G' zu erhalten, muss man etwas derartiges fordern.

4.4 Satz. *Sei A eine analytische Menge in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{z}_0$ ein regulärer Punkt der Dimension $n-d$ von A. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$, so dass $A \cap U$ eine irreduzible eingebettet-analytische Menge ist.*

Beweis: Es gibt eine Umgebung U von $\mathbf{z}_0$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ auf U, so dass $N(f_1, \ldots, f_d) = A \cap U$ und $\operatorname{rg}(J_\mathbf{z}(f_1, \ldots, f_d)) = d$ für alle $\mathbf{z} \in U$ ist. Wir können annehmen, dass gilt:

$$\det \left((f_i)_{z_j}(\mathbf{z}_0) \;\middle|\; \begin{matrix} i = 1, \ldots, d \\ j = 1, \ldots, d \end{matrix} \right) \neq 0.$$

Dann bildet $\mathbf{F}(z_1, \ldots, z_n) = (f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_d(\mathbf{z}), z_{d+1} - z_{d+1}^{(0)}, \ldots, z_n - z_n^{(0)})$ eine Umgebung von $\mathbf{z}_0$, die wir wieder U nennen wollen, biholomorph auf eine Umgebung des Nullpunktes ab. Wir können annehmen, dass $A \cap U$ zusammenhängend ist. Ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}) = (g_1(\mathbf{w}), \ldots, g_d(\mathbf{w}), w_{d+1} + z_{d+1}^{(0)}, \ldots, w_n + z_n^{(0)}),$$

so wird $A \cap U = \mathbf{F}^{-1}(\{\mathbf{0}'\} \times \mathbb{C}^{n-d})$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(0, \ldots, 0, z_{d+1} - z_{d+1}^{(0)}, \ldots, z_n - z_n^{(0)}), \\ &\vdots \\ z_d &= g_d(0, \ldots, 0, z_{d+1} - z_{d+1}^{(0)}, \ldots, z_n - z_n^{(0)}). \end{aligned}$$

beschrieben. Damit ist $A \cap U$ Nullstellenmenge von d Pseudopolynomen vom Grad 1 in den Unbestimmten $z_1, \ldots, z_d$, also eine eingebettet-analytische Menge der Dimension $n-d$ über dem Raum der Koordinaten $z_{d+1}, \ldots, z_n$. Da bei linearen Polynomen keine Verzweigungsmenge auftritt und $A \cap U$ zusammenhängend ist, ist $A \cap U$ irreduzibel. ∎

4.5 Folgerung. *Ist eine analytische Menge A in jeder Umgebung von $\mathbf{z}_0 \in A$ reduzibel, so ist A in $\mathbf{z}_0$ singulär.*

Der Beweis ist trivial.

4.6 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine analytische Menge. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{z}_0 \in A$ eine Umgebung $U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ auf U mit $N(f_1, \ldots, f_N) = A \cap U$, so dass für alle d in jedem regulären Punkt $\mathbf{z} \in A \cap U$ der Dimension $n-d$ gilt:*

$$\operatorname{rg}(J_\mathbf{z}(f_1, \ldots, f_N)) = d.$$

Beweis: Im Laufe der Prozedur sind verschiedene lineare Koordinatentransformationen erforderlich. Diese können jeweils beliebig nahe bei der Identität gewählt werden.

Sei d eine beliebige natürliche Zahl, so daß A beliebig nahe bei $\mathbf{z}_0$ reguläre Punkte der Dimension $n-d$ besitzt. Nach einer ersten Transformation im $\mathbb{C}^n$ können wir eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ finden, so daß $A \cap U$ endliche Vereinigung von irreduziblen eingebettet-analytischen Komponenten ist und die Vereinigung A' aller $(n-d)$-dimensionalen Komponenten von $A \cap U$ eingebettet-analytisch in der Nullstellenmenge $N(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ von endlich vielen Pseudopolynomen über einem Gebiet des $\mathbb{C}^{n-d}$ liegt. Dabei wählen wir die ω_i mit minimalem Grad.

Sei $\widehat{D} \subset A'$ die Menge derjenigen Punkte, die über der vereinigten Diskriminantenmenge $D_{A'}$ liegen. Es ist $\dim(\widehat{D}) \le n-d-1$. Der Beweis wird jetzt in mehreren Schritten geführt. Wir konstruieren induktiv analytische Mengen $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \ldots, \widehat{D}_{n-d+1} = \varnothing$ mit $\widehat{D}_{i+1} \subset \widehat{D}_i$ und $\dim(\widehat{D}_i) \le n-d-i$, so dass die Behauptung des Satzes jeweils auf $A' \setminus \widehat{D}_i$ gilt.

Wir beginnen mit $\widehat{D}_1 := \widehat{D}$. Außerhalb von $\widehat{D}_1$ ist A' regulär von der Dimension $n-d$ und stimmt deshalb jeweils lokal mit $N(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ überein. Weil $N(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ dort wie ein Graph aussieht, kann man in der Nähe eines Punktes $\mathbf{z} \in A' \setminus \widehat{D}_1$ schreiben:

$$\omega_i(z_1, \ldots, z_{n-d}; z_{n-d+i}) = (z_{n-d+i} - f_i(z_1, \ldots, z_{n-d})) \cdot \omega_i^*(z_1, \ldots, z_n),$$

mit $\omega_i^*(\mathbf{z}) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}) = \frac{\partial(z_{n-d+i} - f_i(z_1, \ldots, z_{n-d}))}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}) \cdot \omega_i^*(\mathbf{z}) = \delta_{\nu, n-d+i} \cdot \omega_i^*(\mathbf{z}),$$

für $\nu = n-d+1, \ldots, n$ und $i = 1, \ldots, d$, und damit

$$\det \frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_d)}{\partial(z_{n-d+1}, \ldots, z_n)}(\mathbf{z}) = \det \begin{pmatrix} \omega_1^*(\mathbf{z}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_d^*(\mathbf{z}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Folglich ist in solchen Punkten $\operatorname{rg}_{\mathbf{z}}(\omega_1, \ldots, \omega_d) \ge d$, und da der Rang nicht größer als d sein kann, gilt sogar die Gleichheit.

Als nächstes zerlegen wir $\widehat{D}_1$ in irreduzible Komponenten C_λ. Wenn wir U klein genug wählen, gibt es nur endlich viele C_λ, die in U eindringen. In jedem dieser C_λ wählen wir – sofern vorhanden – einen Punkt $\mathbf{z}_\lambda$, wo A' regulär ist. Sei Λ_0 die Menge der Indizes λ, für die C_λ einen solchen Punkt enthält. Durch zwei weitere lineare Koordinatenwechsel (nahe der Identität) können wir erreichen:

a) Für jedes $\lambda \in \Lambda_0$ hat A' in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{z}_\lambda$ die Gestalt eines $(n-d)$-dimensionalen holomorphen Graphen

$$\{\mathbf{z} \,:\, z_i = f_{\lambda,i}(z_1, \ldots, z_{n-d}) \text{ für } i = n-d+1, \ldots, n\}.$$

b) In den gemäß (a) gewählten neuen Koordinaten sei $\mathbf{z}_\lambda = (\mathbf{z}'_\lambda, \mathbf{z}''_\lambda)$. Die zweite Transformation braucht jetzt nur in $z_{n-d+1}, \ldots, z_n$ durchgeführt zu werden, und zwar so, dass für jedes $\lambda \in \Lambda_0$ und je zwei Punkte $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in A'$, die über $\mathbf{z}'_\lambda$ liegen, jeweils $u_{n-d+i} \neq v_{n-d+i}$ ist, für $i = 1, \ldots, d$.

Weil die jeweils erforderlichen Koordinatenwechsel offen und dicht in der Gruppe aller affin-linearen Koordinatentransformationen liegen, kann man sie alle auf einmal durchführen und dabei noch beliebig nahe bei der Identität wählen. So wird erreicht, dass die $\mathbf{z}_\lambda$ (für $\lambda \in \Lambda_0$) anschließend nicht mehr über der Diskriminantenmenge liegen.

Jetzt wollen wir Satz 4.3. auf die Projektion $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-d})$ (in den neuen Koordinaten) anwenden. Es kann sein, dass A' die Umgebung U nach der oben durchgeführten Koordinatentransformation irgendwo in Projektionsrichtung verlässt. Aber wenn die Transformation nahe genug bei der Identität gewählt wurde, dann kann das höchstens am Rande der Projektion von U passieren, und dann reicht es, von U zu einer geringfügig kleineren Umgebung U^* überzugehen, um die Voraussetzungen von 4.3. herzustellen. An Stelle von U^* schreiben wir wieder U. Dann ist $A' \cap U$ wieder eine eingebettet-analytische Menge in der gemeinsamen Nullstellenmenge von Pseudopolynomen $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_d$. Wie üblich wählen wir die $\widetilde{\omega}_i$ mit minimalem Grad. Dabei können wir annehmen, dass die Komponenten von $\widehat{D}_1$ in U immer noch irreduzibel sind und dass die Punkte $\mathbf{z}_\lambda$ noch in U liegen.

In der Nähe von $\mathbf{z}_\lambda$ haben wir jetzt eine Zerlegung

$$\widetilde{\omega}_i(z_1, \ldots, z_{n-d}; z_{n-d+i}) = (z_{n-d+i} - f_{\lambda,i}(z_1, \ldots, z_{n-d})) \cdot \omega^*_{\lambda,i}(z_1, \ldots, z_n),$$

mit $\omega^*_{\lambda,i}(\mathbf{z}_\lambda) \neq 0$. Wie oben folgt daraus:

$$\det \frac{\partial(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_d)}{\partial(z_{n-d+1}, \ldots, z_n)}(\mathbf{z}_\lambda) \neq 0 \text{ für } \lambda \in \Lambda_0.$$

Sei $\widehat{D}_2 \subset U \cap \widehat{D}_1$ die Nullstellenmenge von

$$g(\mathbf{z}) := \det \frac{\partial(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_d)}{\partial(z_{n-d+1}, \ldots, z_n)}(\mathbf{z}).$$

Weil g nicht identisch verschwindet, hat $\widehat{D}_2$ höchstens die Dimension $n-d-2$. In den regulären Punkten von $A' \cap (\widehat{D}_1 \setminus \widehat{D}_2)$ ist $\operatorname{rg}_{\mathbf{z}}(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_d) = d$, das folgt wie oben bei den ω_i.

Offensichtlich liegt A' in einer Umgebung von $\mathbf{z}_0$ in $N(\omega_1, \ldots, \omega_d, \widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_d)$, und das System der Polynome $\omega_1, \ldots, \omega_d, \widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_d$ hat in den regulären Punkten von $A' \setminus \widehat{D}_2$ mindestens den Rang d. Weil der Rang nicht größer als d sein kann, muss er dort $= d$ sein.

Nun wenden wir die gleiche Prozedur auf $\widehat{D}_2$ an und erhalten eine Menge $\widehat{D}_3$, die höchstens Komponenten der Dimension $(n-d-3)$ besitzt, sowie ein System von $3d$ Pseudopolynomen, das auf $A' \setminus \widehat{D}_3$ den Rang d hat. So fahren wir fort und erreichen schließlich $\widehat{D}_{n-d+1} = \varnothing$.

Alle Pseudopolynome zusammen ergeben holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_d$, f_{d+1}, $\ldots$, f_N (mit $N = (n-d+1) \cdot d$) auf einer Umgebung U von $\mathbf{z}_0$, deren Rang in jedem regulären Punkt von $A' \cap U$ gleich d ist. Nach Konstruktion ist $A' \subset N(f_1, \ldots, f_N)$ nahe $\mathbf{z}_0$. Sollte die gemeinsame Nullstellenmenge der Pseudopolynome noch Punkte enthalten, die nicht zu A' gehören, so kann man das Funktionensystem um endlich viele Funktionen erweitern (z.B. um die Funktionen, deren gemeinsame Nullstellenmenge gerade A' ist). Der Rang wird dabei nicht mehr verändert. Deshalb können wir annehmen, dass schon $A' = N(f_1, \ldots, f_N)$ ist.

Jetzt setzen wir $A^+ = \overline{A \cap U \setminus A'}$. Das ist die Vereinigung der übrigen irreduziblen Komponenten von $A \cap U$. Wir können annehmen, dass U so klein ist, dass A^+ die gemeinsame Nullstellenmenge von endlich vielen holomorphen Funktionen $g_1, \ldots, g_s$ in U ist. Multiplizieren wir die f_i mit den g_j, so erhalten wir endlich viele holomorphe Funktionen auf U, die die Menge $A \cap U$ beschreiben. Kein Punkt von $A' \cap A^+$ ist ein regulärer Punkt von A. Zu jedem $\mathbf{z} \in A' \setminus A^+$ gibt es ein g_j, das dort nicht verschwindet. Daher ist der Rang der $f_i \cdot g_j$ in jedem nichtsingulären Punkt von $A' \setminus A^+$ gleich d.

Die gleiche Prozedur kann für jedes d und die entsprechende Menge A' benutzt werden. So erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Umgebung von $\mathbf{z}_0$ und holomorphe Funktionen auf dieser Umgebung, die A beschreiben und in den regulären Punkten von A die gewünschte Rang-Eigenschaft besitzen. ■

Jetzt folgt:

4.7 Theorem. *Die Menge* $\mathrm{Sing}(A)$ *der singulären Punkte einer analytischen Menge* A *ist wieder eine analytische Menge.*

BEWEIS: Der Durchschnitt zweier irreduzibler Komponenten von A gehört zu $\mathrm{Sing}(A)$. Die Vereinigung S aller dieser Durchschnitte ist eine lokal-endliche Vereinigung analytischer Mengen, also selbst eine analytische Menge.

Sei nun $\mathbf{z}_0$ ein Punkt einer irreduziblen Komponente A' von A mit $\dim(A') = n - d$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ auf U, die genau auf $A' \cap U$ verschwinden und in jedem regulären Punkt von $A' \cap U$ den Rang d haben. Sei S^* die analytische Menge aller Punkte von $A' \cap U$, wo alle d-reihigen Unterdeterminanten der Jacobi-Matrix von $(f_1, \ldots, f_N)$ verschwinden. Offensichtlich ist S^* in $\mathrm{Sing}(A') \cap U$ enthalten. Andererseits kann die Jacobische von $f_1, \ldots, f_N$ in den Punkten von $\mathrm{Sing}(A') \cap U$ nicht den Rang d besitzen. Also ist $\mathrm{Sing}(A') \cap U = S^*$ und daher $\mathrm{Sing}(A')$ analytisch in G.

Die Vereinigung von S und den Mengen $\mathrm{Sing}(A')$ (für alle irreduziblen Komponenten A') ergibt die Menge $\mathrm{Sing}(A)$. Sie ist analytisch, da die Vereinigung lokal endlich ist. ■

Die Menge $\mathrm{Sing}(A)$ nennt man auch den *singulären Ort* von A.

