§ 3 Pseudokonvexität und Levi-Bedingung

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt *pseudokonvex*, falls es eine streng plurisubharmonische $\mathcal{C}^\infty$-Ausschöpfungsfunktion für G gibt.

Bemerkungen.

1. Nach dem Glättungs-Lemma ist klar: Ist $-\log \delta_G$ plurisubharmonisch, so ist G pseudokonvex.

2. Pseudokonvexität ist invariant unter biholomorphen Transformationen.

3.1 Theorem. *Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet, so genügt G dem Kontinuitätsprinzip.*

Beweis: Sei $p : G \to \mathbb{R}$ eine streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion. Wir nehmen an, es gibt eine Familie $\{S_t : 0 \le t \le 1\}$ von analytischen Scheiben, gegeben durch eine stetige Abbildung $\varphi : \overline{\Delta} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$, so daß $S_0 \subset G$ und $bS_t \subset G$ für jedes $t \in [0,1]$ gilt, dass aber nicht alle S_t in G enthalten sind.

Die Funktionen $p \circ \varphi_t : \Delta \to \mathbb{R}$ sind für jedes t mit $S_t \subset G$ subharmonisch. Aus dem Maximumprinzip folgt, dass $p|S_t \le \max_{bS_t} p$ für alle t gilt.

Wir setzen $t_0 := \inf\{t \in [0,1] : S_t \not\subset G\}$. Dann ist $t_0 > 0$ und $S_{t_0} \subset \overline{G}$, und S_{t_0} trifft ∂G in wenigstens einem Punkt $\mathbf{z}_0$. Wir können eine monoton wachsende Folge (t_ν) finden, die gegen t_0 konvergiert, sowie eine Folge von Punkten $\mathbf{z}_\nu \in S_{t_\nu}$, die gegen $\mathbf{z}_0$ konvergiert. Dann konvergiert $p(\mathbf{z}_\nu)$ gegen $c_0 := \sup_G(p)$, aber es gibt ein $c < c_0$, so dass $p|_{bS_t} \le c$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Das ist ein Widerspruch. ∎

3.2 Folgerung. *Ist G pseudokonvex, so ist G Hartogs-konvex.*

3.3 Theorem. *Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Hartogs-konvexes Gebiet, so ist $-\log \delta_G$ auf G plurisubharmonisch.*

Beweis: Für $\mathbf{z} \in G$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ mit $\|\mathbf{u}\| = 1$ definieren wir

$$\delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}) := \sup\{t > 0 : \mathbf{z} + \tau\mathbf{u} \in G \text{ für } |\tau| \le t\}.$$

Dann ist $\delta_G(\mathbf{z}) = \inf\{\delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}) : \|\mathbf{u}\| = 1\}$, und es reicht zu zeigen, dass $-\log \delta_{G,\mathbf{u}}$ für jedes feste $\mathbf{u}$ plurisubharmonisch ist.

(a) Leider braucht $\delta_{G,\mathbf{u}}$ nicht stetig zu sein, die Funktion ist aber halbstetig nach unten:

Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt und $c < \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0)$. Dann ist die kompakte Menge $K := \{\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \tau\mathbf{u} : |\tau| \le c\}$ in G enthalten, und es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\{\mathbf{z} : \operatorname{dist}(K, \mathbf{z}) < \delta\} \subset G$ ist.

Für $\mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{z}_0)$ und $|\tau| \le c$ haben wir

$$\|(\mathbf{z} + \tau\mathbf{u}) - (\mathbf{z}_0 + \tau\mathbf{u})\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta, \text{ und daher } \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}) \geq c.$$

(b) Die Funktion $-\log \delta_{G,\mathbf{u}}$ ist halbstetig nach oben, und wir müssen zeigen, dass

$$s(\zeta) := -\log \delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b})$$

für feste $\mathbf{u}, \mathbf{z}_0, \mathbf{b}$ subharmonisch ist. Zunächst untersuchen wir den Fall, dass $\mathbf{u}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig sind: $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{u}$, $\lambda \neq 0$.

Sei G_0 die Zusammenhangskomponente von 0 in $\{\zeta \in \mathbb{C} : \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b} \in G\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\delta_{G,\mathbf{u}}(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b}) &= \sup\{t > 0 : \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{b} + \tau\mathbf{u} \in G \text{ für } |\tau| \leq t\} \\
&= \sup\{t > 0 : \zeta + \tau/\lambda \in G_0 \text{ für } |\tau| \leq t\} \\
&= |\lambda| \cdot \sup\{r > 0 : \zeta + \sigma \in G_0 \text{ für } |\sigma| \leq r\} \\
&= |\lambda| \cdot \delta_{G_0}(\zeta),
\end{aligned}$$

und $-\log \delta_{G_0}$ ist subharmonisch.

(c) Jetzt nehmen wir an, dass $\mathbf{u}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängig sind. Da diese Vektoren festgehalten werden, können wir uns auf die folgende spezielle Situation beschränken:

$$n = 2, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1, \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{e}_2.$$

Dann ist $s(\zeta) = -\log \sup\{t > 0 : (\zeta, \tau) \in G \text{ für } |\tau| \leq t\}$. Wir benutzen holomorphe Funktionen, um zu zeigen, dass s subharmonisch ist. Seien $R > r > 0$ reelle Zahlen, so dass $(\zeta, 0) \in G$ für $|\zeta| < R$ ist, und sei $f : \Delta(0, R) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $s < h := \operatorname{Re} f$ auf $\partial\Delta(0, r)$ ist. Wir müssen zeigen, dass $s < h$ auf $\Delta(0, r)$ ist.

Wir haben die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
s(\zeta) < h(\zeta) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup\{t > 0 : (\zeta, \tau) \in G \text{ für } |\tau| \leq t\} > e^{-h(\zeta)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\zeta, c \cdot e^{-f(\zeta)}\big) \in G \text{ für } c \in \overline{\Delta}.
\end{aligned}$$

(d) Wir definieren eine holomorphe Abbildung $\mathbf{F}$ durch

$$\mathbf{F}(z_1, z_2) := \big(rz_1, z_2 e^{-f(rz_1)}\big).$$

Dann ist $\mathbf{F}$ auf einer Umgebung des Einheitspolyzylinders $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}^2(\mathbf{0}, 1)$ wohldefiniert. Es muss gezeigt werden, dass $\mathbf{F}(\mathsf{P}^2) \subset G$ ist. Wir wissen schon:

1. $\mathbf{F}(z_1, z_2) \in G$ für $|z_1| = 1$ und $|z_2| \leq 1$, weil $s(t) < h(t)$ auf $\partial\Delta(0, r)$ ist.

2. $\mathbf{F}(z_1, 0) \in G$ für $|z_1| \leq 1$, weil $(\zeta, 0) \in G$ für $|\zeta| \leq r$ ist.

Diese Tatsachen werden wir benutzen, um eine geeignete Hartogs-Figur zu konstruieren. Zunächst halten wir fest:

$$J_{\mathbf{F}}(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ * & e^{-f(rz_1)} \end{pmatrix}, \qquad \text{also } \det J_{\mathbf{F}}(z_1,z_2) \neq 0.$$

Aus dem Satz über die Umkehrabbildung folgt, dass $\mathbf{F}$ biholomorph ist.

Für $0 < \delta < 1$ definieren wir $\mathbf{h}_\delta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ durch $\mathbf{h}_\delta(z_1,z_2) := (z_1, \delta z_2)$, und dann wenden wir $\mathbf{h}_\delta$ auf die folgende kompakte Menge an:

$$C := \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, (|z_1| \le 1,\, z_2 = 0) \text{ oder } (|z_1| = 1,\, |z_2| \le 1)\} \subset \overline{\mathsf{P}^2}\,.$$

Das ergibt die Menge

$$C_\delta := \mathbf{h}_\delta(C) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, (|z_1| \le 1,\, z_2 = 0) \text{ oder } (|z_1| = 1,\, |z_2| \le \delta)\}.$$

Es ist $\mathbf{F}(C_\delta) \subset G$, wie wir oben gesehen haben, und daher $C_\delta \subset \mathbf{F}^{-1}(G)$.

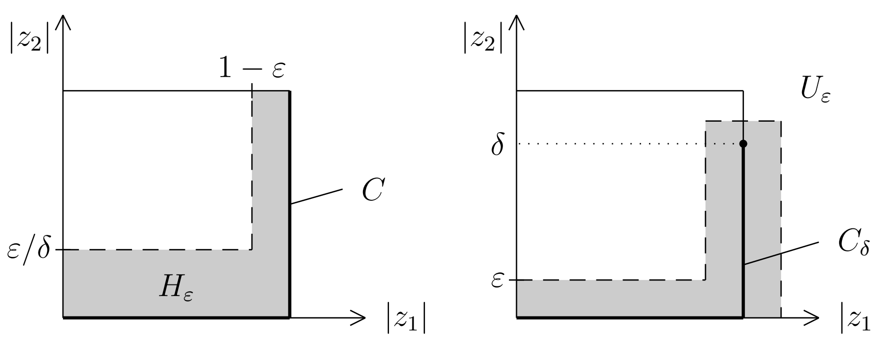
Für $0 < \varepsilon < \min(\delta, 1-\delta)$ definieren wir eine Umgebung U_ε von C_δ durch $U_\varepsilon :=$

$$\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, (|z_1| < 1+\varepsilon,\, |z_2| < \varepsilon) \text{ oder } (1-\varepsilon < |z_1| < 1+\varepsilon,\, |z_2| < \delta+\varepsilon)\}.$$

Wenn wir ε klein genug wählen, ist $U_\varepsilon \subset \mathbf{F}^{-1}(G)$.

Schließlich setzen wir $\mathsf{H}_\varepsilon := \mathbf{h}_\delta^{-1}(U_\varepsilon \cap \mathsf{P}^2) \cap \mathsf{P}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathsf{H}_\varepsilon &= \{(z_1,z_2) \in \mathsf{P}^2 \,:\, (z_1, \delta z_2) \in U_\varepsilon \cap \mathsf{P}^2\} \\ &= \Big\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, \big(|z_1| < 1,\, |z_2| < \frac{\varepsilon}{\delta}\big) \text{ oder } (1-\varepsilon < |z_1| < 1,\, |z_2| < 1)\Big\}. \end{aligned}$$



Da $(\mathsf{P}^2, \mathsf{H}_\varepsilon)$ eine euklidische Hartogs-Figur ist, ist $(\mathbf{F} \circ \mathbf{h}_\delta(\mathsf{P}^2), \mathbf{F} \circ \mathbf{h}_\delta(\mathsf{H}_\varepsilon))$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\mathbf{F} \circ \mathbf{h}_\delta(\mathsf{H}_\varepsilon) \subset \mathbf{F}(U_\varepsilon \cap \mathsf{P}^2) \subset G$. Da G Hartogs-konvex ist, muss $\mathbf{F} \circ h_\delta(\mathsf{P}^2) \subset G$ sein. Das gilt für jedes $\delta < 1$. Weil $\mathsf{P}^2 = \bigcup_{0<\delta<1} \mathbf{h}_\delta(\mathsf{P}^2)$ ist, muss $\mathbf{F}(\mathsf{P}^2) \subset G$ sein. Damit ist alles gezeigt. ∎

3.4 Theorem. *Die folgenden Aussagen über ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ sind äquivalent:*

1. *G genügt dem Kontinuitätsprinzip.*
2. *G ist Hartogs-konvex.*

3. *$-\log \delta_G$ ist plurisubharmonisch auf G.*

4. *G ist pseudokonvex.*

Beweis:

Die Aussagen (1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3) und (4) $\Longrightarrow$ (1) haben wir schon gezeigt, (3) $\Longrightarrow$ (4) folgt aus dem Glättungslemma. ∎

3.5 Theorem. *Sind $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvexe Gebiete, so ist auch $G_1 \cap G_2$ pseudokonvex.*

Beweis: Die Aussage ist trivial, wenn man Hartogs-Konvexität benutzt. ∎

3.6 Theorem. *Sei $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^n$ eine aufsteigende Folge pseudokonvexer Gebiete. Dann ist auch $G := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$ pseudokonvex.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Kontinuitätsprinzip, wenn man folgendes berücksichtigt: Ist (S_t) eine Familie analytischer Scheiben, so sind die Mengen S_0 und $\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t$ kompakt. ∎

3.7 Theorem. *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann pseudokonvex, wenn es eine offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von $\overline{G}$ gibt, so dass $U_\iota \cap G$ für jedes $\iota \in I$ pseudokonvex ist.*

Beweis:

„$\Longrightarrow$“ ist trivial, denn Kugeln und Polyzylinder sind pseudokonvex. Die andere Richtung wird in zwei Schritten gezeigt. Zunächst nehmen wir an, dass G beschränkt ist.

Zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ gibt es eine offene Menge U_ι, so dass $\mathbf{z}_0 \in U_\iota$ und $G \cap U_\iota$ pseudokonvex ist. Wenn wir eine so kleine Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset U_\iota$ wählen, dass $\operatorname{dist}(\mathbf{z}, \partial U_\iota) > \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0)$ für jedes $\mathbf{z} \in W \cap G$ ist, so ist $\delta_G(\mathbf{z}) = \delta_{G \cap U_\iota}(\mathbf{z})$ auf $W \cap G$. Daraus folgt, dass es eine offene Umgebung $U = U(\partial G)$ gibt, so dass gilt: $-\log \delta_G$ ist plurisubharmonisch auf $U \cap G$. Dann ist $G \setminus U \subset\subset G$. Wir definieren

$$c := \sup\{-\log \delta_G(\mathbf{z}) \,:\, \mathbf{z} \in G \setminus U\},$$

und

$$p(\mathbf{z}) := \max\bigl(-\log \delta_G(\mathbf{z}), \|z\|^2 + c + 1\bigr).$$

Dann ist p eine plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion, und nach dem Glättungslemma ist G pseudokonvex.

Ist G unbeschränkt, so schreiben wir G als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Gebieten $G_\nu := \mathsf{B}_\nu(\mathbf{0}) \cap G$. Jedes G_ν ist beschränkt und erfüllt die nötigen Voraussetzungen, ist also pseudokonvex. Dann ist auch G ein pseudokonvexes Gebiet.

■

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Der Rand von G heißt *glatt* in $\mathbf{z}_0 \in \partial G$, falls es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ und eine Funktion $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$ gibt, so dass gilt

1. $U \cap G = \{\mathbf{z} \in U \,:\, \varrho(\mathbf{z}) < 0\}$.
2. $(d\varrho)_\mathbf{z} \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$.

Die Funktion ϱ heißt eine *lokale definierende Funktion* (oder *Randfunktion*).

Bemerkung. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\varrho_{y_n} \neq 0$ ist. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen Umgebungen

$$U' \text{ von } (\mathbf{z}_0', x_n^{(0)}) = \big(z_1^{(0)}, \ldots, z_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}\big) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}, \quad U'' \text{ von } y_n^{(0)} \in \mathbb{R},$$

und eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\gamma : U' \to U''$ so daß gilt:

$$\{(\mathbf{z}', x_n, y_n) \in U' \times U'' \,:\, \varrho(\mathbf{z}', x_n + \mathsf{i}\, y_n) = 0\} = \{(\mathbf{z}', x_n, \gamma(\mathbf{z}', x_n)) \,:\, (\mathbf{z}', x_n) \in U'\}.$$

Wählt man $U := \{(\mathbf{z}', x_n + \mathsf{i}\, y_n) \,:\, (\mathbf{z}', x_n) \in U' \text{ und } y_n \in U''\}$ klein genug und korrigiert man – falls nötig – das Vorzeichen, so kann man erreichen, dass gilt:

$$U \cap G = \{(\mathbf{z}', x_n + \mathsf{i}\, y_n) \in U \,:\, y_n < \gamma(\mathbf{z}', x_n)\}.$$

Insbesondere ist $U \cap \partial G = \{\mathbf{z} \in U \,:\, \varrho(\mathbf{z}) = 0\}$ eine $(2n-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von U.

3.8 Hilfssatz. *Ist ∂G in $\mathbf{z}_0$ glatt und sind ϱ_1, ϱ_2 zwei lokale definierende Funktionen auf $U = U(\mathbf{z}_0)$, so gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion h auf U, so daß gilt:*

1. *$h > 0$ auf U.*
2. *$\varrho_1 = h \cdot \varrho_2$ auf U.*
3. *$(d\varrho_1)_\mathbf{z} = h(\mathbf{z}) \cdot (d\varrho_2)_\mathbf{z}$ für $\mathbf{z} \in U \cap \partial G$.*

Beweis: Siehe Analysis 3! ■

3.9 Theorem. *Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann ist ∂G eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, und es gibt eine globale definierende Funktion.*

Beweis: Wir finden offene Mengen $V_i \subset\subset U_i \subset \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, N$, so dass gilt:

1. $\{V_1, \ldots, V_N\}$ ist eine offene Überdeckung von ∂G.
2. Für jedes i gibt es eine lokale definierende Funktion ϱ_i für G auf U_i.
3. Für jedes i gibt es eine glatte Funktion $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_i|_{V_i} \equiv 1$, $\varphi_i|_{\mathbb{C}^n \setminus U_i} \equiv 0$ und $\varphi_i \geq 0$ im allgemeinen.

Sei $\varphi := \sum_i \varphi_i$ (also $\varphi > 0$ auf ∂G) und $\psi_i := \varphi_i/\varphi$. Dann ist $\sum_i \psi_i \equiv 1$ auf ∂G. Man nennt das System der Funktionen ψ_i eine *Teilung der Eins* auf ∂G.

Die Funktion $\varrho := \sum_{i=1}^N \psi_i \varrho_i$ ist jetzt eine globale definierende Funktion für G. Die Details sind leicht zu überprüfen. ∎

Sei nun $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $\varrho : U = U(\partial G) \to \mathbb{R}$ eine globale definierende Funktion. In jedem $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ ist der reelle Tangentialraum an den Rand gegeben durch

$$T_{\mathbf{z}_0}(\partial G) := \{\mathbf{v} \in T_{\mathbf{z}_0} \,:\, (d\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v}) = 0\}.$$

Das ist ein $(2n-1)$-dimensionaler reeller Unterraum von $T_{\mathbf{z}_0}$. Den Raum

$$H_{\mathbf{z}_0}(\partial G) := T_{\mathbf{z}_0}(\partial G) \cap \mathrm{i}\, T_{\mathbf{z}_0}(\partial G) = \{\mathbf{v} \in T_{\mathbf{z}_0} \,:\, (\partial\varrho)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{v}) = 0\}$$

nennt man den *komplexen* (oder *holomorphen*) *Tangentialraum* des Randes in $\mathbf{z}_0$. Er ist ein $(2n-2)$-dimensionaler reeller Unterraum von $T_{\mathbf{z}_0}$, mit einer natürlichen komplexen Struktur, also ein $(n-1)$-dimensionaler komplexer Unterraum[1].