4.8 Hilfssatz. *Sei* $\mathbf{z}_0 = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \subset \mathbb{C}^n$ *ein beliebiger Punkt und* $E = \{\mathbf{z} : z_i = z_i^{(0)}$ *für* $i = 1, \dots, d\}$ *eine affine Ebene der Codimension* d*, die* $\mathbf{z}_0$ *enthält. Ist* $G \subset \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet und* $A \subset G$ *eine irreduzible analytische Menge positiver Dimension, die keine Teilmenge von* E *ist, so gibt es eine offene dichte Teilmenge* $C \subset \mathbb{C}^d$*, so dass für alle* $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) \in C$ *gilt:*

$$f_{\mathbf{c}}(z_1, \dots, z_n) := c_1\big(z_1 - z_1^{(0)}\big) + \dots + c_d\big(z_d - z_d^{(0)}\big)$$

verschwindet nicht identisch auf A*.*

Insbesondere gibt es zu jeder Hyperebene $H_0 \subset \mathbb{C}^n$*, die* E *enthält, eine Hyperebene* H *beliebig nahe bei* H_0*, die ebenfalls* E *enthält, so dass* $\dim(A_i) \le \dim(A) - 1$ *für jede irreduzible Komponente* A_i *von* $A \cap H$ *gilt.*

Beweis: Wir definieren $\varphi : \mathbb{C}^d \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ durch $\varphi(\mathbf{c}) := f_{\mathbf{c}}$. Das ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, und $V := \{\mathbf{c} \in \mathbb{C}^d : f_{\mathbf{c}}|_A \equiv 0\}$ ist ein linearer Unterraum. Wir nehmen an, dass $V = \mathbb{C}^d$ ist. Dann ist $(z_i - z_i^{(0)})|_A \equiv 0$ für $i = 1, \dots, d$, und daher $A \subset E$. Aber das ist ein Widerspruch, also muss V ein echter Unterraum von $\mathbb{C}^d$ sein. Für alle $\mathbf{c}$ in der offenen dichten Teilmenge $C := \mathbb{C}^d \setminus V$ verschwindet $f_{\mathbf{c}}$ auf A nicht identisch.

$H_{\mathbf{c}} := \{\mathbf{z} : f_{\mathbf{c}}(\mathbf{z}) = 0\}$ ist für $\mathbf{c} \in C$ eine Hyperebene, die E enthält. Da $f_{\mathbf{c}}$ auf A nicht identisch verschwindet, kann keine irreduzible Komponente A_i von $A \cap H_{\mathbf{c}}$ einen offenen Teil von A enthalten. Demnach müssen die A_i kleinere Dimension als A besitzen. ∎

Es soll nun ein Satz über die Fortsetzbarkeit analytischer Mengen bewiesen werden. Wichtigstes Werkzeug ist dabei das folgende Ergebnis:

4.9 Satz. *Ist* $E = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : z_1 = \dots = z_d = 0\}$ *eine* $(n-d)$*-dimensionale Ebene und* A *eine analytische Menge in* $G \setminus E$*, deren irreduzible Komponenten alle* $(n-d+l)$*-dimensional (mit* $0 < l < d$*) sind, so ist der Abschluss* $\overline{A}$ *von* A *in* G *eine analytische Menge in* G*.*

Beweis: Da die Aussage des Satzes von lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass A irreduzibel und $\mathbf{0} \in E \cap G$ ist. Es reicht dann, eine Fortsetzung von A in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ zu konstruieren.

Sei $\mathbf{c} = (0, \dots, 0, c_{d+1}, \dots, c_n)$ ein beliebiger Punkt von $E \cap G$. Wir betrachten die folgende Familie von $(d-l)$-dimensionalen Ebenen durch $\mathbf{c}$: Zu jeder Matrix

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \dots, n-d+l \\ j = 1, \dots, d-l \end{array} \right) \in M_{n-d+l,d-l}(\mathbb{C})$$

haben wir die lineare Abbildung $\mathbf{L}_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^{d-l} \to \mathbb{C}^{n-d+l}$ und definieren

$$P(\mathbf{c}, \mathbf{A}) := \mathbf{c} + \big\{(\mathbf{w}', \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}')) : \mathbf{w}' \in \mathbb{C}^{d-l}\big\}.$$

Dann besteht $P(\mathbf{c}, \mathbf{A})$ aus Vektoren $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{d-l}, w_{d-l+1}, \dots, w_n)$ mit

$$\begin{aligned}
w_{d-l+i} &= \sum_{j=1}^{d-l} a_{ij}\cdot w_j \qquad\qquad \text{für } i=1,\ldots,l,\\
w_{d-l+i} &= c_{d-l+i} + \sum_{j=1}^{d-l} a_{ij}\cdot w_j \quad \text{für } i=l+1,\ldots,n-d+l.
\end{aligned}$$

Die Ebene $P(\mathbf{c},\mathbf{A})$ trifft E genau in $\mathbf{c}=(0,\ldots,0,c_{d+1},\ldots,c_n)$. Ist $\mathbf{O}$ die Null-Matrix, so ist $P(\mathbf{c}) := P(\mathbf{c},\mathbf{O}) = \mathbf{c}+P_0$ (mit $P_0 := \mathbb{C}^{d-l}\times\{\mathbf{0}''\}$) die Ebene $\mathbb{C}^{d-l}\times\{(0,\ldots,0,c_{d+1},\ldots,c_n)\}$.

Man kann die Menge der linearen Unterräume (mit fester Dimension) eines gegebenen Vektorraumes auf natürliche Weise mit einer Topologie versehen. Dann ist eine Umgebung von $\mathbf{c}+P_0$ gegeben durch die Menge aller Ebenen $P=\mathbf{c}+\widetilde{P}$ mit $\widetilde{P}\oplus(\mathbf{0}\times\mathbb{C}^{n-d+l})=\mathbb{C}^n$. Also ist jede $(d-l)$-dimensionale Ebene durch $\mathbf{c}$ in der Nähe von $P(\mathbf{c},\mathbf{O})$ von der Form $P(\mathbf{c},\mathbf{A})$.

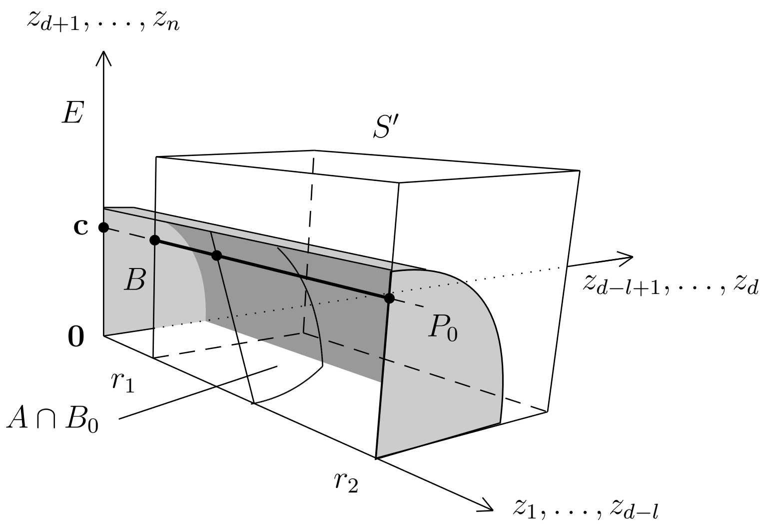
Wir wählen jetzt Zahlen $0<r_1<r_2$ und $r>0$ so klein, dass die Menge

$$S=\{\mathbf{z}=(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\in\mathbb{C}^{d-l}\times\mathbb{C}^{n-d+l} \,:\, r_1<\|\mathbf{z}'\|<r_2 \text{ und } |\mathbf{z}''|<r\}$$

eine relativ-kompakte offene Teilmenge von G ist. Nur endlich viele irreduzible Komponenten A_i von A treffen S. Wir können eine affine Hyperebene H_1 mit $\mathbf{c}\in H_1$ finden, die die A_i überhaupt nicht oder in Codimension 1 schneidet. Mit A_{ij} seien die endlich vielen irreduziblen Komponenten von $H_1\cap A_i$ bezeichnet, die S treffen. Wir können eine weitere Hyperebene H_2 mit $\mathbf{c}\in H_2$ finden, die alle A_{ij} höchstens in Codimension 2 trifft. Wir setzen diese Prozedur mit allen irreduziblen Komponenten der $A_{ij}\cap H_2$ fort, usw. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $n-d+l$ Hyperebenen, deren Durchschnitt P eine Ebene $P(\mathbf{c},\mathbf{A})$ ist, die $A\cap S$ in höchstens endlich vielen Punkten trifft. Nach Hilfssatz 4.8 können wir diese Ebene beliebig nahe bei $P_0:=P(\mathbf{c})$ wählen.

Jetzt drehen wir P nach P_0 zurück: Durch eine lineare Koordinatentransformation (sehr nahe bei der Identität), die E invariant lässt, können wir die Ebene $P(\mathbf{c},\mathbf{A})$ auf P_0 abbilden. Wir ersetzen die transformierte Menge S durch eine neue Menge S' (in den neuen Koordinaten), die ein bisschen kleiner ist, so dass $\overline{S'}$ in der alten (transformierten) Menge S enthalten ist. Dabei können wir erreichen, dass $\partial S'\cap P_0\cap A=\varnothing$ ist.

In einer Umgebung der Punkte von $A\cap P_0\cap S'$ ist A eine eingebettet-analytische Menge über einem Gebiet G' im Raum der Variablen $z_{d-l+1},\ldots,z_n$. Deshalb gibt es eine kleine abgeschlossene Kugel $\overline{B}\subset\mathbb{C}^{n-d+l}$ um den Nullpunkt, so dass $\big(\mathbb{C}^{d-l}\times\overline{B}\big)\cap\partial S'\cap A$ leer bleibt, jede irreduzible Komponente von $\big(\mathbb{C}^{d-l}\times\overline{B}\big)\cap S'\cap A$ aber $P_0\cap S'$ trifft, und jede Ebene durch einen Punkt von $\overline{B}$ und parallel zu P_0 die Menge $A\cap S'$ in höchstens endlich vielen Punkten trifft.



Die Menge $B_0 := \{\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{d-l} : \|\mathbf{z}'\| < r_2\} \times \overline{B}$ ist eine Umgebung des Nullpunktes in $\mathbb{C}^n$, und jede der parallelen Ebenen durch Punkte von $\overline{B} \setminus E$ trifft $A \cap B_0$ in einer kompakten analytischen Menge, also höchstens in endlich vielen Punkten. In all diesen Punkten ist die Menge A lokal eine eingebettet-analytische Menge über $\overline{B}$. Indem wir die Pseudopolynome mit der gleichen ausgezeichneten Variablen (die wir für die verschiedenen Schnittpunkte in $\overline{B} \setminus E$ über dem gleichen Basispunkt erhalten) miteinander multiplizieren, erhalten wir $A \cap \big(\mathbb{C}^{d-l} \times (\overline{B} \setminus E)\big)$ als eingebettet-analytische Menge über $\overline{B} \setminus E$. Die Koeffizienten der entsprechenden Pseudopolynome über $\overline{B} \setminus E$ sind längs E beschränkt. Also können sie nach $\overline{B}$ holomorph fortgesetzt werden. Das bedeutet, dass $A \cap (B_0 \setminus E)$ eine eindeutige analytische Fortsetzung nach B_0 besitzt. ∎

Der gerade bewiesene Satz bleibt gültig, wenn $A \subset G \setminus E$ eine analytische Menge ist, deren irreduzible Komponenten alle eine Dimension größer als $n - d$ besitzen, da wir A als endliche Vereinigung von rein-dimensionalen analytischen Mengen schreiben können. Schließlich erhalten wir:

4.10 Fortsetzungssatz von Remmert–Stein. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $K \subset G$ eine $(n-d)$-dimensionale analytische Teilmenge und A eine analytische Teilmenge von $G \setminus K$, deren Komponenten alle eine Dimension $> n - d$ besitzen. Dann ist der Abschluss $\overline{A}$ von A in G eine analytische Menge in G.*

Beweis: Ist $\mathbf{z}_0 \in K$ ein regulärer Punkt, so kann K in einer Umgebung von $\mathbf{z}_0$ biholomorph auf eine Ebene E abgebildet werden. Damit ist $\overline{A}$ analytisch in einer Umgebung von $\mathbf{z}_0$. Das gilt für alle regulären Punkte von K.

Jetzt ersetzen wir K durch die analytische Menge K_1 der singulären Punkte von K, die niedrigere Dimension besitzt. Wie oben zeigen wir, dass $\overline{A}$ in allen regulären Punkten von K_1 analytisch ist. So fahren wir fort und zeigen schließlich, dass $\overline{A}$ in G analytisch ist. ∎

Wir wollen jetzt den Zusammenhang unserer Resultate mit der lokalen Dimensionstheorie analytischer Mengen herstellen.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subset G$ eine analytische Menge und $\mathbf{z}_0 \in A$ ein Punkt. Es gibt eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$, so dass $U \cap A$ eine endliche Vereinigung irreduzibler analytischer Komponenten $A_1, \ldots, A_l$ ist. Wählen wir U klein genug, so sind die A_i eindeutig bestimmt.

Definition. In der gegebenen Situation nennt man die eindeutig bestimmte Zahl

$$\dim_{\mathbf{z}_0}(A) := \max_{\lambda=1,\ldots,l} \dim(A_\lambda)$$

die *(lokale) Dimension* von A in $\mathbf{z}_0$.

Die Menge A hat genau dann die Dimension 0 in $\mathbf{z}_0 \in A$, wenn es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ gibt, so dass $U \cap A = \{\mathbf{z}_0\}$ ist.

4.11 Satz. *Sei $k := \dim_{\mathbf{z}_0}(A)$ positiv. Dann ist k die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, dass es holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ in einer kleinen Umgebung U von $\mathbf{z}_0$ gibt, so dass $\mathbf{z}_0$ in $A \cap N(f_1, \ldots, f_k)$ isoliert ist.*

BEWEIS: Ist $\dim_{\mathbf{z}_0}(A) = k$, dann muss es wenigstens eine k-dimensionale irreduzible Komponente A' von A durch $\mathbf{z}_0$ geben.

Ist f irgend eine holomorphe Funktion nahe $\mathbf{z}_0$, so ist entweder $f|_{A'} \equiv 0$ (und deshalb $A \cap N(f)$ immer noch k-dimensional), oder $A' \cap N(f)$ ist $(k-1)$-dimensional. Also braucht man mindestens k Functionen.

Umgekehrt können wir eine holomorphe Funktion f_1 nahe $\mathbf{z}_0$ finden, die auf keiner k-dimensionalen irreduziblen Komponente A' durch $\mathbf{z}_0$ identisch verschwindet. Es folgt, dass $A' \cap N(f_1)$ Dimension $k-1$ hat, für alle solche Komponenten A'. Wir können diesen Prozess wiederholen, und nach k Schritten erreichen wir Dimension Null, so dass $\mathbf{z}_0$ in $A \cap N(f_1, \ldots, f_k)$ isoliert ist. ∎

Definition. Hat A in $\mathbf{z}_0$ Dimension k, so nennt man jedes System $\{f_1, \ldots, f_k\}$ von holomorphen Funktionen mit $A \cap N(f_1, \ldots, f_k) = \{\mathbf{z}_0\}$ ein *Parametersystem* für A in $\mathbf{z}_0$.

4.12 Lemma von Ritt. *$B \subset A$ seien abgeschlossene analytische Mengen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$. Genau dann ist B nirgends dicht in A, wenn $\dim_{\mathbf{z}}(B) < \dim_{\mathbf{z}}(A)$ für alle $\mathbf{z} \in B$ gilt.*

BEWEIS: Sei zunächst das Kriterium erfüllt und $\mathbf{z}_0$ ein beliebiger Punkt von B. Dann gibt es eine offene Umgebung U von $\mathbf{z}_0$ in G und ein Parametersystem $\{f_1, \ldots, f_k\}$ auf U für B in $\mathbf{z}_0$. Weil $\dim_{\mathbf{z}_0}(A) > k$ ist, kann $\mathbf{z}_0$ in $A \cap N(f_1, \ldots, f_k)$ nicht isoliert sein. Das bedeutet, dass $(A \setminus B) \cap N(f_1, \ldots, f_k) \cap W \neq \varnothing$ für jede Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0)$ gilt. Also ist B nirgends dicht in A.