Definition. Ein Gebiet G erfüllt in $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ die *Levi-Bedingung* (bzw. die *strikte Levi-Bedingung*), falls $\mathrm{Lev}(\varrho)$ positiv semidefinit (bzw. positiv definit) auf $H_{\mathbf{z}_0}(\partial G)$ ist.

G heißt *Levi-konvex* (bzw. *strikt Levi-konvex*), falls G in jedem Punkt $\mathbf{z} \in \partial G$ die Levi-Bedingung (bzw. die strikte Levi-Bedingung) erfüllt.

Bemerkung. Die Levi-Bedingungen hängen nicht von der Wahl der Randfunktion ab, und sie sind invariant unter biholomorphen Transformationen.

Ist $\varrho_1 = h \cdot \varrho_2$, mit $h > 0$, dann gilt für $\mathbf{z} \in \partial G$:

$$\mathrm{Lev}(\varrho_1)(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = h(\mathbf{z}) \cdot \mathrm{Lev}(\varrho_2)(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + 2\,\mathrm{Re}\{(\overline{\partial} h)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}) \cdot (\partial \varrho_2)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})\}.$$

Deshalb unterscheiden sich die Levi-Formen von ϱ_1 und ϱ_2 auf $H_{\mathbf{z}}(\partial G)$ nur durch eine positive Konstante.

Wir wiederholen jetzt einige Tatsachen aus der reellen Analysis:

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für je zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ auch die abgeschlossene Strecke von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$ in M enthalten ist. In diesem Fall gibt es

[1] $H_{\mathbf{z}}(\partial G)$ wird oft auch mit $T^{1,0}_{\mathbf{z}}(\partial G)$ bezeichnet.

zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ eine reelle Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x}_0 \in H$ und $M \cap H = \varnothing$.

Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $U = U(\mathbf{a})$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mindestens $\mathcal{C}^2$, so ist die quadratische Form

$$\text{Hess}(\varphi)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) := \sum_{\nu,\mu} \varphi_{x_\nu x_\mu}(\mathbf{a}) w_\nu w_\mu$$

bekannt als die *Hesse-Form* von φ in $\mathbf{a}$.

3.10 Satz. *Sei $G \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und ϱ eine globale definierende Funktion mit $(d\varrho)_\mathbf{x} \neq 0$ für $\mathbf{x} \in \partial G$. Das Gebiet G ist genau dann konvex, wenn* Hess(ϱ) *auf jedem Tangentialraum $T_\mathbf{x}(\partial G)$ positiv semidefinit ist.*

Beweis: Sei G konvex und $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $T := T_{\mathbf{x}_0}(\partial G)$ eine reelle Hyperebene mit $T \cap G = \varnothing$. Für $\mathbf{w} \in T$ und $\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}$ ist

$$(\varrho \circ \alpha)''(0) = \text{Hess}(\varrho)(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}).$$

Da $\varrho(\mathbf{x}_0) = 0$ und $\varrho \circ \alpha(t) \geq 0$ ist, folgt, dass $\varrho \circ \alpha$ in $t = 0$ ein Minimum besitzt. Dann ist $(\varrho \circ \alpha)''(0) \geq 0$ und Hess(ϱ) positiv semidefinit auf T.

Sei nun umgekehrt das Kriterium erfüllt und $\mathbf{0} \in G$. Wir definieren ϱ_ε durch

$$\varrho_\varepsilon(\mathbf{x}) := \varrho(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{N}\|\mathbf{x}\|^N.$$

Für kleines ε und großes N ist die Menge $G_\varepsilon := \{\mathbf{x} : \varrho_\varepsilon(\mathbf{x}) < 0\}$ offen, und es ist $G_\varepsilon \subset G_{\varepsilon'} \subset G$ für $\varepsilon' < \varepsilon$, sowie $\bigcup_{\varepsilon>0} G_\varepsilon = G$. Deshalb reicht es zu zeigen, dass G_ε konvex ist.

Die Hesse-Form von ϱ_ε ist für jedes $\mathbf{x} \in \partial G$ auf $T_\mathbf{x}(\partial G)$ positiv definit. Das gilt dann aber sogar auf einer ganzen Umgebung U von ∂G. Ist ε klein genug, so ist $\partial G_\varepsilon \subset U$. Nun sei

$$S := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G_\varepsilon \times G_\varepsilon \,:\, t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in G_\varepsilon, \text{ für } 0 < t < 1\}.$$

Dann ist S eine offene Teilmenge der zusammenhängenden offenen Menge $G_\varepsilon \times G_\varepsilon$. Wir nehmen an, dass S keine abgeschlossene Teilmenge ist. Dann gibt es Punkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in G_\varepsilon$ und ein $t_0 \in (0,1)$ mit $t_0\mathbf{x}_0 + (1-t_0)\mathbf{y}_0 \in \partial G_\varepsilon$. Also hat die Funktion $t \mapsto \varrho_\varepsilon \circ \alpha(t)$ mit $\alpha(t) := t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{y}_0$ ein Maximum in t_0. Daher gilt: $(\varrho_\varepsilon \circ \alpha)''(t_0) \leq 0$ und Hess$(\varrho_\varepsilon)(\alpha(t_0), \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \leq 0$. Das ist ein Widerspruch, es muss $S = G_\varepsilon \times G_\varepsilon$ und damit G_ε konvex sein. ∎

Ein Gebiet $G = \{\varrho < 0\}$ heißt *strikt konvex* in $\mathbf{x}_0 \in \partial G$, falls Hess$(\varrho)$ in $\mathbf{x}_0$ positiv definit ist. Diese Eigenschaft ist unabhängig von ϱ und invariant unter affinen Transformationen.

Jetzt kehren wir zur Levi-Konvexität zurück.

3.11 Hilfssatz. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R})$. Dann ist*

$$\operatorname{Lev}(\varphi)(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{Hess}(\varphi)(\mathbf{z},\mathbf{w}) + \operatorname{Hess}(\varphi)(\mathbf{z},\mathrm{i}\,\mathbf{w})\right).$$

BEWEIS: Dies ist eine einfache Rechnung! ∎

3.12 Theorem. *Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *G ist strikt Levi-konvex.*
2. *Es gibt eine offene Umgebung $U = U(\partial G)$ und eine streng plurisubharmonische Funktion $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$, so daß $U \cap G = \{\mathbf{z} \in U \,:\, \varrho(\mathbf{z}) < 0\}$ und $(d\varrho)_\mathbf{z} \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$ gilt.*
3. *Zu jedem $\mathbf{z} \in \partial G$ gibt es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{z}) \subset \mathbb{C}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\mathbf{F} : W \to V$, so dass $\mathbf{F}(W \cap G)$ konvex (und sogar strikt konvex) in jedem Punkt von $\mathbf{F}(W \cap \partial G)$ ist.*

BEWEIS:

$(1) \Longrightarrow (2)$: Wir wählen eine globale definierende Funktion ϱ für G und eine offene Umgebung $U = U(\partial G)$, so dass ϱ auf U definiert und $(d\varrho)_\mathbf{z} \neq 0$ für $\mathbf{z} \in U$ ist. Sei $A > 0$ eine reelle Konstante und $\varrho_A := e^{A\varrho} - 1$. Dann ist ϱ_A auch eine globale definierende Funktion und

$$\operatorname{Lev}(\varrho_A)(\mathbf{z},\mathbf{w}) = Ae^{A\varrho(\mathbf{z})}\left[\operatorname{Lev}(\varrho)(\mathbf{z},\mathbf{w}) + A|(\partial\varrho)_\mathbf{z}(\mathbf{w})|^2\right].$$

Die Menge $K := \partial G \times S^{2n-1}$ ist kompakt und

$$K_0 := \{(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in K \,:\, \operatorname{Lev}(\varrho)(\mathbf{z},\mathbf{w}) \leq 0\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge. Da $\operatorname{Lev}(\varrho)$ positiv definit auf $H_\mathbf{z}(\partial G)$ ist, ist $(\partial\varrho)_\mathbf{z}(\mathbf{w}) \neq 0$ für $(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in K_0$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} M &:= \min_K \operatorname{Lev}(\varrho)(\mathbf{z},\mathbf{w}) > -\infty, \\ C &:= \min_{K_0} |(\partial\varrho)_\mathbf{z}(\mathbf{w})|^2 > 0. \end{aligned}$$

Wir wählen A so groß, dass $A \cdot C + M > 0$ ist. Dann folgt:

$$\operatorname{Lev}(\varrho_A)(\mathbf{z},\mathbf{w}) = A \cdot [\operatorname{Lev}(\varrho)(\mathbf{z},\mathbf{w}) + A|(\partial\varrho)_\mathbf{z}(\mathbf{w})|^2] \geq A \cdot (M + AC) > 0$$

für $(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in K_0$, und

$$\mathrm{Lev}(\varrho_A)(\mathbf{z},\mathbf{w}) > A^2 \cdot |(\partial\varrho)_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})|^2 \ge 0$$

für $(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in K \setminus K_0$.

Also ist $\mathrm{Lev}(\varrho_A)(\mathbf{z},\mathbf{w}) > 0$ für jedes $\mathbf{z} \in \partial G$ und jedes $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Aus Stetigkeitsgründen ist ϱ_A dann sogar in einer Umgebung von ∂G strikt plurisubharmonisch.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Wir betrachten einen Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ und machen einige einfache Koordinatentransformationen:

Durch die Translation $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ ersetzen wir $\mathbf{z}_0$ durch den Ursprung, und eine Permutation der Koordinaten sichert, dass $\varrho_{w_1}(\mathbf{0}) \ne 0$ ist.

Die lineare Transformation

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{u} = \big(\varrho_{w_1}(\mathbf{0})w_1 + \cdots + \varrho_{w_n}(\mathbf{0})w_n, w_2, \ldots, w_n\big)$$

ergibt $u_1 = \mathbf{w} \cdot \nabla\varrho(\mathbf{0})^{\,t}$ und deshalb

$$\begin{aligned}
\varrho(\mathbf{u}) &= 2\,\mathrm{Re}\,\big(\mathbf{u} \cdot \nabla(\varrho \circ \mathbf{w})(\mathbf{0})^{\,t}\big) + \text{ Terme vom Grad } \ge 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\,\big(\mathbf{u} \cdot J_{\mathbf{w}}(\mathbf{0})^{\,t} \cdot \nabla\varrho(\mathbf{0})^{\,t}\big) + \text{ Terme vom Grad } \ge 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\,\big(\mathbf{w} \cdot \nabla\varrho(\mathbf{0})^{\,t}\big) + \text{ Terme vom Grad } \ge 2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}(u_1) + \text{ Terme vom Grad } \ge 2.
\end{aligned}$$

Schließlich schreiben wir $\varrho(\mathbf{u}) = 2\,\mathrm{Re}(u_1 + Q(\mathbf{u})) + \mathrm{Lev}(\varrho)(\mathbf{0},\mathbf{u}) + \cdots$, wobei Q ein quadratisches holomorphes Polynom ist, und machen die biholomorphe Transformation

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} = (u_1 + Q(\mathbf{u}), u_2, \ldots, u_n).$$

Dann folgt:

$$\varrho(\mathbf{v}) = 2\,\mathrm{Re}(v_1) + \mathrm{Lev}(\varrho)(\mathbf{0},\mathbf{v}) + \text{ Terme vom Grad } \ge 3.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Taylor-Entwicklung ist

$$\varrho(\mathbf{v}) = D\varrho(\mathbf{0})(\mathbf{v}) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(\varrho)(\mathbf{0},\mathbf{v}) + \text{ Terme der Ordnung } \ge 3\,,$$

und deshalb $\mathrm{Hess}(\varrho)(\mathbf{0},\mathbf{v}) = 2 \cdot \mathrm{Lev}(\varrho)(\mathbf{0},\mathbf{v}) > 0$ für $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$ (in neuen Koordinaten). Das funktioniert alles in einer Umgebung, die konvex gewählt werden kann.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Dies folgt aus dem obigen Lemma:

$$\mathrm{Hess}(\varrho) > 0 \text{ auf } T_{\mathbf{z}}(\partial G) \implies \mathrm{Lev}(\varrho) > 0 \text{ auf } H_{\mathbf{z}}(\partial G).$$

Die letztere Eigenschaft ist invariant unter biholomorphen Transformationen. ∎

Ist $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und strikt Levi-konvex, so ist leicht zu sehen, dass G pseudokonvex ist. Wir wollen beweisen, dass die schwache Levi-Konvexität sogar äquivalent zur Pseudokonvexität ist. Zu diesem Zweck erweitern wir die Randdistanz zu einer Funktion auf dem $\mathbb{C}^n$.

$$d_G(\mathbf{z}) := \begin{cases} \delta_G(\mathbf{z}) & \text{für } \mathbf{z} \in G, \\ 0 & \text{für } \mathbf{z} \in \partial G, \\ -\delta_{\mathbb{C}^n \setminus \overline{G}}(\mathbf{z}) & \text{für } \mathbf{z} \notin \overline{G}. \end{cases}$$

3.13 Hilfssatz. *$-d_G$ ist ein glatte definierende Funktion für G.*

Beweis: Wir benutzen reelle Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ mit $N = 2n$. Es ist klar, dass $G = \{\mathbf{x} : -d_G(\mathbf{x}) < 0\}$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ ein beliebiger Punkt und $\varrho : U(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ eine lokale definierende Funktion. Wir können annehmen, dass $\varrho_{x_N}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ist. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Produkt-Umgebung $U' \times U''$ von $\mathbf{x}_0$ in U und eine glatte Funktion $h : U' \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\{(\mathbf{x}', x_N) \in U' \times U'' : \varrho(\mathbf{x}', x_N) = 0\} = \{(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) : \mathbf{x}' \in U'\}.$$

Es folgt, dass $\mathbf{0} = \nabla_{\mathbf{x}'}\varrho(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) + \varrho_{x_N}(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \cdot \nabla h(\mathbf{x}')$ ist.

Im Punkt $(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \in \partial G$ steht der Gradient $\nabla\varrho(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}'))$ auf ∂G senkrecht und ist nach außen gerichtet. Wir benutzen jetzt das Vektorfeld $\eta := \dfrac{\nabla\varrho}{\|\nabla\varrho\|}$. Dann ist $\eta = (\eta', \eta_N)$, mit

$$\eta' := \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}\varrho}{\|\nabla\varrho\|} \text{ und } \eta_N := \frac{\varrho_{x_N}}{\|\nabla\varrho\|},$$

und es folgt: $\eta'(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) = -\,\eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \cdot \nabla h(\mathbf{x}')$.

Jeder Punkt $\mathbf{y}$ in einer genügend kleinen Umgebung des Randes besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t \cdot \eta(\mathbf{x})$, wobei $t = -d_G(\mathbf{y})$ und $\mathbf{x}$ der Punkt ist, wo das Lot von $\mathbf{y}$ auf ∂G den Rand trifft. Wir definieren nun die glatte Abbildung $\mathbf{F} : U' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ durch

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}', t) := (\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) + t \cdot \eta(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')).$$

Dann gibt es glatte Funktionen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$, so dass gilt:

$$J_{\mathbb{R},\mathbf{F}}(\mathbf{x}', t) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{N-1} + t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}') & \eta'(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}'))^{\,t} \\ \nabla h(\mathbf{x}') + t \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}') & \eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \end{pmatrix},$$

und daher

$$\begin{aligned} \det J_{\mathbb{R},\mathbf{F}}(\mathbf{x}', 0) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{N-1} & -\eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \cdot \nabla h(\mathbf{x}')^{\,t} \\ \nabla h(\mathbf{x}') & \eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \end{pmatrix} \\ &= \eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{N-1} & -\nabla h(\mathbf{x}')^{\,t} \\ \nabla h(\mathbf{x}') & 1 \end{pmatrix} \\ &= \eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{N-1} & -\nabla h(\mathbf{x}')^{\,t} \\ \mathbf{0}' & 1 + \|\nabla h(\mathbf{x}')\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \eta_N(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}'))(1 + \|\nabla h(\mathbf{x}')\|^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\mathbf{F}$ die Menge $U' \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ diffeomorph auf eine Umgebung $W = W(\mathbf{x}_0)$ abbildet und $U' \times \{0\}$ auf $\partial G \cap W$. Da $d_G(\mathbf{x} + t \cdot \eta(\mathbf{x})) = -t$ für $|t| < \varepsilon$ und genügend kleines ε gilt, folgt außerdem, dass $d_G = (-t) \circ \mathbf{F}^{-1}$ nahe ∂G eine glatte Funktion ist. Ist $\mathbf{p}'$ durch $\mathbf{p}'(\mathbf{x}', t) := (\mathbf{x}', 0)$ definiert, so ist die Projektion

$$\mathbf{p} = \mathbf{F} \circ \mathbf{p}' \circ \mathbf{F}^{-1} : \mathbf{x} + t \cdot \eta(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}, \text{ für } \mathbf{x} \in \partial G,$$

eine glatte Abbildung, und d_G ist durch $d_G(\mathbf{y}) = \sigma \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})\|$ gegeben, wobei $\sigma = 1$ für $\mathbf{y} \in G$ ist, und sonst überall $\sigma = -1$.

Für $\mathbf{y} \notin \partial G$ ist

$$\begin{aligned}(d_G)_{y_\nu}(\mathbf{y}) &= \frac{\sigma}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})\|} \cdot \sum_{k=1}^{N} (y_k - p_k(\mathbf{y}))(\delta_{k\nu} - (p_k)_{y_\nu}(\mathbf{y})) \\ &= \frac{\sigma}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})\|} \cdot \left[y_\nu - p_\nu(\mathbf{y}) - (\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{p}_{y_\nu}(\mathbf{y}))_N \right],\end{aligned}$$

und daher

$$\nabla d_G(\mathbf{y}) = \frac{\sigma}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})\|} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y}) - D\mathbf{p}(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y}))].$$

Aus der Beziehung $\varrho(\mathbf{p}(\mathbf{y})) \equiv 0$ folgt die Gleichung $D\mathbf{p}(\mathbf{y})(\nabla\varrho(\mathbf{p}(\mathbf{y}))) = 0$. Aber $\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})$ ist ein Vielfaches von $\nabla\varrho(\mathbf{p}(\mathbf{y}))$. Damit ergibt sich

$$\nabla d_G(\mathbf{y}) = \sigma \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}(\mathbf{y})\|} = \pm \frac{\nabla\varrho(\mathbf{p}(\mathbf{y}))}{\|\nabla\varrho(\mathbf{p}(\mathbf{y}))\|}.$$

Nähert sich $\mathbf{y}$ dem Rand ∂G, so erhält man $\nabla d_G(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$. ■

E.E. Levi zeigte, dass jedes Holomorphiegebiet mit glattem Rand Levi-konvex ist, und dass der Rand eines strikt Levi-konvexen Gebietes G lokal die „natürliche Grenze“ für eine holomorphe Funktion in G ist. Hier beweisen wir das folgende Resultat, das manchmal als „Satz von Levi“ bezeichnet wird.