Sei umgekehrt B nirgends dicht in A und $\mathbf{z}_0$ ein Punkt von B. In einer kleinen Umgebung U von $\mathbf{z}_0$ haben wir eindeutige Zerlegungen in irreduzible Komponenten:

$$B \cap U = B_1 \cup \cdots \cup B_m \quad \text{und} \quad A \cap U = A_1 \cup \cdots \cup A_l.$$

Jede Komponente B_i ist in einer Komponente $A_{j(i)}$ enthalten, und in jeder offenen Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0)$ haben wir $(A_{j(i)} \setminus B_i) \cap W \neq \varnothing$, denn sonst gäbe es Punkte $\mathbf{z} \in W \cap B_i$, wo B dicht in A ist. Also ist auch B_i nirgends dicht in $A_{j(i)}$. Aus der Theorie der eingebettet-analytischen Mengen ergibt sich nun, dass $\dim(B_i) < \dim(A_{j(i)})$ ist, für alle i. Daraus folgt, dass $\dim_{\mathbf{z}_0}(B) < \dim_{\mathbf{z}_0}(A)$ ist. ∎

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subset G$ eine analytische Menge und $\mathbf{z}_0 \in A$ ein Punkt. Ist $\dim_{\mathbf{z}_0}(A) = k$, so nennt man die Zahl $n - k$ die *Codimension* von A in $\mathbf{z}_0$ (im $\mathbb{C}^n$).

4.13 Zweiter Riemannscher Hebbarkeitssatz. *Es sei $n \geq 2$, und die analytische Menge $A \subset G$ habe überall mindestens Codimension 2. Dann besitzt jede holomorphe Funktion f auf $G \setminus A$ eine holomorphe Fortsetzung nach G.*

Beweis: Wir können annehmen, dass A irreduzibel von Codimension $d \geq 2$ ist. Wenn $\mathbf{z}_0$ ein regulärer Punkt von A ist, dann gibt es eine Umgebung U von $\mathbf{z}_0$, so dass $U \cap A$ biholomorph äquivalent zu einer offenen Teilmenge eines linearen Unterraumes E der Codimension d ist. Nach dem Satz über hebbare Singularitäten aus Kapitel 1 kann f holomorph nach $\mathbf{z}_0$ fortgesetzt werden.

Wir wiederholen diese Prozedur. Wir beginnen mit der Menge $\text{Sing}(A)$, die Codimension $d+1$ hat, und nach endlich vielen Schritten bleibt nur eine Menge isolierter Punkte übrig. Da f auch in diese Punkte fortgesetzt werden kann, erhalten wir das gewünschte Resultat. ∎

4.14 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subset G$ analytisch und $\mathbf{z}_0 \in A$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist* $\dim_{\mathbf{z}_0}(A) \leq m$.
2. *Es gibt eine affine Ebene $E \subset \mathbb{C}^n$ der Dimension $\geq n - m$ durch $\mathbf{z}_0$, so dass $\mathbf{z}_0$ isoliert in $A \cap E$ liegt.*

Beweis: O.B.d.A. sei $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Wir führen Induktion nach $d := \dim_{\mathbf{z}_0}(A)$. Ist $d = 0$, so können wir annehmen, dass $A = \{\mathbf{0}\}$ ist.

Nun sei $d > 0$ und die Behauptung schon für alle kleineren Dimensionen bewiesen. Es seien $A_1, \ldots, A_N$ die irreduziblen Komponenten von A in einer Umgebung der Null. Für jedes $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ gibt es eine offene dichte Teilmenge $C_\nu \subset \mathbb{C}^n$, so dass $f_{\mathbf{c}}(\mathbf{z}) = c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n$ auf A_ν nicht identisch verschwindet, für alle $\mathbf{c} \in C_\nu$. Nun sei $\mathbf{c}$ im Durchschnitt aller C_ν gewählt. Dann hat die Menge $A' := A \cap N(f_{\mathbf{c}})$

im Nullpunkt eine Dimension $\leq m-1$, und nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Ebene $E' \subset \mathbb{C}^n$ durch $\mathbf{0}$ mit $\dim(E') \geq n-m+1$, so dass der Nullpunkt isoliert in $A' \cap E'$ liegt.

Nun ist aber $E := E' \cap N(f_{\mathbf{c}})$ eine affine Ebene durch $\mathbf{0}$ der Dimension $\geq n-m$, und $E \cap A = E' \cap A'$ enthält $\mathbf{0}$ als isolierten Punkt.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Jetzt sei das Kriterium erfüllt. Wir wählen eine passende Ebene E, gegeben als gemeinsame Nullstellenmenge von r linear unabhängigen komplexen Linearformen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Damit $\dim(E) \geq n-m$ ist, muss $r \leq m$ sein. Da $\mathbf{0}$ isoliert in $A \cap N(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ liegt, ist $\dim_{\mathbf{z}_0}(A) \leq r \leq m$. ∎

Zum Schluss dieses Paragraphen soll angedeutet werden, wie die lokale Theorie analytischer Mengen mit algebraischen Methoden erweitert werden kann.

Definition. Zwei in Umgebungen von $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ gegebene analytische Mengen A, B heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ gibt, so dass $A \cap U = B \cap U$ ist. Eine Äquivalenzklasse nennt man einen *(analytischen) Mengenkeim* in $\mathbf{z}_0$.

In natürlicher Weise kann man die Vereinigung und den Durchschnitt zweier Mengenkeime erklären. Sind A und B die Repräsentanten zweier Mengenkeime $A_{\mathbf{z}}$ und $B_{\mathbf{z}}$, so sagen wir, dass $A_{\mathbf{z}}$ in $B_{\mathbf{z}}$ enthalten ist (in Zeichen: $A_{\mathbf{z}} \subset B_{\mathbf{z}}$), falls es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z})$ gibt, so dass $A \cap U \subset B \cap U$ ist.

Definition. Jedem analytischen Mengenkeim $A_{\mathbf{z}}$ kann ein Ideal $I(A_{\mathbf{z}}) \subset \mathcal{O}_{\mathbf{z}}$ zugeordnet werden, durch

$$I(A_{\mathbf{z}}) := \{f_{\mathbf{z}} \in \mathcal{O}_{\mathbf{z}} \,:\, \exists\, U = U(\mathbf{z}), \text{ s.d. } f|_{A \cap U} = 0\}.$$

Umgekehrt kann auch jedem Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{z}}$ ein Mengenkeim $V_{\mathbf{z}}(\mathfrak{a})$ wie folgt zugeordnet werden: Ist $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathfrak{a}$ ein Erzeugendensystem, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z})$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, so dass $(f_\kappa)_{\mathbf{z}} = a_\kappa$ ist, für $\kappa = 1, \ldots, k$. Dann setzt man

$$V_{\mathbf{z}}(\mathfrak{a}) := N(f_1, \ldots, f_k)_{\mathbf{z}}.$$

Wir müssen zeigen, dass die Definitionen unabhängig von den getroffenen Auswahlen sind.

Im ersten Fall ist das klar, und man überlegt sich auch leicht, dass $I(A_{\mathbf{z}})$ ein Ideal ist.

Im zweiten Fall nehmen wir an, dass $\{b_1, \ldots, b_l\}$ ein weiteres Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ ist, mit den holomorphen Funktionen $g_1, \ldots, g_l$ als Repräsentanten. Dann gibt es Elemente $c_{\lambda\kappa} \in \mathcal{O}_{\mathbf{z}}$, so dass gilt:

$$b_\lambda = \sum_{\kappa=1}^{k} c_{\lambda\kappa} a_\kappa, \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l.$$

Auf einer Umgebung $V = V(\mathbf{z})$ konvergieren die $c_{\lambda\kappa}$ gegen holomorphe Funktionen $h_{\lambda\kappa}$, so dass auf V gilt:

$$g_\lambda = \sum_{\kappa=1}^{k} h_{\lambda\kappa} f_\kappa, \text{ für } \lambda = 1, \dots, l.$$

Dann ist $N(f_1, \dots, f_k) \subset N(g_1, \dots, g_l)$. Aus Symmetriegründen gilt (eventuell auf einer anderen Umgebung) auch die umgekehrte Inklusion, also die Gleichheit der Keime.

4.15 Satz. *Es gelten folgende Aussagen:*

1. $I(A_\mathbf{z}) \subset I(B_\mathbf{z}) \iff B_\mathbf{z} \subset A_\mathbf{z}$.
2. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \implies V_\mathbf{z}(\mathfrak{b}) \subset V_\mathbf{z}(\mathfrak{a})$.
3. *Sind A, B analytische Mengen durch $\mathbf{z}$, so ist*
$$I(A_\mathbf{z} \cup B_\mathbf{z}) = I(A_\mathbf{z}) \cap I(B_\mathbf{z}) \text{ und } I(A_\mathbf{z}) + I(B_\mathbf{z}) \subset I(A_\mathbf{z} \cap B_\mathbf{z}).$$
4. *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_\mathbf{z}$ Ideale, so ist*
$$V_z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V_z(\mathfrak{a}) \cup V_z(\mathfrak{b}) \text{ und } V_z(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V_z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$
5. *A ist genau dann irreduzibel in $\mathbf{z}$, wenn $I(A_\mathbf{z})$ ein Primideal ist.*
6. *Es ist $V_\mathbf{z}(I(A_\mathbf{z})) = A_\mathbf{z}$.*

Beweis:

1) Sei $I(A_\mathbf{z}) \subset I(B_\mathbf{z})$ und $A \cap U = N(f_1, \dots, f_k)$. Dann liegen $f_1, \dots, f_k$ in $I(A_\mathbf{z})$, also auch in $I(B_\mathbf{z})$. Daraus folgt, dass die f_i nahe $\mathbf{z}$ auf B verschwinden, daß also $B \subset A$ ist.

Sei umgekehrt $B_\mathbf{z} \subset A_\mathbf{z}$, also $B \cap U \subset A \cap U$. Wenn $f_\mathbf{z}$ in $I(A_\mathbf{z})$ liegt, also f auf $U \cap A$ verschwindet, dann verschwindet f erst recht auf $U \cap B$. Damit liegt $f_\mathbf{z}$ in $I(B_\mathbf{z})$.

2) Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, $\{f_1, \dots, f_k\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ und $\{g_1, \dots, g_m\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{b}$. Weil jedes f_i Linearkombination der g_j ist, folgt: $N(g_1, \dots, g_m) \subset N(f_1, \dots, f_k)$.

3) Eine Funktion f verschwindet genau dann auf $A \cup B$, wenn f auf A und auf B verschwindet.

Verschwindet f auf A und g auf B, so verschwindet $f + g$ auf $A \cap B$.

4) Wegen $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$ folgt mit (2): $V_z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V_z(\mathfrak{a}) \cup V_z(\mathfrak{b})$. Umgekehrt seien $\{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathfrak{a}$ und $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathfrak{b}$ Erzeugendensysteme. Dann liegen die Produkte $f_i g_j$ in $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, und es folgt: $N(f_1, \dots, f_k)_\mathbf{z} \cup N(g_1, \dots, g_m)_\mathbf{z} \subset V_z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

Offensichtlich ist $V_z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V_z(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ und $N(f_1, \ldots, f_k) \cap N(g_1, \ldots, g_m) \subset N(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m)$.

5) Sei A irreduzibel in $\mathbf{z}$. Sind $f, g \in \mathcal{O}_{V z}$ mit $f \cdot g \in I(A_{\mathbf{z}})$, so verschwindet $f \cdot g$ auf A. Dann muss schon f oder g auf A verschwinden. Ist A dagegen in $\mathbf{z}$ reduzibel, $A = A_1 \cup A_2$ eine echte Zerlegung, so gibt es in der Nähe von $\mathbf{z}$ eine holomorphe Funktion f, die auf A_1 identisch verschwindet, nicht aber auf $A_2 \setminus A_1$. Und genauso gibt es eine holomorphe Funktion g, die auf A_2 identisch verschwindet, nicht aber auf $A_1 \setminus A_2$.

6) Sei $A \cap U = N(f_1, \ldots, f_k)$ und $\{g_1, \ldots, g_m\}$ ein Erzeugendensystem von $I(A_{\mathbf{z}})$. Weil die f_i auf A verschwinden, können sie als Linearkombination der g_i geschrieben werden. Dann ist

$$V_{\mathbf{z}}(I(A_{\mathbf{z}})) = N(g_1, \ldots, g_m)_{\mathbf{z}} \subset A_{\mathbf{z}}.$$

Umgekehrt verschwinden auch die g_i auf A, also ist

$$A_{\mathbf{z}} \subset N(g_1, \ldots, g_m)_{\mathbf{z}} = V_{\mathbf{z}}(I(A_{\mathbf{z}})).$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

4.16 Folgerung. *Sei $A \subset G$ analytisch, $\mathbf{z}_0 \in A$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ auf U, so dass gilt:*

1. *$A \cap U = N(f_1, \ldots, f_k)$.*
2. *$I(A_{\mathbf{z}_0})$ wird von $(f_1)_{\mathbf{z}_0}, \ldots, (f_k)_{\mathbf{z}_0}$ erzeugt.*

BEWEIS: Man wähle ein (beliebiges) Erzeugendensystem $\{(f_1)_{\mathbf{z}_0}, \ldots, (f_k)_{\mathbf{z}_0}\}$ von $I(A_{\mathbf{z}_0})$. Dann ist

$$A_{\mathbf{z}_0} = V_{\mathbf{z}_0}(I(A_{\mathbf{z}_0})) = N(f_1, \ldots, f_k)_{\mathbf{z}_0}.$$

Aber das bedeutet, dass es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ gibt, so dass $A \cap U = N(f_1, \ldots, f_k) \cap U$ ist. ∎

Bemerkung. Man kann alles so einrichten, dass $I(A_{\mathbf{z}})$ von $(f_1)_{\mathbf{z}}, \ldots, (f_k)_{\mathbf{z}}$ erzeugt wird, für alle $\mathbf{z} \in U$. Das ist die Aussage des *Kohärenzsatzes von Cartan*, der allerdings sehr viel aufwändiger zu beweisen ist.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subset G$ analytisch und $\mathbf{z}_0 \in A$. Dann nennt man

$$T_{\mathbf{z}_0}(A) := \{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \,:\, \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) = 0 \text{ für alle } f_{\mathbf{z}_0} \in I(A_{\mathbf{z}_0})\}$$

den *Zariski-Tangentialraum* von A in $\mathbf{z}_0$.

Es ist klar, dass $T_{\mathbf{z}_0}(A)$ wohl-definiert ist.

4.17 Satz. *Sei $\{(f_1)_{\mathbf{z}_0}, \ldots, (f_k)_{\mathbf{z}_0}\}$ ein Erzeugendensytem von $I(A_{\mathbf{z}_0})$. Dann gilt:*

1. $T_{\mathbf{z}_0}(A) := \{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \,:\, \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu (f_\kappa)_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) = 0$ *für* $\kappa = 1, \ldots, k\,\}$.
2. $\dim_{\mathbb{C}}(T_{\mathbf{z}_0}(A)) = n - \operatorname{rg} J_{\mathbf{z}_0}(f_1, \ldots, f_k)$.

Beweis: Die erste Behauptung ist klar. Nun sei $\Lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ definiert durch

$$\Lambda(\mathbf{w}) := \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu (f_\kappa)_{z_\nu}(\mathbf{z}_0).$$

Das ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\operatorname{Ker}(\Lambda) = T_{\mathbf{z}_0}(A)$. Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Funktionalmatrix $J_{\mathbf{z}_0}(f_1, \ldots, f_k)$. Also ist $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im}(\Lambda) = \operatorname{rg} J_{\mathbf{z}_0}(f_1, \ldots, f_k)$. ∎

Definition. Die Zahl $\operatorname{eib}_{\mathbf{z}_0}(A) := \dim T_{\mathbf{z}_0}(A)$ heißt die *Einbettungsdimension* von A in $\mathbf{z}_0$.