3.14 Theorem. *Ein Gebiet G mit glattem Rand ist genau dann pseudokonvex, wenn es Levi-konvex ist.*

Beweis:

(1) Sei G pseudokonvex. Die Funktion $-d_G$ ist eine glatte Randfunktion für G, und $-\log d_G = -\log \delta_G$ ist plurisubharmonisch auf G, wegen der Pseudokonvexität. Wir berechnen

$$\mathrm{Lev}(-\log d_G)(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \frac{1}{d_G(\mathbf{z})} \cdot \mathrm{Lev}(-d_G)(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + \frac{1}{d_G(\mathbf{z})^2} \cdot |(\partial(d_G))_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})|^2.$$

Dieser Ausdruck ist auf G nicht-negativ. Ist $\mathbf{z} \in G$, $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{z}}$ und $(\partial(d_G))_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}) = 0$, so folgt, dass $\mathrm{Lev}(-d_G)(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \geq 0$ ist. Das bleibt auch für $\mathbf{z} \to \partial G$ richtig, also erfüllt $-d_G$ die Levi-Bedingung.

(2) Sei G Levi-konvex. Wir nehmen an, dass G nicht pseudokonvex ist. Dann gibt es in jeder Umgebung U des Randes einen Punkt $\mathbf{z}_0$, wo die Levi-Form von $-\log\delta_G$ einen negativen Eigenwert besitzt. Das bedeutet, dass es einen Vektor $\mathbf{w}_0$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi_{\zeta\overline{\zeta}}(0) = \mathrm{Lev}(\log\delta_G)(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) > 0, \text{ für } \varphi(\zeta) := \log\delta_G(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{w}_0).$$

Wir betrachten die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \varphi(0) + 2\,\mathrm{Re}(\varphi_\zeta(0)\zeta + \frac{1}{2}\varphi_{\zeta\zeta}(0)\zeta^2) + \varphi_{\zeta\overline{\zeta}}(0)|\zeta|^2 + \cdots \\ &= \varphi(0) + \mathrm{Re}(A\zeta + B\zeta^2) + \lambda|\zeta|^2 + \cdots,\end{aligned}$$

mit komplexen Konstanten A, B und einer reellen Konstante $\lambda > 0$.

Wir wählen einen Punkt $\mathbf{p}_0 \in \partial G$ mit $\delta_G(\mathbf{z}_0) = \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}_0\|$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann kann eine analytische Scheibe $\psi : \Delta(0, \varepsilon) \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\psi(\zeta) := \mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{w}_0 + \exp(A\zeta + B\zeta^2)(\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}_0)$$

definiert werden. Es ist $\psi(0) = \mathbf{z}_0 + \exp(0)\cdot(\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}_0) = \mathbf{p}_0$, und wir wollen zeigen, dass $\psi(\zeta) \in G$ ist, für $0 < |\zeta| < \varepsilon$ und beliebig kleines ε.

Da $\varphi(\zeta) \geq \varphi(0) + \mathrm{Re}(A\zeta + B\zeta^2) + (\lambda/2)|\zeta|^2$ nahe $\zeta = 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}\delta_G(\mathbf{z}_0 + \zeta\mathbf{w}_0) &= \exp(\varphi(\zeta)) \\ &\geq \exp(\varphi(0)) \cdot \big|\exp\big(A\zeta + B\zeta^2\big)\big| \cdot \exp\Big(\frac{\lambda}{2}|\zeta|^2\Big) \\ &> \delta_G(\mathbf{z}_0) \cdot \big|\exp\big(A\zeta + B\zeta^2\big)\big| \\ &= \big\|\exp\big(A\zeta + B\zeta^2\big)(\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}_0)\big\|,\end{aligned}$$

für kleines $\zeta \neq 0$. Das bedeutet, dass wir ε so wählen können, dass $\psi(\zeta)$ für $0 < |\zeta| < \varepsilon$ in G liegt. Die analytische Scheibe berührt ∂G von innen.

$f(\zeta) = d_G(\psi(\zeta))$ ist eine glatte Funktion mit einem isolierten lokalen Minimum bei $\zeta = 0$ und $f(0) = 0$. Deshalb ist $(\partial f)_0(1) = 0$ und

$$f(\zeta) = \mathrm{Re}\big(f_{\zeta\zeta}(0)\zeta^2\big) + f_{\zeta\overline{\zeta}}(0)|\zeta|^2 + \text{Terme der Ordnung } \geq 3.$$

Außerdem ist $\mathrm{Hess}(f)(0, v) \geq 0$ für alle v und > 0 für mindestens ein v. Für jedes t ist daher $\mathrm{Re}\big(f_{\zeta\zeta}(0)e^{2\mathrm{i}\,t}\big) + f_{\zeta\overline{\zeta}}(0) = \mathrm{Hess}(f)(0, e^{\mathrm{i}\,t}) \geq 0$ (und > 0 für mindestens ein t). Daraus folgt:

$$\mathrm{Lev}(d_G)(\mathbf{p}_0, \psi'(0)) = f_{\zeta\overline{\zeta}}(0) > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Levi-Bedingung in $\mathbf{p}_0$, weil $-d_G$ eine definierende Funktion für G ist. ∎

§ 4 Holomorphie-Konvexität

Wir wollen einige Beziehungen zwischen Pseudokonvexität und affiner Konvexität untersuchen. Zunächst stellen wir einige Eigenschaften konvexer Gebiete im $\mathbb{R}^N$ zusammen.

Sei $\mathcal{L}$ die Menge der affin-linearen Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N + b, \quad a_1, \ldots, a_N, b \in \mathbb{R}.$$

Ist M eine konvexe Menge und $\mathbf{x}_0$ ein Punkt, der nicht in M enthalten ist, so gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}$ mit $f(\mathbf{x}_0) = 0$ und $f|_M < 0$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) < c\}$ ein konvexer Halbraum.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine beliebige Teilmenge. Dann nennt man die Menge

$$H(M) := \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) \le \sup_M f, \text{ für alle } f \in \mathcal{L}\Big\}$$

die *affin-konvexe Hülle* von M.

4.1 Satz. *Seien $M, M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^N$ beliebige Teilmengen. Dann gilt:*

1. *$M \subset H(M)$.*
2. *$H(M)$ ist abgeschlossen und konvex.*
3. *$H(H(M)) = H(M)$.*
4. *Ist $M_1 \subset M_2$, so ist $H(M_1) \subset H(M_2)$.*
5. *Ist M abgeschlossen und konvex, so ist $H(M) = M$.*
6. *Ist M beschränkt, so ist $H(M)$ ebenfalls beschränkt.*

Beweis: (1) ist trivial.

(2) Ist $\mathbf{x}_0 \notin H(M)$, so gibt es ein $f \in \mathcal{L}$ mit $f(\mathbf{x}_0) > \sup_M f$. Weil f stetig ist, ist $f(\mathbf{x}) > \sup_M f$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}_0$. Deshalb ist $H(M)$ abgeschlossen.

Als Durchschnitt von konvexen Halbräumen ist $H(M)$ ebenfalls konvex.

(3) folgt aus (5).

(4) ist trivial.

(5) Sei M abgeschlossen und konvex. Ist $\mathbf{x}_0 \notin M$, so gibt es einen Punkt $\mathbf{y}_0 \in M$, so dass $\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, M) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ist. Sei $\mathbf{z}_0$ ein Punkt auf der offenen Strecke von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{y}_0$. Dann ist $\mathbf{z}_0 \notin M$, und es gibt eine Funktion $f \in \mathcal{L}$ mit $f(\mathbf{z}_0) = 0$ und $f|_M < 0$. Da $t \mapsto f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{y}_0)$ eine monotone Funktion ist, ist $f(\mathbf{x}_0) > 0$ und deshalb $\mathbf{x}_0 \notin H(M)$.

(6) Ist M beschränkt, so gibt es ein $R > 0$, so dass M in der abgeschlossenen konvexen Menge $\overline{B_R(\mathbf{0})}$ enthalten ist. Also ist $H(M) \subset \overline{B_R(\mathbf{0})}$. ■

Bemerkung. $H(M)$ ist die kleinste abgeschlossene konvexe Menge, die M enthält.

4.2 Theorem. *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann konvex, wenn mit $K \subset\subset G$ stets auch $H(K) \subset\subset G$ ist.*

BEWEIS: Sei G ein konvexes Gebiet und $K \subset\subset G$ eine Teilmenge. Dann ist $\overline{H(K)}$ abgeschlossen und in der beschränkten Menge $H(\overline{K})$ enthalten. Daher ist $\overline{H(K)}$ kompakt, und man muss nur noch zeigen, daß $H(K) \subset G$ ist. Wenn es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in H(K) \setminus G$ gibt, dann gibt es auch eine Funktion $f \in \mathcal{L}$ mit $f(\mathbf{x}_0) = 0$ und $f|_G < 0$. Es folgt, dass $\sup_{\overline{K}} f < 0$ und $f(\mathbf{x}_0) > \sup_K f$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Relation $\mathbf{x}_0 \in H(K)$.

Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt. Wenn $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ zwei Punkte von G sind, dann ist $K := \{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\}$ eine relativ-kompakte Teilmenge von G. Es folgt, dass $H(K)$ in G enthalten ist. Da $H(K)$ abgeschlossen und konvex ist, muss auch die abgeschlossene Strecke von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{y}_0$ in G enthalten sein. Deshalb ist G konvex. ■

Jetzt ersetzen wir affin-lineare Funktionen durch holomorphe Funktionen.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $K \subset G$ eine Teilmenge. Die Menge

$$\widehat{K} = \widehat{K}_G := \Big\{\mathbf{z} \in G \,:\, |f(\mathbf{z})| \le \sup_K |f|, \text{ für alle } f \in \mathcal{O}(G)\Big\}$$

heißt die *holomorph-konvexe Hülle* von K in G.

4.3 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und sind K, K_1, K_2 Teilmengen von G, so gilt:*

1. *$K \subset \widehat{K}$.*
2. *$\widehat{K}$ ist abgeschlossen in G.*
3. *$\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.*
4. *Ist $K_1 \subset K_2$, so ist $\widehat{K_1} \subset \widehat{K_2}$.*
5. *Ist K beschränkt, so ist auch $\widehat{K}$ beschränkt.*

BEWEIS: (1) ist trivial.

(2) Sei $\mathbf{z}_0$ ein Punkt von $G \setminus \widehat{K}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf G mit $|f(\mathbf{z}_0)| > \sup_K |f|$. Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Ungleichung auf einer ganzen Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$. Also ist $G \setminus \widehat{K}$ offen.

(3) $\sup_{\widehat{K}}|f| \le \sup_K|f|$.

(4) ist trivial.

(5) Ist K beschränkt, so ist K in einem abgeschlossenen Polyzylinder $\overline{\mathsf{P}^n(\mathbf{0},r)}$ enthalten. Die Koordinatenfunktionen z_ν sind auf G holomorph. Für $\mathbf{z} \in \widehat{K}$ ist $|z_\nu| \le \sup_K|z_\nu| \le r$. Also ist auch $\widehat{K}$ beschränkt. ∎

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ wird *holomorph-konvex* genannt, wenn mit $K \subset\subset G$ auch $\widehat{K} \subset\subset G$ ist.

Beispiel.

In $\mathbb{C}$ ist jedes Gebiet holomorph-konvex:

Sei $K \subset\subset G$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist $\widehat{K}$ beschränkt, und es bleibt zu zeigen, dass der Abschluss von $\widehat{K}$ in G enthalten ist. Gibt es einen Punkt $z_0 \in \overline{\widehat{K}} \setminus G$, so liegt z_0 in $\partial\widehat{K} \cap \partial G$. Wir betrachten die holomorphe Funktion $f(z) := 1/(z - z_0)$ in G. Ist (z_ν) eine Folge in $\widehat{K}$, die gegen z_0 konvergiert, so ist $|f(z_\nu)| \le \sup_K|f| \le \sup_{\overline{K}}|f| < \infty$. Das ist ein Widerspruch!

Im Falle $n \ge 2$ werden wir zeigen, dass es Gebiete gibt, die nicht holomorph-konvex sind. Allerdings gilt:

4.4 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein affin-konvexes Gebiet, so ist G holomorph-konvex.*

Beweis: Sei K relativ-kompakt in G. Dann ist $H(K) \subset\subset G$. Ist $\mathbf{z}_0$ ein Punkt in $G \setminus H(K)$, so gibt es eine affin-lineare Funktion $\lambda \in \mathcal{L}$ mit $\lambda(\mathbf{z}_0) > \sup_K \lambda$. Indem wir λ durch $\lambda - \lambda(\mathbf{0})$ ersetzen, können wir annehmen, dass λ eine homogen-lineare Funktion der Form

$$\lambda(\mathbf{z}) = 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n).$$

Dann ist $f(\mathbf{z}) := \exp(2\cdot(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n))$ holomorph auf G und $|f(\mathbf{z})| = \exp(\lambda(\mathbf{z}))$. Deshalb ist $|f(\mathbf{z}_0)| > \sup_K|f|$ und $\mathbf{z}_0 \in G \setminus \widehat{K}$. Dies zeigt, dass $\widehat{K} \subset\subset G$ ist. ∎

Im allgemeinen ist Holomorphie-Konvexität eine viel schwächere Eigenschaft als die affine Konvexität.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\varepsilon > 0$ eine kleine reelle Zahl. Wir definieren

$$G_\varepsilon := \{\mathbf{z} \in G \,:\, \delta_G(\mathbf{z}) \ge \varepsilon\}.$$

Hier sind einige Eigenschaften der Menge G_ε:

1. Ist $\mathbf{z} \in G$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\delta_G(\mathbf{z}) \ge \varepsilon$ ist.
   Deshalb ist $G = \bigcup_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$.

2. Ist $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, so ist $G_{\varepsilon_1} \supset G_{\varepsilon_2}$.

3. G_ε ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$: Ist nämlich $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$, so ist entweder $\mathbf{z}_0 \in G$ und $\delta_G(\mathbf{z}_0) < \varepsilon$, oder $\mathbf{z}_0 \notin G$. Im letzteren Falle ist die Kugel $\mathsf{B}_\varepsilon(\mathbf{z}_0)$ in $\mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$ enthalten. Ist $\mathbf{z}_0 \in G \setminus G_\varepsilon$ und $\delta := \delta_G(\mathbf{z}_0)$, so ist $\delta < \varepsilon$ und $\mathsf{B}_{\varepsilon-\delta}(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$. Also ist $\mathbb{C}^n \setminus G_\varepsilon$ offen.

4.5 Hilfssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $K \subset G$ kompakt und f eine holomorphe Funktion auf G. Ist $K \subset G_\varepsilon$, so gibt es zu jedem δ mit $0 < \delta < \varepsilon$ eine Konstante $C > 0$, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist:*

$$\sup_K |D^\alpha f(\mathbf{z})| \le \frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}} \cdot C.$$

Beweis: Für $0 < \delta < \varepsilon$ ist $G' := \{\mathbf{z} \in G : \operatorname{dist}(K, \mathbf{z}) < \delta\}$ offen und relativ-kompakt in G, und für jedes $\mathbf{z} \in K$ ist der abgeschlossene Polyzylinder $\overline{\mathsf{P}^n(\mathbf{z}, \delta)}$ in $\overline{G'} \subset G$ enthalten. Ist T der ausgezeichnete Rand des Polyzylinders und $|f| \le C$ auf $\overline{G'}$, so folgt aus den Cauchy-Ungleichungen:

$$|D^\alpha f(\mathbf{z})| \le \frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}} \cdot \sup_T |f| \le \frac{\alpha!}{\delta^{|\alpha|}} \cdot C.$$

■

4.6 Satz von Cartan–Thullen. *Ist G ein schwaches Holomorphiegebiet, so ist G holomorph-konvex.*

Beweis: Sei $K \subset\subset G$. Wir wollen zeigen, dass $\widehat{K} \subset\subset G$ ist. Sei $\varepsilon := \operatorname{dist}(K, \mathbb{C}^n \setminus G) \ge \operatorname{dist}(\overline{K}, \mathbb{C}^n \setminus G) > 0$. Offensichtlich liegt K in G_ε.

Wir behaupten, dass die holomorph-konvexe Hülle $\widehat{K}$ sogar in G_ε liegt. Angenommen, das wäre nicht so. Dann gäbe es ein $\mathbf{z}_0 \in \widehat{K} \setminus G_\varepsilon$. Sei $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \varepsilon)$ und Q die Zusammenhangskomponente von $\mathbf{z}_0$ in $P \cap G$. Da P sowohl G als auch $\mathbb{C}^n \setminus G$ trifft, folgt aus dem Lemma über Randkomponenten, dass es einen Punkt $\mathbf{z}_1 \in P \cap \partial Q \cap \partial G$ gibt.

Sei nun f eine holomorphe Funktion auf G. In einer Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ hat f eine Taylor-Entwicklung

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \ge 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu, \text{ mit } a_\nu = \frac{1}{\nu!} D^\nu f(\mathbf{z}_0).$$

Die Funktion $\mathbf{z} \mapsto a_\nu(\mathbf{z}) := \frac{1}{\nu!} D^\nu f(\mathbf{z})$ ist holomorph auf G. Deshalb ist $|a_\nu(\mathbf{z}_0)| \le \sup_K |a_\nu(\mathbf{z})|$. Nach dem Lemma gibt es zu jedem δ mit $0 < \delta < \varepsilon$ ein $C > 0$, so dass $\sup_K |a_\nu(\mathbf{z})| \le C/\delta^{|\nu|}$ ist. Dann gilt:

$$|a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu| \le C \cdot \left(\frac{|z_1 - z_1^{(0)}|}{\delta} \right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{|z_n - z_n^{(0)}|}{\delta} \right)^{\nu_n}.$$

Auf jedem Polyzylinder $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \delta)$ wird die Taylorreihe durch eine geometrische Reihe majorisiert. Also konvergiert sie auf P gegen eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$. Es ist $f = \widehat{f}$ nahe $\mathbf{z}_0$ und dann auch auf Q. Weil $\mathbf{z}_1$ in $P \cap \partial Q \cap \partial G$ liegt, kann f in $\mathbf{z}_1$ nicht vollständig singulär sein. Das ist ein Widerspruch, weil f eine beliebige holomorphe Funktion in G und G ein schwaches Holomorphiegebiet ist. ∎

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Ist G holomorph-konvex, so wollen wir eine holomorphe Funktion auf G konstruieren, die in jedem Randpunkt voll singulär wird. Dazu benutzen wir „normale Ausschöpfungen“.

Definition. Eine *normale Ausschöpfung* von G ist eine Folge (K_ν) von kompakten Teilmengen von G so dass gilt:

1. $K_\nu \subset\subset (\overset{\circ}{K}_{\nu+1})$, für jedes ν.
2. $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = G$.

4.7 Theorem. *Jedes Gebiet G im $\mathbb{C}^n$ besitzt eine normale Ausschöpfung. Ist G holomorph-konvex, so gibt es eine normale Ausschöpfung (K_ν) mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$ für alle ν.*

Beweis: Im allgemeinen ergibt $K_\nu := \overline{\mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \nu)} \cap G_{1/\nu}$ eine normale Ausschöpfung. Ist G sogar holomorph-konvex, so ist $\widehat{K}_\nu \subset\subset G$ für alle ν. Induktiv konstruieren wir eine neue Ausschöpfung.

Sei $K_1^* := \widehat{K}_1$. Sind die kompakten Mengen $K_1^*, \ldots, K_{\nu-1}^*$ schon konstruiert, mit $\widehat{K}_j^* = K_j^*$ für $j = 1, \ldots, \nu - 1$, und $K_j^* \subset\subset (\overset{\circ}{K}{}_{j+1}^*)$, so gibt es ein $\lambda(\nu) \in \mathbb{N}$, so daß $K_{\nu-1}^* \subset (\overset{\circ}{K}_{\lambda(\nu)})$ ist. Sei $K_\nu^* := \widehat{K}_{\lambda(\nu)}$.

Offensichtlich ist (K_ν^*) eine normale Ausschöpfung mit $\widehat{K}_\nu^* = K_\nu^*$. ∎

4.8 Theorem. *Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$, $\lambda(\mu)$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und $(\mathbf{z}_\mu)$ eine Folge von Punkten mit $\mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$.*

Dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf G, so dass $|f(\mathbf{z}_\mu)|$ unbeschränkt ist.

Beweis: Die Funktion f wird als Grenzfunktion einer unendlichen Reihe $f = \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\mu$ konstruiert. Induktiv definieren wir holomorphe Funktionen f_μ auf G, so daß gilt:

1. $|f_\mu|_{K_{\lambda(\mu)}} < 2^{-\mu}$ für $\mu \geq 1$.
2. $|f_\mu(\mathbf{z}_\mu)| > \mu + 1 + \sum_{j=1}^{\mu-1} |f_j(\mathbf{z}_\mu)|$ für $\mu \geq 2$.

Sei $f_1 := 0$. Dann nehmen wir für $\mu \geq 2$ an, dass $f_1, \ldots, f_{\mu-1}$ schon konstruiert worden sind. Da $\mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$ und $\widehat{K}_{\lambda(\mu)} = K_{\lambda(\mu)}$ ist, gibt es eine holomorphe Funktion g auf G, so dass $|g(\mathbf{z}_\mu)| > q := \sup_{K_{\lambda(\mu)}}|g|$ ist. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Konstante (z.B. mit $\varrho := 2/(q + |g(\mathbf{z}_\mu)|)$) können wir erreichen:

$$|g(\mathbf{z}_\mu)| > 1 > q.$$

Setzen wir $f_\mu := g^k$, mit einem genügend großen k, so hat f_μ die Eigenschaften (1) und (2).

Wir behaupten, dass $\sum_\mu f_\mu$ auf G kompakt konvergiert. Für den Beweis halten wir erst einmal fest, daß es zu einer beliebigen kompakten Teilmenge $K \subset G$ immer ein $\mu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $K \subset K_{\lambda(\mu_0)}$ ist. Nach Konstruktion gilt $\sup_K|f_\mu| < 2^{-\mu}$ für $\mu \geq \mu_0$. Da die geometrische Reihe $\sum_\mu 2^{-\mu}$ auf K eine Majorante der Reihe $\sum_\mu f_\mu$ ist, konvergiert die Reihe der f_μ normal auf K. Also ist $f = \sum_\mu f_\mu$ auf G holomorph. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{z}_\mu)| &\geq |f_\mu(\mathbf{z}_\mu)| - \sum_{\nu \neq \mu} |f_\nu(\mathbf{z}_\mu)| \\ &> \mu + 1 - \sum_{\nu > \mu} |f_\nu(\mathbf{z}_\mu)| \\ &> \mu + 1 - \sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu} \qquad (\text{denn } \mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\nu)} \text{ für } \nu > \mu) \\ &\geq \mu \qquad (\text{denn } \sum_{\nu \geq 1} 2^{-\nu} = 1). \end{aligned}$$

Daraus folgt: $|f(\mathbf{z}_\mu)| \to \infty$ für $\mu \to \infty$. ∎

Als wichtige Konsequenz ergibt sich:

4.9 Theorem. *Ein Gebiet G ist genau dann holomorph-konvex, wenn es zu jeder unendlichen und in G diskreten Menge D eine holomorphe Funktion f auf G gibt, so dass $|f|$ auf D unbeschränkt ist.*

Beweis: (1) Sei G holomorph-konvex, $D \subset G$ unendlich und diskret. Außerdem sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$. Dann ist $K_\nu \cap D$ endlich (oder leer) für jedes $\nu \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Punkten $\mathbf{z}_\mu \in D$.

Sei $\mathbf{z}_1 \in D \setminus K_1$ beliebig und $\lambda(1) \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{z}_1$ in $K_{\lambda(1)+1}$ liegt. Es seien schon Punkte $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\mu-1}$ und Zahlen $\lambda(1), \ldots, \lambda(\mu-1)$ konstruiert, so dass gilt:

$$\mathbf{z}_\nu \in K_{\lambda(\nu)+1} \setminus K_{\lambda(\nu)}, \text{ for } \nu = 1, \ldots, \mu - 1.$$

Dann wählen wir $\mathbf{z}_\mu \in D \setminus K_{\lambda(\mu-1)+1}$ und $\lambda(\mu)$ minimal, so dass $\mathbf{z}_\mu$ in $K_{\lambda(\mu)+1}$ liegt. Nach dem obigen Satz gibt es eine holomorphe Funktion f auf G, so dass $|f(\mathbf{z}_\mu)| \to \infty$ für $\mu \to \infty$ gilt. Deshalb ist $|f|$ auf D unbeschränkt.

(2) Sei nun umgekehrt das Kriterium erfüllt und $K \subset\subset G$. Dann ist $\widehat{K} \subset G$, und wir müssen noch zeigen, dass $\widehat{K}$ kompakt ist. Sei $(\mathbf{z}_\nu)$ eine beliebige Folge von Punkten aus $\widehat{K}$. Dann gilt:

$$\sup\{|f(\mathbf{z}_\nu)| \,:\, \nu \in \mathbb{N}\} \le \sup_K |f| < \infty, \text{ für alle } f \in \mathcal{O}(G).$$

Deshalb kann $\{\mathbf{z}_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}\}$ nicht diskret in G sein, die Folge $(\mathbf{z}_\nu)$ muss einen Häufungspunkt $\mathbf{z}_0$ in G besitzen. Da $\widehat{K}$ abgeschlossen in G ist, gehört $\mathbf{z}_0$ zu $\widehat{K}$. Also ist G holomorph-konvex. ∎

Wir wollen nun darangehen zu zeigen, dass jedes holomorph-konvexe Gebiet ein Holomorphiegebiet ist. Dafür konstruieren wir für ein beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ eine Folge, die sich gegen jeden Randpunkt des Gebietes häuft.

4.10 Theorem. *Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $\lambda(\mu)$ von natürlichen Zahlen und eine Folge von Punkten $(\mathbf{z}_\mu) \in G$, so dass gilt:*

1. $\mathbf{z}_\mu \in K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$, *für alle* μ.
2. *Ist $\mathbf{z}_0$ ein Randpunkt von G und $U = U(\mathbf{z}_0)$ eine offene zusammenhängende Umgebung, so enthält jede Zusammenhangskomponente von $U \cap G$ unendlich viele Punkte der Folge $(\mathbf{z}_\mu)$.*

Beweis: Dies ist ein rein topologisches Resultat, da wir keine Annahme über G machen. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

(1) Sei $\mathcal{B} = \{B_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}\}$ das abzählbare System der Kugeln mit rationalem Mittelpunkt und rationalem Radius, die ∂G treffen. Jeder Durchschnitt $B_\nu \cap G$ hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Auf diese Weise erhalten wir eine abzählbare Familie

$$\mathcal{C} = \{C_\mu \,:\, \exists\, B \in \mathcal{B}, \text{ so dass } C_\mu \text{ eine Zusammenhangskomponente von } B \cap G \text{ ist}\}.$$

(2) Die Folgen $\lambda(\mu)$ und $(\mathbf{z}_\mu)$ werden induktiv konstruiert. Zunächst wird $\mathbf{z}_1 \in C_1 \setminus K_1$ beliebig gewählt. Dann gibt es genau eine Zahl $\lambda(1)$ mit $\mathbf{z}_1 \in K_{\lambda(1)+1} \setminus K_{\lambda(1)}$.