4.18 Satz. $\operatorname{eib}_{\mathbf{z}_0}(A)$ *ist die kleinste ganze Zahl e mit $0 \le e \le n$, so dass es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und eine e-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset U$ mit $A \cap U \subset M$ gibt.*

Insbesondere ist $0 \le \dim_{\mathbf{z}_0}(A) \le \operatorname{eib}_{\mathbf{z}_0}(A) \le n$, *und die Funktion* $\mathbf{z} \mapsto \operatorname{eib}_{\mathbf{z}}(A)$ *ist halbstetig nach oben. In der Nähe eines regulären Punktes ist* $\operatorname{eib}_{\mathbf{z}}(A) = \dim_{\mathbf{z}}(A)$ *konstant.*

Beweis: Sei $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ offen, $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, so dass $A \cap U = N(f_1, \ldots, f_k)$ und $\{(f_1)_{\mathbf{z}_0}, \ldots, (f_k)_{\mathbf{z}_0}\}$ ein Erzeugendensystem von $I(A_{\mathbf{z}_0})$ ist. Dann ist $e := \operatorname{eib}_{\mathbf{z}_0}(A) = n - \operatorname{rg} J_{\mathbf{z}_0}(f_1, \ldots, f_k)$, also $\operatorname{rg} J_{\mathbf{z}_0}(f_1, \ldots, f_k) = n - e$. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann man unter den Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ welche finden (o.B.d.A. die ersten $n - e$), deren gemeinsame Nullstellenmenge M eine e-dimensionale Untermannigfaltigkeit einer Umgebung $V(\mathbf{z}_0) \subset U$ ist. Offensichtlich ist $A \cap V$ in M enthalten. Liegt andererseits A (lokal) in irgend einer Mannigfaltigkeit M, so ist $T_{\mathbf{z}_0}(A) \subset T_{\mathbf{z}_0}(M)$ und daher $\dim(M) = \dim(T_{\mathbf{z}_0}(M)) \ge e$. Der Rest folgt jetzt ganz einfach. ∎

§ 5 Meromorphe Funktionen und algebraische Mengen

Zunächst sollen hier kurz die Ergebnisse über komplexe Mannigfaltigkeiten (aus Funktionentheorie 2) zusammengefasst werden.

Sei X ein Hausdorff-Raum. Ein n-dimensionales *komplexes Koordinatensystem* (U, φ) für X besteht aus einer offenen Menge $U \subset X$ und einer topologischen Abbildung φ von U auf eine offene Menge $B \subset \mathbb{C}^n$. Ist $p \in X$, so nennt man die Einträge z_i in $\mathbf{z} = \varphi(p)$ die *komplexen Koordinaten* von p (bezüglich (U, φ)).

Zwei (n-dimensionale) komplexe Koordinatensysteme (U, φ) und (V, ψ) mit $U \cap V \neq \varnothing$ nennt man *(holomorph) verträglich*, falls $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ biholomorph ist.

Eine Überdeckung von X durch paarweise verträgliche n-dimensionale komplexe Koordinatensysteme nennt man einen n-dimensionalen *komplexen Atlas* für X. Zwei solche Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ heißen *äquivalent*, falls je zwei Koordinatensysteme $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_1$ und $(V, \psi) \in \mathcal{A}_2$ verträglich sind. Eine Äquivalenzklasse von (n-dimensionalen) komplexen Atlanten für X nennt man eine n-dimensionale *komplexe Struktur* auf X. Sie enthält einen maximalen Atlas, der die Vereinigung aller Atlanten in der Äquivalenzklasse ist.

Eine n-dimensionale *komplexe Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffraum X mit abzählbarer Basis, versehen mit einer n-dimensionalen komplexen Struktur.

Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist lokal-kompakt und parakompakt.

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Eine komplexe Funktion f auf einer offenen Teilmenge $B \subset X$ heißt *holomorph*, falls es zu jedem $p \in B$ ein Koordinatensystem (U, φ) in p gibt, so dass $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap B) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Definition der Holomorphie ist unabhängig vom Koordinatensystem. Wir bezeichnen die $\mathbb{C}$-Algebra der holomorphen Funktionen auf B mit $\mathcal{O}(B)$.

Einige bekannte Sätze übertragen sich auf Mannigfaltigkeiten:

5.1 Identitätssatz. *Sei X zusammenhängend. Sind f, g zwei holomorphe Funktionen auf X, die auf einer nicht leeren offenen Teilmenge $U \subset X$ übereinstimmen, so ist $f = g$.*

5.2 Maximumprinzip. *Sei X zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(X)$ und $x_0 \in X$ ein Punkt, in dem $|f|$ ein lokales Maximum annimmt. Dann ist f konstant.*

5.3 Folgerung. *Ist X kompakt und zusammenhängend, so ist jede holomorphe Funktion auf X konstant.*

5.4 Folgerung. *Es gibt keine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit positiver Dimension im $\mathbb{C}^n$.*

Eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten heißt *holomorph*, falls es zu jedem $p \in X$ ein Koordinatensystem (U, φ) für X in p und ein Koordinatensystem (V, ψ) für Y in $F(p)$ mit $F(U) \subset V$ gibt, so dass

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

eine holomorphe Abbildung ist.

5.5 Satz. *Die Abbildung $F : X \to Y$ ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ und jedes $f \in \mathcal{O}(V)$ gilt: $f \circ F \in \mathcal{O}(F^{-1}(U))$.*

Eine *biholomorphe Abbildung* $F : X \to Y$ ist eine topologische Abbildung, so dass F und F^{-1} holomorph sind. Wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen X und Y gibt, dann nennt man die Mannigfaltigkeiten *isomorph* oder *biholomorph äquivalent*, in Zeichen: $X \cong Y$.

Sind X, Y komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, so ist auch $X \times Y$ auf natürliche Weise eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sind komplexe Koordinatensysteme (U, φ) für X und (V, ψ) für Y gegeben, so wird durch $\Phi(x, y) := (\varphi(x), \psi(y))$ ein Koordinatensystem für $X \times Y$ gegeben. Die Projektionen $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ sind holomorphe Abbildungen.

Eine Teilmenge A in einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X heißt *analytisch*, wenn es zu jedem Punkt $p \in X$ eine (zusammenhängende) offene Umgebung $U = U(p)$ und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf U gibt, so dass gilt:

$$U \cap A = \{q \in U \,:\, f_i(q) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}.$$

Man nennt A eine *analytische Hyperfläche*, wenn man immer mit einer einzigen Funktion auskommt.

Aus der Definition folgt, dass A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist. Lokal ist eine analytische Menge in X das gleiche wie eine analytische Menge in einer offenen Menge $B \subset \mathbb{C}^n$. Daher können die meisten Eigenschaften analytischer Mengen im $\mathbb{C}^n$ auf solche in Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Ist X zusammenhängend und $A \subset X$ analytisch, so ist entweder $A = X$ oder A nirgends dicht und $X \setminus A$ zusammenhängend.

Sind holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ gegeben, sowie ein Punkt $p \in U$ und ein komplexes Koordinatensystem (V, ψ) für X in p, so definiert man

$$J_{\mathbf{f}}(p; \psi) := \left(\frac{\partial(f_i \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)) \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right).$$

Diese Matrix hängt vom Koordinatensystem ψ ab, aber die Zahl

$$\mathrm{rg}_p(f_1, \ldots, f_m) := \mathrm{rg}\, J_{(f_1,\ldots,f_m)}(p; \psi)$$

ist vom gewählten Koordinatensystem unabhängig.

Eine analytische Menge $A \subset X$ heißt *regulär (von Codimension d)* in einem Punkt $p \in A$, wenn es eine offene Umgebung $U = U(p) \subset X$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ auf U gibt, so dass gilt:

1. $A \cap U = \{q \in U \,:\, f_1(q) = \cdots = f_d(q) = 0\}$.
2. $\mathrm{rg}_p(f_1, \ldots, f_d) = d$.

Die Zahl $n - d$ nennt man die *Dimension* von A in p.

Ist A in jedem Punkt regulär, so ist A eine komplexe Untermannigfaltigkeit.

5.6 Satz. *Eine analytische Menge A ist genau dann regulär von der Codimension d in $p \in A$, wenn es ein komplexes Koordinatensystem (U, φ) für X in p gibt, so dass gilt: $\varphi(U) = B \subset \mathbb{C}^n$ und $\varphi(U \cap A) = \{\mathbf{w} \in B \,:\, w_{n-d+1} = \cdots = w_n = 0\}$.*

Typisches Beispiel einer komplexen Mannigfaltigkeit ist der Graph einer holomorphen Abbildung $F : X \to Y$ von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit in eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit:

$$G_F := \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y = F(x)\},$$

Wie im $\mathbb{C}^n$ folgt, dass die Menge $\mathrm{Sing}(A)$ der singulären Punkte einer analytischen Menge A eine nirgends dichte analytische Teilmenge ist. Eine analytische Menge A heißt *irreduzibel*, falls $A \setminus \mathrm{Sing}(A)$ zusammenhängend ist. Zu jeder analytischen Menge $A \subset X$ gibt es ein eindeutig bestimmtes lokal endliches System von irreduziblen analytischen Mengen $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, so dass A die Vereinigung aller dieser *irreduziblen Komponenten* A_λ ist.

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition. Ein *holomorphes Vektorbündel* vom Rang r über X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit V, zusammen mit einer holomorphen Abbildung $\pi : V \to X$, so dass gilt:

1. Es gibt eine offenene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\iota \,:\, \iota \in I\}$ von X und zu jedem $\iota \in I$ eine biholomorphe Abbildung

   $$\varphi_\iota : \pi^{-1}(U_\iota) \to U_\iota \times \mathbb{C}^r$$

   mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\iota = \pi$.

2. Zu jedem Indexpaar $(\iota, \kappa) \in I \times I$ gibt es eine holomorphe Abbildung

   $$g_{\iota\kappa} : U_\iota \cap U_\kappa \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}(x, \mathbf{z}) = (x, \mathbf{z} \cdot g_{\iota\kappa}(x)^{\,t}),$$

   für $x \in U_{\iota\kappa} := U_\iota \cap U_\kappa$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r$.

Die Abbildungen φ_ι nennt man *lokale Trivialisierungen* (oder *Vektorbündel-Karten*) und die Abbildungen $g_{\iota\kappa}$ ein *System von Übergangsfunktionen.*

Im Falle $r = 1$ spricht man von einem *komplexen Geradenbündel.*

Wenn $\pi : V \to X$ die Bündelprojektion ist, dann bezeichnen wir mit V_x die Faser $\pi^{-1}(x)$. Sie trägt in natürlicher Weise die Struktur eines r-dimensionalen komplexen Vektorraumes, und zwar unabhängig von der gewählten Trivialisierung. Jede Trivialisierung $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ induziert für jedes $x \in U$ einen Vektorraum-Isomorphismus $\varphi_x : V_x \to \mathbb{C}^r$.

Definition. Sei V ein holomorphes Vektorbündel über X. Ist $U \subset X$ offen, dann ist ein *holomorpher Schnitt* in V über U eine holomorphe Abbildung $s : U \to V$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$.

Mit $\Gamma(U, V)$ bezeichnen wir die Menge der holomorphen Schnitte in V über U.

Auch $\Gamma(U, V)$ trägt stets eine Vektorraumstruktur. Das Bündel V heißt *global erzeugt*, falls die kanonische Abbildung $\Gamma(X, V) \to V_x$ mit $s \mapsto s(x)$ für jedes $x \in X$ surjektiv ist.

Sei $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ein System von Vektorbündel-Karten $\varphi_\iota : \pi^{-1}(U_\iota) \to U_\iota \times \mathbb{C}^r$ für V, und $g_{\iota\kappa} : U_{\iota\kappa} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ das System von Übergangsfunktionen, gegeben durch

$$\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}(x, \mathbf{z}) = \big(x, \mathbf{z} \cdot g_{\iota\kappa}(x)^{\,t}\big) \quad \text{für} \quad (x, \mathbf{z}) \in U_{\iota\kappa} \times \mathbb{C}^r.$$

Ist s ein holomorpher Schnitt in V, so definiert

$$\varphi_\iota \circ s|_{U_\iota}(x) = (x, s_\iota(x))$$

ein System von holomorphen Abbildungen $s_\iota : U_\iota \to \mathbb{C}^r$, und wir erhalten die Verträglichkeitsbedingung

$$s_\iota(x) = s_\kappa(x) \cdot g_{\iota\kappa}(x)^{\,t} \quad \text{auf } U_{\iota\kappa}.$$

Umgekehrt definiert jedes solche System (s_ι) einen globalen Schnitt s.

Man kann sogar Vektorbündel mit Hilfe eines Systems von Übergangsfunktionen definieren. Voraussetzung dafür ist die „Cozykel-Bedingung“

$$g_{\iota\kappa} \cdot g_{\kappa\lambda} = g_{\iota\lambda} \text{ auf } U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda.$$

Auf Einzelheiten dazu müssen wir hier verzichten.

Beispiel.

Ist X eine beliebige n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ein komplexer Atlas für X, so definiert

$$g_{\iota\kappa}(x) := J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}(\varphi_\kappa(x)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

ein System von Übergangsfunktionen bezüglich $\mathcal{U} = \{U_\iota,\ \iota \in I\}$. Das zugehörige Vektorbündel $T(X)$ nennt man das *Tangentialbündel* von X. Es entsteht, indem man $(x, \mathbf{c}) \in U_\kappa \times \mathbb{C}^n$ mit $(x, \mathbf{c} \cdot g_{\iota\kappa}(x)^t) \in U_\iota \times \mathbb{C}^n$ verklebt, für $x \in U_{\iota\kappa}$. Deshalb können wir die Faser $(T(X))_x$ mit dem Tangentialraum $T_x(X)$ identifizieren.

Ein holomorpher Schnitt in $T(X)$ wird auch als *holomorphes Vektorfeld* bezeichnet.

Definition. V, W seien zwei holomorphe Vektorbündel über X. Ein *Vektorbündel-Homomorphismus* zwischen V und W ist eine fasertreue holomorpe Abbildung $\eta : V \to W$, so dass für alle $x \in X$ eine lineare Abbildung $\eta_x : V_x \to W_x$ induziert wird.

Man nennt die Abbildung η einen *Vektorbündel-Isomorphismus*, falls η bijektiv ist und η, η^{-1} beide Vektorbündel-Homomorphismen sind.

Ein holomorphes Vektorbündel V vom Rang r über X heißt *trivial*, wenn es isomorph zum Bündel $X \times \mathbb{C}^r$ ist. Das ist äquivalent zur Existenz eines globalen „Rahmens“, also eines Systems $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ von globalen holomorphen Schnitten $\xi_i \in \Gamma(X, V)$, so dass für jedes $x \in X$ die Elemente $\xi_1(x), \ldots, \xi_r(x) \in V_x$ linear unabhängig sind. Jedes triviale Bündel ist global erzeugt. Es gibt aber auch nicht-triviale Bündel, die global erzeugt sind.

Bemerkung. Eine holomorphe Abbildung $\eta : V \to W$ ist genau dann ein Vektorbündel-Homomorphismus, wenn für jedes Paar von Vektorbündel-Karten $\Phi : V|_U \to U \times \mathbb{C}^r$ und $\Psi : W|_U \to U \times \mathbb{C}^s$ eine holomorphe Abbildung $h : U \to M_{s,r}(\mathbb{C})$ existiert, mit

$$\Psi^{-1} \circ \eta \circ \Phi(x, \mathbf{z}) = (x, \mathbf{z} \cdot h(x)^t).$$

Ein Vektorbündel über X ist so etwas wie eine parametrisierte Familie von Vektorräumen. Deshalb übertragen sich viele Konstruktionen von der linearen Algebra zur Theorie von Vektorbündeln.

1. Die direkte Summe: Sind V, W zwei Vektorbündel über X, so ist die *direkte Summe* oder *Whitney-Summe* $V \oplus W$ definiert durch $(V \oplus W)_x = V_x \times W_x$.

Sind $g_{\iota\kappa}$ bzw. $h_{\iota\kappa}$ die Übergangsfunktionen für V bzw. W, so bilden die Matrizen

$$G_{\iota\kappa} := \begin{pmatrix} g_{\iota\kappa} & 0 \\ 0 & h_{\iota\kappa} \end{pmatrix}$$

die Übergangsfunktionen für $V \oplus W$.

2. Das duale Bündel: Sei $\pi : V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r mit Trivialisierungen $\Phi_\iota : \pi^{-1}(U_\iota) \to U_\iota \times \mathbb{C}^r$ und Übergangsfunktionen $g_{\iota\kappa}$. Klebt man die $U_\iota \times \mathbb{C}^r$ mit Hilfe der Übergangsfunktionen $g'_{\iota\kappa} := g^t_{\kappa\iota}$ zusammen, so erhält man das *duale Bündel* $\pi' : V' \to X$. Für jedes $x \in X$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$(V')_x \to (V_x)' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_x, \mathbb{C}).$$

3. Tensorpotenzen eines Geradenbündels: Sei $\pi : F \to X$ ein Geradenbündel mit Übergangsfunktionen $g_{\iota\kappa} : U_{\iota\kappa} \to \mathbb{C}^*$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist die *Tensorpotenz* F^k das Geradenbündel, das durch die Übergangsfunktionen $g^k_{\iota\kappa}$ definiert wird.

Wir interpretieren F^k mit Hilfe des dualen Bündels $\pi' : F' \to X$. Sei $U \subset X$ offen und $f : (\pi')^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ holomorph. Sind $\psi_\iota : (F')|_{U_\iota} \to U_\iota \times \mathbb{C}$ Trivialisierungen (mit $\psi_\iota \circ \psi_\kappa^{-1}(x, z) = (x, z \cdot g_{\iota\kappa}(x)^{-1})$), dann haben wir eine Potenzreihenentwicklung

$$f \circ \psi_\iota^{-1}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\iota}(x) z^k$$

mit holomorphen Funktionen $a_{k,\iota}$ auf $U \cap U_\iota$.

Über $U_\iota \cap U_\kappa \cap U$ gilt:

$$f \circ \psi_\kappa^{-1}(x, z) = f \circ \psi_\iota^{-1}\big(x, z \cdot g_{\iota\kappa}(x)^{-1}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(a_{k,\iota}(x) g_{\iota\kappa}(x)^{-k}\big) z^k,$$

und daher $a_{k,\iota} = a_{k,\kappa} \cdot g^k_{\iota\kappa}$. Das bedeutet, dass $a_k = (a_{k,\iota})$ ein Schnitt in F^k über U ist. Also kann man jede holomorphe Funktion f auf F', die homogen vom Grad k auf den Fasern ist, als Schnitt in F^k auffassen. Insbesondere kann F^k_x mit dem Raum $L_k(F'_x, \mathbb{C})$ der k-fach linearen Funktionen $f : F'_x \times \cdots \times F'_x \to \mathbb{C}$ identifizieren.

Übrigens setzt man $F^{-k} := (F')^k \cong (F^k)'$.

Sei nun X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und A eine *irreduzible* analytische Hyperfläche in X, also lokal immer die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion. Weiter sei h eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ mit $h|_{(A\cap U)} = 0$. Zu jedem Punkt $x_0 \in U \cap A$ gibt es eine Umgebung $V = V(x_0) \subset U$ und eine minimale definierende Funktion f für A auf V. Dann definiert man

$$\mathrm{ord}_{A,x_0}(h) := \max\{m \in \mathbb{N} : \ \exists\, q \text{ mit } h = f^m \cdot q \text{ nahe } x_0\}.$$

Aus dem Nullstellensatz für Hyperflächen folgt, dass $\mathrm{ord}_{A,x_0}(h) \geq 1$ ist, und aus dem Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt, dass diese Zahl endlich ist. Außerdem ist sie unabhängig von f, denn wenn f_1, f_2 zwei minimale definierende Funktionen sind, dann haben wir Gleichungen $f_1 = q_1 f_2$ und $f_2 = q_2 f_1$. Es folgt, dass $f_1 = q_1 q_2 f_1$ ist und dass daher $f_1(1 - q_1 q_2) = 0$ ist. Also müssen q_1 und q_2 Einheiten sein.

Offensichtlich gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in A$ eine Umgebung $U = U(x_0)$, so dass $\mathrm{ord}_{A,x}(h) \geq \mathrm{ord}_{A,x_0}(h)$ für $x \in U \cap A$ ist.

5.7 Satz. *Ist A irreduzibel, h holomorph auf einer Umgebung von A und $h|_A = 0$, so ist die Zahl $\mathrm{ord}_{A,x}(h)$ unabhängig von $x \in A$.*

Beweis: Sei $x_0 \in A$ beliebig. In einer Umgebung U von x_0 gibt es eine Zerlegung $A \cap U = A_1 \cup \cdots \cup A_l$ in irreduzible Komponenten und minimale definierende Funktionen f_λ für A_λ. Da h auf jedem A_λ verschwindet, gibt es Zahlen $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion q auf einer Umgebung $V = V(x_0) \subset U$, so dass gilt:

$$h = f_1^{k_1} \cdots f_l^{k_l} \cdot q, \text{ und } (f_\lambda)_{x_0} \not| \, q_{x_0} \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l.$$

Da $(f_1)_{x_0}, \ldots, (f_l)_{x_0}$ irreduzibel sind, sind $(f_\lambda)_{x_0}$ und q_{x_0} teilerfremd für $\lambda = 1, \ldots, l$. Aber dann bleiben $(f_\lambda)_x$ und q_x teilerfremd für x genügend nahe bei x_0, etwa in einer Umgebung $W(x_0) \subset V$.

Sei $n(x) := \mathrm{ord}_{A,x}(h)$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

(a) Ist A in x_0 irreduzibel, so ist $l = 1$, und es ist klar, dass $n(x) = n(x_0)$ für $x \in W \cap A$ ist.

Folglich ist $x \mapsto n(x)$ eine lokal konstante ganzzahlige Funktion auf $\mathrm{Reg}(A)$. Da A global irreduzibel ist, ist $\mathrm{Reg}(A)$ zusammenhängend und $n(x)$ global konstant auf $\mathrm{Reg}(A)$. Sei $n^* \in \mathbb{N}$ der Wert dieser Funktion.

(b) Ist $l > 1$, so ist $f := f_1 \cdots f_l$ eine minimale definierende Funktion für A in x_0. Mit $m := \min(k_1, \ldots, k_l)$ haben wir

$$h = f_1^{k_1} \cdots f_l^{k_l} \cdot q = f^m \cdot \varrho,$$

wobei ϱ eine holomorphe Funktion nahe x_0 ist. Daher ist $n(x_0) \geq m$.

Wir nehmen an, daß $m = k_\lambda$ ist. In jeder kleinen Umgebung von x_0 gibt es reguläre Punkte $x \in A_\lambda$, die für $\mu \neq \lambda$ nicht zu A_μ gehören. Dann ist $n(x) = n^*$, und f_λ ist eine minimale definierende Funktion für A in x. Da $h = f_\lambda^{k_\lambda} \cdot \widetilde{q}$ mit einer holomorphen Funktion $\widetilde{q}$ gilt, aber $(f_\lambda)_x \not| \, \widetilde{q}_x$, folgt $n(x) = k_\lambda$.

Also ist $m \leq n(x_0) \leq n(x) = n^* = k_\lambda = m$ und daher $n(x_0) = n^*$. ∎

Jetzt definieren wir

$$\mathrm{ord}_A(h) := \begin{cases} \text{der konstante Wert von } \mathrm{ord}_{A,x}(h) & \text{falls } h|_A = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

$$\mathrm{ord}_A(h_1 h_2) = \mathrm{ord}_A(h_1) + \mathrm{ord}_A(h_2).$$

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Wir betrachten holomorphe Funktionen, die außerhalb einer analytischen Hyperfläche definiert sind. Im 1-dimensionalen Fall sind das holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten.

Definition. Sei $A \subset X$ eine analytische Hyperfläche. Eine komplex-wertige Funktion m auf $X \setminus A$ heißt *meromorphe Funktion* auf X, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ holomorphe Funktionen g, h auf einer offenen Umgebung $U = U(x) \subset X$ gibt, so dass $N(h) \subset A \cap U$ und $m = g/h$ auf $U \setminus A$ ist.

Offensichtlich ist m auf $X \setminus A$ holomorph. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion f auf X auch meromorph auf X.

Verschiedene meromorphe Funktionen können außerhalb verschiedener analytischer Hyperflächen gegeben sein. Wenn $m_\lambda : X \setminus A_\lambda \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen auf X sind, dann sind $m_1 \pm m_2$ und $m_1 \cdot m_2$ meromorphe Funktionen auf X, gegeben als holomorphe Funktionen auf $X \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Ist $m : X \setminus A \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, so gibt es für $p \in A$ zwei Möglichkeiten:

(a) Es gibt eine Umgebung $U = U(p) \subset X$, so dass m auf $U \setminus A$ beschränkt ist. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{m}$ auf U mit $\widehat{m}|_{U \setminus A} = m|_{U \setminus A}$, und p wird eine *hebbare Singularität* von m genannt.

(b) Zu jeder Umgebung $V = V(p) \subset X$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Punkt $x \in V \setminus A$ mit $|m(x)| > n$. Ist $m = g/h$ nahe p, so muss h in p verschwinden, denn sonst wären wir in Situation (a). Nun gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

   (i) Ist $g(p) \neq 0$, so ist $\lim_{x \to p} |m(x)| = +\infty$, und wir haben einen *Pol* in p.

   (ii) Die andere Möglichkeit ist $g(p) = 0$. Das kann im Falle $n = 1$ nicht passieren, wenn man die Keime g_p und h_p als teilerfremd annimmt, aber für $n > 1$ ist es möglich. Das Verhalten von m ist in diesem Falle extrem irregulär: Sei $c \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt. Dann sind $g_p - c \cdot h_p$ und h_p teilerfremd, und es gibt eine Folge (x_ν) von Punkten in $N(g - ch) \setminus N(h)$ mit $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = p$. Das bedeutet, dass $m(x_\nu) = c$ für jedes ν ist. In diesem Falle nennen wir p eine *Unbestimmtheitsstelle*.

Im Falle $n = 1$ ist eine meromorphe Funktion holomorph bis auf eine diskrete Menge von Polen. Für $n > 1$ haben wir die *Polstellenmenge*

$$P(m) := \{p \in X \,:\, m \text{ ist auf jeder Umgebung von } p \text{ unbeschränkt }\}.$$

Die Polstellenmenge besteht aus Polen und Unbestimmtheitsstellen. Wir zeigen, dass $P(m)$ eine analytische Hyperfläche ist.

Sei $p \in X$ ein beliebiger Punkt und $U = U(p) \subset X$ eine zusammenhängende Umgebung, wo m der Quotient von g und h und $N(h) \subset A$ ist. Wir können annehmen, dass $p \in A$ liegt und g_p, h_p teilerfremd sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m \text{ beschränkt nahe } p &\iff \exists\,\varphi \text{ (holomorph nahe } p\text{) mit } g = \varphi \cdot h \\ &\iff h_p \,\Big|\, g_p \\ &\iff h_p \text{ ist eine Einheit} \\ &\iff h(p) \neq 0. \end{aligned}$$

Also ist $P(m) \cap U = \{x \in U \,:\, h(x) = 0\}$.

Ist $Z \subset X$ eine irreduzible Hyperfläche, so definieren wir $\mathrm{ord}_Z(m)$ wie folgt: Ist $m = g/h$ nahe x, so setzen wir $\mathrm{ord}_{Z,x}(m) := \mathrm{ord}_{Z,x}(g) - \mathrm{ord}_{Z,x}(h)$. Wenn wir g_x, h_x teilerfremd wählen, so ist diese Definition unabhängig von g und h. Genau wie oben folgt dann, dass $\mathrm{ord}_{Z,x}(m)$ konstant auf Z ist.

5.8 Identitätssatz für meromorphe Funktionen. *Sei X zusammenhängend, $m : X \setminus A \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion und $U \subset X$ eine nicht leere offene Menge, so dass $m|_{U\setminus A} = 0$ ist. Dann ist $P(m) = \varnothing$ und $m = 0$.*

BEWEIS: Die Menge $X \setminus P(m)$ ist zusammenhängend, m ist dort holomorph und $U \setminus (A \cup P(m))$ ist eine nicht leere offene Teilmenge von $X \setminus P(m)$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist $m = 0$ auf $X \setminus P(m)$. Aber dann ist m global beschränkt und $P(m) = \varnothing$. ∎

Die Menge $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X hat die Struktur eines Ringes mit der Funktion $m = 0$ als Nullelement. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(X)^* &:= \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \\ &= \{m \in \mathcal{M}(X) \,:\, m \text{ verschwindet nirgends identisch}\}. \end{aligned}$$

Hat $m \in \mathcal{M}(X)^*$ eine lokale Darstellung $m = g/h$, so ist die Nullstellenmenge $N(g)$ unabhängig von dieser Darstellung. Daher können wir die globale Nullstellenmenge $N(m)$ definieren, die eine analytische Hyperfläche in X ist. Außerhalb von $P(m) \cup N(m)$ ist m holomorph und ohne Nullstellen. Deshalb ist dort auch $1/m$ holomorph und hat die lokale Darstellung $1/m = h/g$. Also ist $1/m$ auch meromorph und $\mathcal{M}(X)$ deshalb ein Körper. Dafür ist wesentlich, daß X zusammenhängend ist!

5.9 Fortsetzungssatz von Levi. *Sei $A \subset X$ eine analytische Menge, die mindestens Codimension 2 hat, sowie m eine meromorphe Funktion auf $X \setminus A$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $\widehat{m}$ auf X mit $\widehat{m}|_{X\setminus A} = m$.*

BEWEIS: Da die Behauptung für holomorphe Funktionen stimmt, nehmen wir an, dass $P(m) \neq \varnothing$ ist, also eine analytische Hyperfläche in $X \setminus A$. Nach dem Fortsetzungssatz von Remmert–Stein ist $Q := \overline{P(m)}$ eine analytische Menge in X. Nach dem zweiten Riemannschen Hebbbarkeitssatz besitzt die holomorphe Funktion m auf $(X \setminus Q) \setminus A$ eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{m}$ auf $X \setminus Q$.

Sei $p \in A \cap Q$. Wir müssen zeigen, daß $\widehat{m}$ lokal meromorph in p ist. Dazu wählen wir eine offene Umgebung $U = U(p) \subset X$ und eine Funktion $g \in \mathcal{O}(U)$, so dass gilt:

1. $Q \cap U \subset N(g)$. (Das ist möglich, weil Q analytisch ist).
2. $N(g) = N_1 \cup \cdots \cup N_k$ ist eine Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Da $\dim(A) < \dim(N_i)$ ist, gibt es Punkte $a_i \in N_i \setminus A$ und Umgebungen $V_i = V_i(a_i) \subset U \setminus A$, so dass $\widehat{m} = p_i/q_i$ auf $V_i \setminus Q$ und $N(q_i) \subset Q \cap V_i \subset N(g)$ ist, also $g|_{N(q_i)} = 0$.

Aus dem Nullstellensatz folgt, dass es eine Zahl $s_i \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion r_i gibt, so dass $g^{s_i} = r_i \cdot q_i$ ist. Dann ist $\widehat{m} = p_i r_i g^{-s_i}$ nahe a_i. Das bedeutet, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $g^s \cdot \widehat{m}$ holomorph nahe $a_1, \ldots, a_k$ ist.

Also ist $N := (U \setminus A) \cap P(g^s \widehat{m})$ leer oder eine analytische Hyperfläche, die in $N(g) \setminus A$ enthalten ist (weil $P(g^s \widehat{m}) \subset N(q_i) \subset N(g)$ gilt). Im letzteren Falle besteht N aus irreduziblen Komponenten von $N(g) \setminus A$, und das ist unmöglich, da jede solche Komponente einen Punkt a_i enthält und $g^s \widehat{m}$ holomorph in a_i ist. Also muß N leer sein, und $g^s \widehat{m}$ ist auf $U \setminus A$ holomorph. Nach dem zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz gibt es eine holomorphe Fortsetzung h von $g^s \widehat{m}$ auf U. Dann ist $g^{-s} h$ meromorph auf U mit $(g^{-s}h)|_{U \setminus A} = \widehat{m}$. ∎

Sei X eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit, $m \in \mathcal{M}(X)^*$ und $Z \subset X$ eine irreduzible analytische Hyperfläche. Ist $Z \subset P(m)$, so ist $\operatorname{ord}_Z(m)$ eine negative ganze Zahl, und wenn $Z \subset N(m)$ ist, dann ist $\operatorname{ord}_Z(m) \in \mathbb{N}$. In allen anderen Fällen haben wir $\operatorname{ord}_Z(m) = 0$.

Sind $P(m) = \bigcup_{\iota \in I} P_\iota$ und $N(m) = \bigcup_{\lambda \in L} N_\lambda$ die Zerlegungen der Polstellenmenge und der Nullstellenmenge in irreduzible Komponenten, so bezeichnet man die formalen Summen

$$(m)_\infty := \sum_{\iota \in I} (-\operatorname{ord}_{P_\iota}(m)) \cdot P_\iota \quad \text{und} \quad (m)_0 := \sum_{\lambda \in L} \operatorname{ord}_{N_\lambda}(m) \cdot N_\lambda$$

als *Polstellendivisor* und *Nullstellendivisor* von m. Schließlich nennt man $\mathbf{div}(m) := (m)_0 - (m)_\infty$ den *Divisor* von m. Nach den obigen Bemerkungen ist klar, daß

$$\mathbf{div}(m) = \sum_{Z \subset X} \operatorname{ord}_Z(m) \cdot Z$$

ist, wobei die Summe über alle irreduziblen Hyperflächen Z in X gebildet wird.

Definition. Sei $(Z_\iota)_{\iota \in I}$ ein lokal endliches System von irreduziblen analytischen Hyperflächen $Z_\iota \in X$. Ist zu jedem $\iota \in I$ eine Zahl $n_\iota \in \mathbb{Z}$ gegeben, so nennt man die formale Linearkombination

$$D = \sum_{\iota \in I} n_\iota \cdot Z_\iota$$

einen *Divisor* auf X.

Divisoren können addiert oder mit ganzzahligen Konstanten multipliziert werden. Deshalb besitzt die Menge $\mathcal{D}(X)$ aller Divisoren auf X die Struktur einer abelschen

Gruppe. Wir haben gesehen, dass es eine Abbildung $\mathbf{div} : \mathcal{M}(X)^* \to \mathcal{D}(X)$ gibt. Weil $\mathbf{div}(m_1 m_2) = \mathbf{div}(m_1) + \mathbf{div}(m_2)$ ist, ist $\mathbf{div}$ ein Gruppenhomomorphismus.

Man kann Divisoren auch problemlos auf offene Teilmengen beschränken, und man kann (mit Hilfe von minimalen definierenden Funktionen) zeigen, dass jeder Divisor lokal als Divisor einer meromorphen Funktion geschrieben werden kann.

Ist X eine zusammenhängende n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $Z \subset X$ eine analytische Hyperfläche, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ von X mit folgender Eigenschaft:

Ist $U_\iota \cap Z \neq \varnothing$, so gibt es eine minimale definierende Funktion $f_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota)$ für Z. Wenn wir $f_\iota := 1$ setzen, falls $U_\iota \cap Z = \varnothing$ ist, so erhalten wir in $U_{\iota\kappa}$ immer die zwei Relationen

$$f_\iota = g_{\iota\kappa} \cdot f_\kappa \quad \text{und} \quad f_\kappa = g_{\kappa\iota} \cdot f_\iota$$

mit geeigneten holomorphen Funktionen $g_{\iota\kappa}$ und $g_{\kappa\iota}$. Dann gilt:

$$f_\iota \cdot (1 - g_{\iota\kappa} g_{\kappa\iota}) = 0 \text{ auf } U_{\iota\kappa}.$$

Da f_ι nicht identisch verschwindet, ist $g_{\iota\kappa} g_{\kappa\iota} = 1$ auf $U_{\iota\kappa}$, also $g_{\iota\kappa} \in \mathcal{O}^*(U_{\iota\kappa})$ und $g_{\kappa\iota} = g_{\iota\kappa}^{-1}$. Außerdem haben wir auf $U_{\iota\kappa\lambda}$ haben wir die Verträglichkeitsbedingung

$$g_{\iota\kappa} g_{\kappa\lambda} = g_{\iota\lambda}.$$

Das System der nirgends verschwindenden Funktionen $g_{\iota\kappa} = f_\iota / f_\kappa$ definiert ein holomorphes Geradenbündel auf X, das wir mit $[Z]$ bezeichnen. Man kann leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Überdeckung und den Funktionen f_ι abhängt.

5.10 Satz.

1. *Es gibt einen Schnitt $s_Z \in \Gamma(X, [Z])$ mit $Z = \{x \in X \,:\, s_Z(x) = 0\}$.*
2. *$[Z]$ ist über $X \setminus Z$ trivial.*

Beweis: Das System der holomorphen Funktionen f_ι definiert einen globalen Schnitt s_Z mit $\{x \in U_\iota \,:\, s_Z(x) = 0\} = \{x \in U_\iota \,:\, f_\iota(x) = 0\} = U_\iota \cap Z$. Dann ist klar, dass $[Z]|_{X \setminus Z}$ trivial ist. ∎

Wir erinnern jetzt an den projektiven Raum. Für $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei $L_{\mathbf{z}} = \mathbb{C}\mathbf{z} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Dann ist $\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{C}^* = \{L_{\mathbf{z}} \,:\, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$ der n-dimensionale komplex-projektive Raum. Es sei $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ die kanonische Projektion, mit $\pi(\mathbf{z}) := L_{\mathbf{z}}$. Dann schreibt man

$$\pi(z_0, \ldots, z_n) = (z_0 : \ldots : z_n).$$

Lokale Koordinaten erhält man wie folgt: Sei $U_i := \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \,:\, z_i \neq 0\}$. Dann bilden die U_i eine offene Überdeckung des $\mathbb{P}^n$, und man definiert $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\varphi_i(z_0 : \ldots : z_n) := \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Die Hyperebene $H_0 = \{(z_0 : \ldots : z_n) : z_0 = 0\}$ ist eine reguläre analytische Hyperfläche, gegeben durch

$$H_0 \cap U_i = \Big\{(z_0 : \ldots : z_n) \in U_i \,:\, \frac{z_0}{z_i} = 0\Big\}.$$

U_0 ist dicht in $\mathbb{P}^n = U_0 \cup H_0$.

Auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist jede globale holomorphe Funktion konstant. Wir wissen aber schon von der Riemannschen Zahlenkugel, dass es trotzdem nicht konstante meromorphe Funktionen geben kann. Wir untersuchen die Situation beim n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^n$.

Ein nicht konstantes Polynom $p(\mathbf{t}) = \sum_{|\nu|=0}^k a_\nu \mathbf{t}^\nu$ stellt eine holomorphe Funktion auf $U_0 = \{(1 : t_1 : \ldots : t_n) \mid \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n\}$ dar. Tatsächlich wird so eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^n$ definiert, mit Polstellenmenge H_0. Man kann das folgendermaßen sehen:

Die Funktionen $t_\mu = z_\mu / z_0$, $\mu \geq 1$, sind holomorphe Koordinaten auf U_0, und entsprechend $w_\lambda := z_\lambda / z_i$, $\lambda \neq i$ auf U_i. Auf $U_i \setminus H_0 = U_i \cap U_0$ gilt deshalb:

$$\begin{aligned} w_0^k \cdot p(t_1, \ldots, t_n) &= \left(\frac{z_0}{z_i}\right)^k \cdot \sum_{|\nu|=0}^k a_\nu \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{z_n}{z_0}\right)^{\nu_n} \\ &= \sum_{|\nu|=0}^k a_\nu w_0^{k-|\nu|} w_1^{\nu_1} \cdots w_n^{\nu_n}; \end{aligned}$$

also $p = g/h$ auf $U_i \setminus H_0$, wobei $g(\mathbf{w}) := \sum_{|\nu|=0}^k a_\nu w_0^{k-|\nu|} w_1^{\nu_1} \cdots w_n^{\nu_n}$ und $h(\mathbf{w}) := w_0^k$ holomorphe Funktionen auf U_i sind, mit

$$N(h) = \{\mathbf{w} \in U_i \,:\, w_0 = 0\} = U_i \cap H_0.$$

Somit gibt es viele globale meromorphe Funktionen auf dem projektiven Raum.

Ein anderes Beispiel ist der n-dimensionale komplexe Torus $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$, mit einem Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_{2n}$, wo $\{\omega_1, \ldots, \omega_{2n}\}$ eine reelle Basis des $\mathbb{C}^n$ ist. Zwei Punkte $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ heißen *äquivalent* (bzgl. Γ), falls $\mathbf{z} - \mathbf{w} \in \Gamma$ ist. Der Torus $T^n := \mathbb{C}^n/\Gamma$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen, $\pi_T : \mathbb{C}^n \to T^n$ die kanonische Restklassen-Abbildung. T^n wird mit der „feinsten" Topologie versehen, für die π_T stetig wird. Eine Menge $U \subset T^n$ ist deshalb genau dann *offen*, wenn $\pi_T^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist.

Für $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$P_{\mathbf{z}_0} := \{\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu \,:\, |t_\nu| < \frac{1}{2} \text{ für alle } \nu\} \text{ und } U_{\mathbf{z}_0} := \pi_T(P_{\mathbf{z}_0}).$$

Dann ist $\varphi_{\mathbf{z}_0} := (\pi_T|_{P_{\mathbf{z}_0}})^{-1} : P_{\mathbf{z}_0} \to U_{\mathbf{z}_0}$ eine komplexe Karte, und je zwei solche Karten sind holomorph verträglich.

Das ergibt eine komplexe Struktur auf T^n, so dass $\pi_T : \mathbb{C}^n \to T$ holomorph wird. Außerdem ist π_T eine Überlagerungsabbildung im Sinne der Topologie. Ist m eine meromorphe Funktion auf T, so ist $m \circ \pi_T$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n$, die periodisch in Bezug auf die Erzeugenden $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ von Γ ist. Im Falle $n = 1$ gibt es solche meromorphen Funktionen immer, das sind die Γ-elliptischen Funktionen. Ist $n \geq 2$, so hängt die Existenz von Γ-periodischen Funktionen vom Gitter Γ ab. Es gibt sogar komplexe Tori, auf denen nur konstante meromorphe Funktionen existieren.

Als drittes Beispiel betrachten wir die sogenannten „Hopf-Mannigfaltigkeiten". Sei $\varrho > 1$ eine feste reelle Zahl und $n > 1$. Dann operiert die (multiplikative) Gruppe $\Gamma := \{\varrho^k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ auf $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ durch $\mathbf{z} \mapsto \varrho^k \cdot \mathbf{z}$.

Setzt man

$$U_r := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, r < \|\mathbf{z}\| < \varrho r\}, \text{ für } r > 0,$$

so sind die Mengen $\varrho^k U_r$ paarweise disjunkt. Man kann leicht zeigen:

$H = H_\Gamma := (\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\})/\Gamma$ ist eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und die kanonische Projektion $\pi_H : \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to H$ ist eine unverzweigte holomorphe Überlagerung. H nennt man eine *Hopf-Mannigfaltigkeit*. Die Abbildung

$$\mathbf{z} \mapsto \Big(\exp\Big(2\pi \mathrm{i}\, \frac{\ln\|\mathbf{z}\|}{\ln \varrho}\Big), \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \Big)$$

induziert einen Diffeomorphismus $H \to S^1 \times S^{2n-1}$, wobei S^{2n-1} die $(2n-1)$-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ (mit $2n - 1 \geq 3$) ist.

Sei nun m eine meromorphe Funktion auf H. Da $\pi_H : \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to H$ eine Überlagerung ist, ist $\widehat{m} := m \circ \pi_H$ auf $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ meromorph. Da $n > 1$ ist, folgt aus dem Fortsetzungssatz von Levi, dass $\widehat{m}$ zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}^n$ fortgesetzt werden kann. Auf jeder Geraden L durch den Nullpunkt im $\mathbb{C}^n$ muss $\widehat{m}$ isolierte Polstellen haben oder identisch ∞ sein. Aber da $\widehat{m}$ von H kommt, müssen die Polstellen auf L einen Häufungspunkt im Ursprung haben, was andererseits unmöglich ist, wenn $\widehat{m}$ auf L nicht konstant ist. Das gleiche Argument funktioniert bei allen anderen Werten von $\widehat{m}$. Aber eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, die auf jeder Geraden durch den Ursprung konstant ist, kommt von einer meromorphen Funktion auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}$. Das bedeutet: Ist $h : H \to \mathbb{P}^{n-1}$ die kanonische Abbildung, so wird durch $m \mapsto m \circ h$ eine Bijektion $\mathcal{M}(\mathbb{P}^{n-1}) \to \mathcal{M}(H)$ definiert. Auf der n-dimensionalen Hopf-Mannigfaltigkeit gibt es nicht „mehr" meromorphe Funktionen als auf dem $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raum.

Ist $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ die kanonische Projektion und $x \in \mathbb{P}^n$, so definieren wir

$$\ell(x) := \pi^{-1}(x) \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Das ist eine komplexe Gerade durch den Ursprung im $\mathbb{C}^{n+1}$, und wir haben $\ell(\pi(\mathbf{z})) = \mathbb{C}\mathbf{z}$ für $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Eine Menge $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ heißt *Kegelmenge*, falls sie die Vereinigung einer Familie von komplexen Geraden durch den Ursprung ist. Das bedeutet:

$$\mathbf{z} \in \widehat{X} \implies \lambda\mathbf{z} \in \widehat{X} \text{ für } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ist X eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{P}^n$, so ist

$$\widehat{X} := \bigcup_{x \in X} \ell(x) = \pi^{-1}(X) \cup \{\mathbf{0}\}$$

eine Kegelmenge.

5.11 Hilfssatz. *Sei $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ eine Kegelmenge, f eine holomorphe Funktion in der Nähe des Nullpunktes und $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ die Entwicklung in homogene Polynome. Wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f|_{B_\varepsilon(\mathbf{0}) \cap \widehat{X}} \equiv 0$ ist, so ist $p_\nu|_{\widehat{X}} = 0$ für jedes ν.*

BEWEIS: Sei $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ ein beliebiger Punkt von $B_\varepsilon(\mathbf{0}) \cap \widehat{X}$. Dann verschwindet

$$\lambda \mapsto f(\lambda\mathbf{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\mathbf{z})\lambda^\nu$$

für $|\lambda| < 1$ identisch. Also ist $p_\nu(\mathbf{z}) = 0$ für alle ν, und da $\widehat{X}$ eine Kegelmenge ist, folgt: $p_\nu|_{\widehat{X}} \equiv 0$ für alle ν. ∎

Seien nun $F_1, \ldots, F_k$ homogene Polynome in den Variablen $z_0, \ldots, z_n$. Dann ist die analytische Menge

$$\widehat{X} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, F_1(\mathbf{z}) = \cdots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$$

eine *Kegelmenge*. Setzen wir $\widehat{X}' := \widehat{X} \setminus \{\mathbf{0}\}$, so ist das Bild $X := \pi\big(\widehat{X}'\big) \subset \mathbb{P}^n$ die Menge

$$X = \{(z_0 : \ldots : z_n) \,:\, F_1(z_0, \ldots, z_n) = \cdots = F_k(z_0, \ldots, z_n) = 0\}.$$

In $U_i = \{(z_0 : \ldots : z_n) \,:\, z_i \neq 0\}$ können wir holomorphe Funktionen $f_{i,\nu}$ definieren, durch

$$f_{i,\nu}(z_0 : \ldots : z_n) := F_\nu\Big(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\Big).$$

Dann ist $X \cap U_i = \{x \in U_i \,:\, f_{i,1}(x) = \cdots = f_{i,k}(x) = 0\}$, und daher X eine analytische Menge.

Definition. Eine analytische Menge $X \subset \mathbb{P}^n$, die Nullstellenmenge von endlich vielen homogenen Polynomen ist, nennt man eine *(projektiv-)algebraische* Menge. Die Teilmengen $X \cap U_i$ nennt man *(affin-)algebraisch*.

5.12 Satz von Chow. *Jede analytische Menge X im projektiven Raum ist die Nullstellenmenge von endlich vielen homogenen Polynomen $F_1, \ldots, F_s$, so dass für jeden regulären Punkt $x \in X$ der Codimension d gilt:* $\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(F_1, \ldots, F_s) = d$ *in jedem* $\mathbf{z} \in \pi^{-1}(x)$.

BEWEIS: Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ eine nicht leere analytische Menge, so ist auch $\widehat{X}' = \pi^{-1}(X)$ analytisch in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Weil $\dim_{\mathbf{z}}(\widehat{X}') \geq 1$ für alle $\mathbf{z} \in \widehat{X}'$ ist, folgt aus dem Fortsetzungssatz von Remmert–Stein, dass der Abschluß $\widehat{X} = \widehat{X}' \cup \{\mathbf{0}\}$ analytisch in $\mathbb{C}^{n+1}$ ist.

Es gibt dann eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf U mit $N(f_1, \ldots, f_m) = U \cap \widehat{X}$, so dass $\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(f_1, \ldots, f_m) = d$ in jedem regulären Punkt $\mathbf{z}$ der Dimension $n+1-d$ in $U \cap \widehat{X}$ ist. Jetzt entwickeln wir die f_i in homogene Polynome $p_{i,\nu}$. Dann ist $p_{i,\nu}|_{\widehat{X}} \equiv 0$ für alle i, ν.

Sei $I_k \subset \mathcal{O}_{\mathbf{0}} \cong H_{n+1}$ das Ideal, das von allen $p_{i,\nu}$, $\nu \leq k$, $i = 1, \ldots, m$, erzeugt wird. Da

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset \mathcal{O}_{\mathbf{0}}$$

eine aufsteigende Kette von Idealen in einem noetherschen Ring ist, muß sie stationär werden. Es gibt also homogene Polynome $F_1, \ldots, F_s$, so daß jedes $p_{i,\nu}$ eine endliche Linearkombination der F_σ ist. Dabei ist zu beachten, dass die F_σ selbst unter den $p_{i,\nu}$ ausgesucht werden.

Jetzt ist auch jedes f_i eine Linearkombination der F_σ:

$$f_i = \sum_{\sigma=1}^{s} a_{i,\sigma} F_\sigma, \text{ mit } a_{i,\sigma} \in \mathcal{O}_{\mathbf{0}}.$$

Somit ist klar, dass $N(F_1, \ldots, F_s) \subset N(f_1, \ldots, f_m)$ in der Nähe des Ursprungs gilt. Und weil alle $p_{i,\nu}$ auf $\widehat{X}$ verschwinden, ist auch $N(f_1, \ldots, f_m) = U \cap \widehat{X} \subset N(F_1, \ldots, F_s)$ nahe $\mathbf{0}$. Weil $\widehat{X}$ eine Kegelmenge ist, gilt sogar $\widehat{X} = N(F_1, \ldots, F_s)$. Setzen wir

$$A(\mathbf{z}) = \left(a_{i,\sigma}(\mathbf{z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ \sigma = 1, \ldots, s \end{array} \right),$$

so haben wir

$$J_{(f_1,\ldots,f_m)}(\mathbf{z}) = A(\mathbf{z}) \cdot J_{(F_1,\ldots,F_s)}(\mathbf{z}) \text{ für } \mathbf{z} \in \widehat{X} \text{ nahe } \mathbf{0}.$$

Daher ist dort $d = \mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(f_1, \ldots, f_m) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(F_1, \ldots, F_s)$.

Für $i = 0, \ldots, n$ ist die Abbildung $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^*$ mit $h_i(\mathbf{z}) := (\pi(\mathbf{z}), z_i)$ biholomorph, mit $h_i^{-1}(\pi(\mathbf{w}), c) = \dfrac{c}{w_i}\mathbf{w}$. Daraus ergibt sich, dass $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ eine Submersion ist (vgl. Anhang). Ist nun X regulär von der Codimension d in x, so ist auch $\widehat{X}$ in jedem $\mathbf{z} \in \pi^{-1}(x)$ regulär von der Codimension d. Aber dann kann

$\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(F_1, \ldots, F_s)$ in diesen Punkten nicht größer als d sein. Ist F_σ homogen vom Grad k, so sind alle partiellen Ableitungen von F_σ homogen vom Grad $k-1$. Daraus folgt, dass der Rang von $(F_1, \ldots, F_s)$ konstant längs der Faser $\pi^{-1}(x)$ ist. Er ist also in jedem $\mathbf{z} \in \pi^{-1}(x)$ gleich d. ∎

Definition. Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt *projektiv-algebraisch*, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Einbettung $j : X \to \mathbb{P}^N$ gibt, falls es also eine Untermannigfaltigkeit $Z \subset \mathbb{P}^N$ und eine biholomorphe Abbildung $j : X \to Z$ gibt.

Beispiele.

1. Sei $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$ ein komplex-linearer Unterraum der Codimension q. Dann gibt es Linearformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ auf $\mathbb{C}^{n+1}$, so dass gilt:

   $$L = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, \varphi_1(\mathbf{z}) = \cdots = \varphi_q(\mathbf{z}) = 0\}.$$

   Da die Linearformen homogene Polynome vom Grad 1 sind, folgt:

   $$\mathbb{P}(L) := \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \,:\, \varphi_\mu(z_0, \ldots, z_n) = 0 \text{ für } \mu = 1, \ldots, q\}$$

   ist eine reguläre algebraische Menge. Wir bezeichnen $\mathbb{P}(L)$ als *(projektiven) linearen Unterraum*. Er ist isomorph zu $\mathbb{P}^{n-q}$.

2. Das einfachste Beispiel einer nicht linearen analytischen Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ ist eine Quadrik.

   Ist $\mathbf{S} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ eine symmetrische Matrix, so ist $q_{\mathbf{S}}(\mathbf{z}) := \mathbf{z} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{z}^t$ ein homogenes Polynom vom Grad 2. Die Hyperfläche

   $$Q_{\mathbf{S}} := \{(z_0 : \ldots : z_n) \,:\, q_{\mathbf{S}}(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

   nennt man auch eine *Hyperquadrik*. Aus der Klassifikation der symmetrischen Matrizen folgt, dass $Q_{\mathbf{S}}$ genau dann zu $Q_{\mathbf{T}}$ biholomorph äquivalent ist, wenn $\mathrm{rg}(\mathbf{S}) = \mathrm{rg}(\mathbf{T})$ ist. Insbesondere ist jede Quadrik vom Rang $n+1$ biholomorph äquivalent zur Standard-Hyperquadrik $Q_{n-1} = \{(z_0 : \ldots : z_n) \,:\, z_0^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$. Wegen

   $$Q_{n-1} \cap U_0 = \{(1 : t_1 : \ldots : t_n) \,:\, t_1^2 + \cdots + t_n^2 = -1\},$$

   hat Q_{n-1} keine Singularität in U_0. Das gleiche gilt für alle U_i. Also ist Q_{n-1} eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit.

5.13 Satz. *Jede analytische Hyperfläche $Z \subset \mathbb{P}^n$ ist die Nullstellenmenge eines einzelnen homogenen Polynoms.*

Beweis: Ist $Z \subset \mathbb{P}^n$ eine analytische Hyperfläche, so ist nach Remmert–Stein auch $\widehat{Z} = \pi^{-1}(Z) \cup \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ analytisch. Außerhalb des Nullpunktes wird $\widehat{Z}$ lokal immer durch eine Gleichung beschrieben. Aber dann muss das auch in $\mathbf{0}$ gelten, denn andernfalls gäbe es beliebig nahe bei Null Punkte, in denen $\widehat{X}$ mindestens Codimension 2 hat. Deshalb gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ und eine nicht identisch verschwindende holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \cap \widehat{Z} = N(f)$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ und

$$f(\mathbf{z}', z_n) = z_n^k + a_{k-1}(\mathbf{z}')z_n^{k-1} + \cdots + a_0(\mathbf{z}')$$

ein Weierstraß-Polynom ist.

Ist $q_{\kappa,\nu}$ der homogene Teil von a_κ vom Grad ν, so ist

$$p_k(\mathbf{z}', z_n) := z_n^k + q_{k-1,1}(\mathbf{z}')z_n^{k-1} + \cdots + q_{0,k}(\mathbf{z}')$$

der homogene Teil von f vom Grad k. Da $\widehat{Z}$ eine Kegelmenge ist, gilt $p_k|_{\widehat{Z}} = 0$.

Es gibt jetzt eine dichte offene Teilmenge $V \subset U'$, so dass $\{t \in U'' : f(\mathbf{z}', t) = 0\}$ für jedes feste $\mathbf{z}' \in V$ aus genau k Punkten besteht. Da $N(f) \cap U \subset N(p_k) \cap U$ und $\deg(p_k) = k$ ist, gilt $f = p_k$ über V und dann wegen des Identitätssatzes überall in U. Also ist $\widehat{Z} = N(p_k)$. ∎

Wir können ein Polynom p mit minimalem Grad wählen, so daß gilt:

$$Z = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \, : \, p(z_0, \ldots, z_n) = 0\}.$$

Dann verstehen wir unter dem *Grad* von Z die Zahl $\deg(p)$. Z.B. ist $\deg(H) = 1$ für jede Hyperebene H und $\deg(Q) = 2$ für jede Hyperquadrik Q.

Sei nun $Z \subset \mathbb{P}^n$ eine beliebige Hyperfläche vom Grad k, definiert durch ein homogenes Polynom p vom Grad k. Dann ist

$$Z \cap U_i = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in U_i \, : \, z_i^{-k} \cdot p(z_0, \ldots, z_n) = 0\},$$

und das Geradenbündel $[Z]$ ist gegeben durch die Übergangsfunktionen $g_{ij} = (z_j/z_i)^k$. Insbesondere erhalten wir für jede Hyperebene H das gleiche Geradenbündel $[H]$ mit Übergangsfunktionen z_j/z_i.

Definition. Ist $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene, dann wird das Geradenbündel $\mathcal{O}(1) := [H]$ als *Hyperebenenbündel* bezeichnet.

Die k-te Tensorpotenz des Hyperebenenbündels wird mit $\mathcal{O}(k)$ bezeichnet.

Ist $Z \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche vom Grad k, so ist $[Z] = \mathcal{O}(k)$.

Ein homogenes Polynom F vom Grad k induziert einen globalen Schnitt $s_F \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ durch

$$(s_F)_i(z_0 : \ldots : z_n) := z_i^{-k} F(z_0, \ldots, z_n) \quad \text{für } z_i \neq 0.$$

Tatsächlich ist $(s_F)_i$ eine holomorphe Funktion auf U_i, mit

$$(s_F)_i = (s_F)_j \cdot \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^k \text{ auf } U_{ij}.$$

Offensichtlich ist

$$\{x \in \mathbb{P}^n \,:\, s_F(x) = 0\} = \{(z_0 : \ldots : z_n) \,:\, F(z_0, \ldots, z_n) = 0\}.$$

Ist andererseits ein beliebiger globaler holomorpher Schnitt s von $\mathcal{O}(k)$ gegeben, so kann s durch holomorphe Funktionen $s_i : U_i \to \mathbb{C}$ mit

$$z_j^k \cdot s_j(z_0 : \ldots : z_n) = z_i^k \cdot s_i(z_0 : \ldots : z_n) \quad \text{ auf } U_i \cap U_j,$$

beschrieben werden, und wir erhalten eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(\mathbf{z}) = z_i^k \cdot s_i(\pi(\mathbf{z})) \quad \text{ auf } \pi^{-1}(U_i).$$

Es gibt eine holomorphe Fortsetzung F von f auf $\mathbb{C}^{n+1}$ mit $F(\lambda\mathbf{z}) = \lambda^k \cdot F(\mathbf{z})$. Das bedeutet, daß F ein homogenes Polynom vom Grad k ist, mit $s_F = s$. Daraus ergibt sich folgendes Resultat:

5.14 Satz. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist der Vektorraum $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ isomorph zum Raum der homogenen Polynome vom Grad k in den Variablen $z_0, \ldots, z_n$. Die analytischen Hyperflächen in $\mathbb{P}^n$ sind genau die Nullstellenmengen globaler holomorpher Schnitte von $\mathcal{O}(k)$.*

Zu jedem $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein homogenes Polynom F vom Grad k mit $F(\mathbf{z}_0) \neq 0$. Deshalb ist $\mathcal{O}(k)$ durch globale Schnitte erzeugt.

Das Bündel $\mathcal{O}(1)$ kann rein geometrisch beschrieben werden. Dafür bemerken wir, daß mit

$$p_0 := (0 : \ldots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{n+1},$$

eine Projektion $\pi_0 : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p_0\} \to \mathbb{P}^n$ gegeben wird, durch

$$\pi_0(z_0 : \ldots : z_n : z_{n+1}) := (z_0 : \ldots : z_n).$$

Wir erhalten lokale Trivialisierungen $\varphi_i : \pi_0^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ durch

$$\varphi_i(z_0 : \ldots : z_n : z_{n+1}) := \Big((z_0 : \ldots : z_n), \frac{z_{n+1}}{z_i}\Big),$$

mit $\varphi_i^{-1}((z_0 : \ldots : z_n), c) = (z_0 : \ldots : z_n : cz_i)$. Offensichtlich ergibt das die Übergangsfunktionen $z_j z_i^{-1}$. Ist F eine Linearform auf $\mathbb{C}^{n+1}$, dann ist der Schnitt s_F bei $x = \pi(\mathbf{z}) = (z_0 : \ldots : z_n)$ gegeben durch

$$s_F(x) = \varphi_i^{-1}(x, z_i^{-1} F(\mathbf{z})) = (z_0 : \ldots : z_n : F(\mathbf{z})).$$

Wir untersuchen nun noch einige Verbindungen zur komplexen algebraischen Geometrie.

Eine meromorphe Funktion m auf $\mathbb{P}^n$ heißt *rational*, falls $m = 0$ ist oder falls es homogene Polynome F und G vom gleichen Grad gibt, so daß gilt: $F \neq 0$ und

$$m(z_0 : \ldots : z_n) = \frac{F(z_0, \ldots, z_n)}{G(z_0, \ldots, z_n)}.$$

5.15 Theorem. *Jede meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^n$ ist rational.*

BEWEIS: Ist $m \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^n)$, so hat der Divisor von m eine endliche Darstellung

$$\mathbf{div}(m) = \sum_i n_i \cdot Z_i\,,$$

mit $n_i \in \mathbb{Z}$ und irreduziblen Hyperflächen $Z_i \subset \mathbb{P}^n$. Jedes Z_i ist die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms F_i vom Grad $d_i \geq 1$. Dann ist $F := \prod_i F_i^{n_i}$ eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}^{n+1}$, die homogen vom Grad $d := \sum_i n_i d_i \in \mathbb{Z}$ ist.

Da $\mathbf{div}(m \circ \pi) = \mathbf{div}(F) = \sum\limits_i n_i \pi^{-1}(Z_i)$ auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist, hat die meromorphe Funktion $f := (m \circ \pi) \cdot F^{-1}$ dort weder Nullstellen noch Polstellen. Sie ist also holomorph und besitzt eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}$ nach $\mathbb{C}^{n+1}$ mit $\widehat{f}(\mathbf{0}) \neq 0$, weil $\widehat{f}$ keine isolierte Nullstelle haben kann.

Für $c \in \mathbb{C}^*$ gilt die Gleichung

$$\widehat{f}(c \cdot \mathbf{z}) = f(c \cdot \mathbf{z}) = m \circ \pi(c) \cdot F^{-1}(c\mathbf{z}) = c^{-d} \cdot \widehat{f}(\mathbf{z})$$

auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}^{n+1}$ und dann (wegen des Identitätssatzes) überall auf $\mathbb{C}^{n+1}$. Mit $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ erhält man $c^{-d} = 1$, also $d = 0$. Aus der Beziehung $\widehat{f}(c \cdot \mathbf{z}) = \widehat{f}(\mathbf{z})$ folgt, dass $\widehat{f}(\mathbf{z})$ beschränkt und deshalb eine Konstante w_0 ist. Daher ist $m \circ \pi(\mathbf{z}) = w_0 \cdot F(\mathbf{z})$ eine rationale Funktion. ∎

Eine *rationale Funktion* auf einer Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{P}^n$ ist die Einschränkung $m|_X$ einer rationalen Funktion m auf $\mathbb{P}^n$. Wir haben schon gesehen, dass jedes Polynom p auf $U_0 \cong \mathbb{C}^n$ zu einer rationalen Funktion m auf $\mathbb{P}^n$ fortgesetzt werden kann. Deshalb gibt es auf jeder algebraischen Mannigfaltigkeit viele rationale Funktionen.

Ist $A \subset \mathbb{P}^n$ projektiv-algebraisch, so nennt man $A_i := A \cap U_i$ eine *affin-algebraische Menge*. Eine komplexe Mannigfaltigkeit heißt eine *affin-algebraische Mannigfaltigkeit*, wenn sie biholomorph äquivalent zu einer affin-algebraischen Menge ist. Eine *reguläre Funktion* auf einer affin-algebraischen Mannigfaltigkeit $j : X \hookrightarrow U_i$ ist eine holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, zu der ein Polynom p auf $U_i \cong \mathbb{C}^n$ mit $f = p \circ j$ existiert. Man kann zeigen, dass eine rationale Funktion auf einer affin-algebraischen Mannigfaltigkeit immer ein Quotient von regulären Funktionen ist.

In der algebraischen Geometrie wird ein allgemeinerer Begriff von regulären Funktionen benutzt, der im Falle affin-algebraischer Mannigfaltigkeiten mit unserer Notation übereinstimmt. Auf projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten sind alle regulären Funktionen konstant, während es dort viele rationale Funktionen gibt. Im affinen Fall ist der Körper der rationalen Funktionen genau der Quotientenkörper des Ringes der regulären Funktionen.

Ist $Z \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche vom Grad k, so ist $X := \mathbb{P}^n \setminus Z$ eine affin-algebraische Mannigfaltigkeit. Wir können das folgendermaßen sehen:

Sei I die Menge der Multiindizes $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ mit $\nu_0 + \cdots + \nu_n = k$. Dann ist $\#(I) = \binom{n+k}{k}$ die Anzahl der Monome $\mathbf{z}^\nu = z_0^{\nu_0} \cdots z_n^{\nu_n}$, $\nu \in I$. Wir setzen $N := \#(I) - 1$ und definieren die *Veronese-Abbildung* $v_{k,n} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ durch

$$v_{k,n}(z_0 : \ldots : z_n) := (\mathbf{z}^\nu \mid \nu \in I).$$

Man kann zeigen, dass $v_{k,n}$ eine Einbettung und deshalb das Bild $V_{k,n} = v_{k,n}(\mathbb{P}^n)$ eine algebraische Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}^N$ ist. Ist p ein homogenes Polynom vom Grad k mit Nullstellenmenge Z, so gibt es komplexe Zahlen a_ν, $\nu \in I$, so dass $p = \sum_{\nu \in I} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ist. Es folgt, dass

$$v_{k,n}(Z) = V_{k,n} \cap \Big\{ (w_\nu)_{\nu \in I} \;:\; \sum_{\nu \in I} a_\nu w_\nu = 0 \Big\}$$

der Durchschnitt von $V_{k,n}$ mit einer Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^N$ ist. Deshalb ist $\mathbb{P}^n \setminus Z \cong v_{k,n}(\mathbb{P}^n \setminus Z) = V_{k,n} \cap (\mathbb{P}^N \setminus H)$ affin-algebraisch.

Zum Schluss wollen wir uns noch mit folgendem Problem befassen: Sei X eine n-dimensionale zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit und $A \subset X$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Ist es möglich, A auszuschneiden und durch eine andere Untermannigfaltigkeit A' zu ersetzen, so dass $X' = (X \setminus A) \cup A'$ wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist? Im Allgemeinen ist die Antwort „Nein", aber manchmal ist eine solche Chirurgie möglich. In dem Fall nennen wir die neue Mannigfaltigkeit X' eine Modifikation von X.

Definition. Sei $f : X \to Y$ eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung zwischen zwei n-dimensionalen zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung f heißt eine *(eigentliche) Modifikation* von Y nach X, falls es nirgends dichte analytische Teilmengen $E \subset X$ und $S \subset Y$ gibt, so dass folgendes gilt:

1. $f(E) \subset S$.
2. f bildet $X \setminus E$ biholomorph auf $Y \setminus S$ ab.
3. Jede Faser $f^{-1}(y)$, $y \in S$, besteht aus mehr als einem Punkt.

Die Menge S nennt man das *Zentrum* der Modifikation und $E = f^{-1}(S)$ die *exzeptionelle Menge*.

Sei $U = U(\mathbf{0})$ eine kleine konvexe Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^{n+1}$. Wir wollen den Ursprung in U durch einen n-dimensionalen komplexen projektiven Raum ersetzen. Ist $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ die kanonische Projektion, so bestimmt jede Gerade $\mathbb{C}\mathbf{v}$ durch den Nullpunkt ein Element $x = \pi(\mathbf{v})$ im projektiven Raum, und x bestimmt die Gerade $\ell(x) = \pi^{-1}(x) \cup \{\mathbf{0}\}$, so dass $\mathbb{C}\mathbf{v} = \ell(\pi(\mathbf{v}))$ ist. Jetzt setzen wir $\mathbb{P}^n$ so ein, dass wir den Punkt x erreichen, wenn wir uns dem Nullpunkt längs $\ell(x)$ nähern.

Wir definieren

$$X := \{(\mathbf{w}, x) \in U \times \mathbb{P}^n \,:\, \mathbf{w} \in \ell(x)\}.$$

Das ist eine sogenannte *Inzidenzmenge*. Wir zeigen zunächst, dass X eine $(n+1)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}, \pi(\mathbf{z})) \in X \quad &\iff \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \text{ und } \exists\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathbf{w} = \lambda \mathbf{z} \\
&\iff \quad \exists\, i \text{ mit } z_i \neq 0 \text{ und } w_j = \frac{w_i}{z_i} \cdot z_j \text{ für } j \neq i \\
&\iff \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \text{ und } z_i w_j - w_i z_j = 0 \text{ für alle } i, j.
\end{aligned}$$

Also ist X eine analytische Teilmenge von $U \times \mathbb{P}^n$, mit

$$X \cap (U \times U_0) \cong \{(\mathbf{w}, \mathbf{t}) \in U \times \mathbb{C}^n \,:\, w_j = w_0 t_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}.$$

In $U \times U_i$ (für $i > 0$) gibt es eine ähnliche Darstellung. Es folgt, dass X eine Untermannigfaltigkeit der Codimension n in der $(2n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $U \times \mathbb{P}^n$ ist. Die Abbildung $q := \mathrm{pr}_1|_X : X \to U$ ist holomorph und bildet $X \setminus q^{-1}(\mathbf{0})$ biholomorph auf $U \setminus \{\mathbf{0}\}$ ab, mit $q : (\mathbf{w}, x) \mapsto \mathbf{w}$ und $q^{-1} : \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{w}, \pi(\mathbf{w}))$. Offensichtlich ist q eine eigentliche Abbildung.

Das Urbild $q^{-1}(\mathbf{0})$ ist die exzeptionelle Menge $\{(\mathbf{0}, x) \,:\, \mathbf{0} \in \ell(x)\} = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{P}^n$. Also ist $q : X \to U$ eine eigentliche Modifikation. Man bezeichnet sie als *Hopfschen σ-Prozess* und sagt, U wird im Ursprung *aufgeblasen*.

Ist $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ein Punkt von U und (λ_n) eine Folge von komplexen Zahlen $\neq 0$, die gegen Null konvergiert, so konvergiert $q^{-1}(\lambda_n \mathbf{w}) = (\lambda_n \mathbf{w}, \pi(\mathbf{w}))$ gegen $(\mathbf{0}, \pi(\mathbf{w}))$. Das ist die gewünschte Eigenschaft, von der oben gesprochen wurde.

Nun untersuchen wir den Fall $U = \mathbb{C}^{n+1}$, also die Mannigfaltigkeit

$$F := \{(\mathbf{w}, x) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \,:\, \mathbf{w} \in \ell(x)\},$$

sowie die **zweite** Projektion

$$p := \mathrm{pr}_2|_F : F \to \mathbb{P}^n.$$

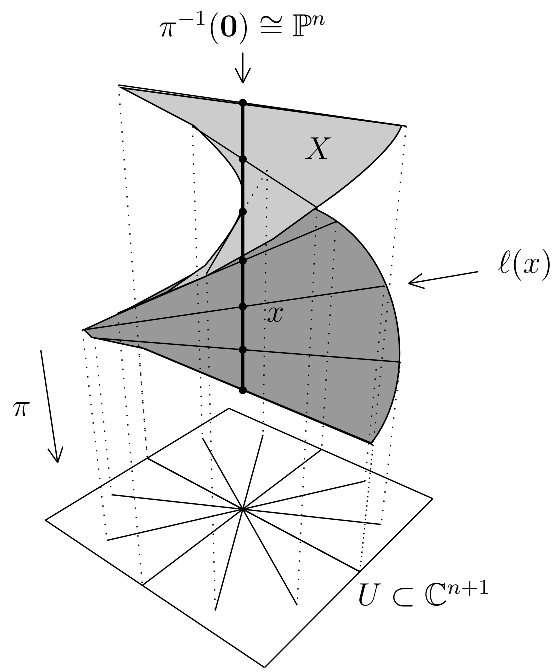
Dann ist $p^{-1}(x) = \ell(x)$ immer die komplexe Gerade, die durch x bestimmt wird. Die Mannigfaltigkeit F sieht wie ein Geradenbündel über dem projektiven Raum aus. Tatsächlich haben wir lokale Trivialisierungen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$, definiert durch $\varphi_i(\mathbf{w}, x) := (x, w_i)$. Offensichtlich ist φ_i holomorph. Tatsächlich ist diese Abbildung sogar biholomorph, mit Umkehrabbildung

$$\varphi_i^{-1} : (\pi(\mathbf{z}), c) \mapsto \left(\frac{c}{z_i} \cdot \mathbf{z}, \pi(\mathbf{z})\right).$$

Über U_{ij} gilt also:

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(\pi(\mathbf{z}), c) = \varphi_i\left(\frac{c}{z_j} \cdot \mathbf{z}, \pi(\mathbf{z})\right) = \left(\pi(\mathbf{z}), c \cdot \frac{z_i}{z_j}\right).$$

Damit hat F die Übergangsfunktionen $g_{ij} = z_i/z_j$, ist also das duale Bündel des Hyperebenenbündels $\mathcal{O}(1)$. Man bezeichnet es mit $\mathcal{O}(-1)$ und nennt es das *tautologische Bündel*, weil die Faser über $x \in \mathbb{P}^n$ die Gerade $\ell(x)$ ist, die mehr oder weniger dasselbe wie x ist. Manchmal nennt man F auch das *Hopf-Bündel*, weil es in $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$ liegt und die Projektion auf die erste Komponente der Hopfsche σ-Prozess ist.



Sei $j : F \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ definiert durch $j(\mathbf{w}, x) := (x, \mathbf{w})$ und $J_i : U_i \times \mathbb{C} \to U_i \times \mathbb{C}^{n+1}$ durch

$$J_i(\pi(\mathbf{z}), c) := \left(\pi(\mathbf{z}), \frac{c}{z_i} \cdot \mathbf{z}\right).$$

Dann haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} F|_{U_i} & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{C} \\ j \downarrow & & \downarrow J_i \\ U_i \times \mathbb{C}^{n+1} & \cong & U_i \times \mathbb{C}^{n+1} \end{array}$$

Das zeigt, dass F ein Unterbündel des trivialen Vektorbündels $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ ist. Da es im trivialen Bündel nur konstante (globale) Schnitte gibt, ist $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-1)) = 0$, d.h., es gibt keine globalen holomorphen Schnitte im tautologischen Bündel.

Es gibt einen interessanten geometrischen Zusammenhang zwischen F und F'. Dazu betrachten wir den Punkt $x_0 := (0 : \ldots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{n+1}$ und die Hyperebene

$$H_0 := \{\pi(\mathbf{z}) \in \mathbb{P}^{n+1} \,:\, z_{n+1} = 0\}.$$

Dann ist das Hyperebenenbündel $F' = \mathcal{O}(1)$ gegeben durch die Projektion $\pi_+ : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{x_0\} \to H_0 \cong \mathbb{P}^n$, mit

$$\pi_+(z_0 : \ldots : z_n : z_{n+1}) := (z_0 : \ldots : z_n : 0).$$

Hier ist H_0 der Nullschnitt von $\mathcal{O}(1)$. Entfernt man den Nullschnitt, so erhält man eine Mannigfaltigkeit, die isomorph zu $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist, und die Fasern des Hyperebenenbündels entsprechen den Geraden durch den Ursprung. Bläst man den Punkt x_0 auf, so erhält man in jeder Faser einen zusätzlichen Punkt und damit ein projektives Bündel $\overline{F'}$ über $\mathbb{P}^n$ mit Faser $\mathbb{P}^1$. Schaut man aber in die andere Richtung, so ist $\overline{F'} \setminus H_0$ nichts anderes als das tautologische Bündel $\mathcal{O}(-1)$ über der exzeptionellen Menge des σ-Prozesses.