Nun seien $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\mu-1}$ und $\lambda(1), \ldots, \lambda(\mu-1)$ schon konstruiert, so dass gilt:

$$\lambda(j) > \lambda(j-1) \text{ und } \mathbf{z}_j \in C_j \cap (K_{\lambda(j)+1} \setminus K_{\lambda(j)}), \text{ für } j = 1, \ldots, \mu-1.$$

C_μ ist definitionsgemäß eine Zusammenhangskomponente von $B_{\nu(\mu)} \cap G$, für ein geeignetes $\nu(\mu) \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $B_{\nu(\mu)} \cap \partial G \ne \varnothing$, also $B_{\nu(\mu)} \cap G \ne \varnothing$ und $B_{\nu(\mu)} \cap (\mathbb{C}^n \setminus G) \ne \varnothing$. Aus dem Lemma über Randkomponenten folgt nun, dass ein $\mathbf{w} \in B_{\nu(\mu)} \cap \partial C_\mu \cap \partial G$ existiert.

Wegen $K_{\lambda(\mu-1)+1} \subset\subset G$ und $\mathbf{w} \in \partial G$ ist $\mathbb{C}^n \setminus K_{\lambda(\mu-1)+1}$ eine offene Umgebung von $\mathbf{w}$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\mathbf{z}_\mu \in C_\mu \cap (\mathbb{C}^n \setminus K_{\lambda(\mu-1)+1})$ und $\lambda(\mu) > \lambda(\mu-1)$ minimal, so dass $\mathbf{z}_\mu \in C_\mu \cap (K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)})$ ist.

(3) Nun zeigen wir, dass die Bedingung (2) des Satzes erfüllt ist. Sei $\mathbf{z}_0$ ein Punkt von ∂G, $U = U(\mathbf{z}_0)$ eine offene zusammenhängende Umgebung und Q eine Zusammenhangskomponente von $U \cap G$. Wir nehmen an, dass nur endlich viele $\mathbf{z}_\mu$ in Q liegen, etwa $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$. Dann sind

$$U^* := U \setminus \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\} \quad \text{und} \quad Q^* := Q \setminus \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$$

offene zusammenhängende Mengen, die kein $\mathbf{z}_\mu$ enthalten. Offensichtlich ist Q^* eine Zusammenhangskomponente von $G \cap U^*$.

Weil $G \cap U^* \neq \varnothing$ und $(\mathbb{C}^n \setminus G) \cap U^* \neq \varnothing$ ist, gibt es einen Punkt $\mathbf{w}_0$ in $U^* \cap \partial Q^* \cap \partial G$ und eine Kugel $B_\nu \subset U^*$ mit $B_\nu \in \mathcal{B}$ und $\mathbf{w}_0 \in B_\nu$. Dann ist $B_\nu \cap G \subset U^* \cap G$. Außerdem muss $B_\nu \cap G$ einen Punkt $\mathbf{w}_1 \in Q^*$ enthalten. Die Zusammenhangskomponente C^* von $\mathbf{w}_1$ in $B_\nu \cap G$ ist eine Teilmenge der Zusammenhangskomponente von $\mathbf{w}_1$ in $U^* \cap G$. Aber C^* ist ein Element C_{μ_0} von $\mathcal{C}$. Nach Konstruktion enthält es den Punkt $\mathbf{z}_{\mu_0}$. Das ist ein Widerspruch. Also liegen unendlich viele Glieder der Folge in Q. ∎

4.11 Theorem. *Ist G holomorph-konvex, so ist G ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$. Wir wählen Folgen $\lambda(\mu) \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{z}_\mu \in G$, so dass die $\mathbf{z}_\mu$ in $K_{\lambda(\mu)+1} \setminus K_{\lambda(\mu)}$ liegen. Wir können annehmen, dass es für jeden Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$, jede offene zusammenhängende Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und jede Zusammenhangskomponente Q von $U \cap G$ unendlich viele $\mathbf{z}_\mu$ in Q gibt.

Sei nun f auf G holomorph und auf $D := \{\mathbf{z}_\mu : \mu \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt. Es ist klar, dass f in jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ voll singulär wird. ∎

Bemerkung. Es ist nicht erforderlich, dass eine vollständig singuläre holomorphe Funktion unbeschränkt ist. 1978 zeigte D. Catlin in seiner Dissertation, dass es zu jedem holomorph-konvexen Gebiet $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit glattem Rand eine holomorphe Funktion auf G gibt, die auf einer Umgebung von $\overline{G}$ beliebig oft differenzierbar (und damit auf G beschränkt) und in jedem Punkt des Randes von G voll singulär wird.

4.12 Satz. *Jedes Gebiet in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: Wir haben schon gesehen, dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ holomorph-konvex ist. Deshalb ist solch ein Gebiet auch ein Holomorphiegebiet. ∎

4.13 Theorem. *Die folgenden Aussagen über Gebiete $G \in \mathbb{C}^n$ sind äquivalent:*

1. *G ist ein schwaches Holomorphiegebiet.*

2. *G ist holomorph-konvex.*

3. *Zu jeder unendlichen diskreten Teilmenge $D \subset G$ gibt es eine holomorphe Funktion f auf G, so daß $|f|$ auf D unbeschränkt ist.*

4. *G ist ein Holomorphiegebiet.*

Wir haben alle Äquivalenzen in den vergangenen Abschnitten bewiesen. Außerdem wissen wir, daß jedes Holomorphiegebiet pseudokonvex ist. Was fehlt, ist ein Beweis des Levi-Problems: Jedes pseudokonvexe Gebiet ist holomorph-konvex. Dazu fehlen uns bis jetzt aber die Mittel.

Jede affin-konvexe offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist ein Holomorphiegebiet. Das n-fache kartesische Produkt ebener Gebiete ist ein weiteres Beispiel:

4.14 Satz. *Sind $G_1, \ldots, G_n \subset \mathbb{C}$ beliebige Gebiete, so ist $G := G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Holomorphiegebiet.*

BEWEIS: Sei $D = \{\mathbf{z}_\mu = (z_1^\mu, \ldots, z_n^\mu) \, : \, \mu \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche diskrete Teilmenge von G. Dann gibt es ein i, so dass (z_i^μ) keinen Häufungspunkt in G_i hat, und es gibt eine holomorphe Funktion f auf G_i mit $\lim_{\mu\to\infty}\big| f(z_i^\mu) \big| = \infty$. Die Funktion $\widehat{f}$, definiert durch $\widehat{f}(z_1, \ldots, z_n) := f(z_i)$, ist auf G holomorph und auf D unbeschränkt. ∎

Bemerkung. Der gleiche Beweis zeigt, dass jedes kartesische Produkt von Holomorphiegebieten wieder ein Holomorphiegebiet ist.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet. Wir wollen Kriterien dafür angeben, dass G ein Holomorphiegebiet ist. Dazu definieren wir eine Abbildung log vom absoluten Raum $\mathcal{V}$ in den $\mathbb{R}^n$ durch

$$\log(r_1, \ldots, r_n) := (\log r_1, \ldots, \log r_n).$$

Definition. Ein Reinhardtsches Gebiet G heißt *logarithmisch konvex*, falls $\log \tau(G \cap (\mathbb{C}^*)^n)$ ein affin-konvexes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung. Ist $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in G$, so ist $\log \tau(\mathbf{z}) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$. Ist $\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^*)^n$, so ist $|z_i| > 0$ für alle i, und $\log \tau(\mathbf{z})$ ist tatsächlich ein Element von $\mathbb{R}^n$.

4.15 Satz. *Das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ist logarithmisch konvex.*

BEWEIS: Sei G das Konvergenzgebiet von $S(\mathbf{z})$ und $M := \log \tau(G \cap (\mathbb{C}^*)^n) \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ und Punkte $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ mit $\log \tau(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$

und $\log\tau(\mathbf{w}) = \mathbf{y}$. Ist $\lambda > 1$ klein genug, so gehören $\lambda\mathbf{z}$ und $\lambda\mathbf{w}$ noch zu $G \cap (\mathbb{C}^*)^n$. Da $S(\mathbf{z})$ in $\lambda\mathbf{z}$ und $\lambda\mathbf{w}$ konvergiert, gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$|a_\nu| \cdot \lambda^{|\nu|} \cdot |\mathbf{z}^\nu| \le C \quad \text{und} \quad |a_\nu| \cdot \lambda^{|\nu|} \cdot |\mathbf{w}^\nu| \le C, \text{ für jedes } \nu \in \mathbb{N}_0^n.$$

Also ist

$$|a_\nu| \cdot \lambda^{|\nu|} \cdot |\mathbf{z}^\nu|^t \cdot |\mathbf{w}^\nu|^{1-t} \le C, \text{ für jedes } \nu \text{ und } 0 \le t \le 1.$$

Aus dem Abel'schen Lemma folgt, dass $S(\mathbf{z})$ in einer Umgebung von

$$\mathbf{z}_t := \big(|z_1|^t|w_1|^{1-t}, \dots, |z_n|^t|w_n|^{1-t}\big)$$

konvergiert. Das bedeutet, dass $\mathbf{z}_t \in G$ und $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} = \log\tau(\mathbf{z}_t) \in M$ ist, für $0 \le t \le 1$. Daher ist M konvex. ∎

4.16 Satz. *Sei G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet. Ist G logarithmisch konvex, so ist G holomorph-konvex.*

Beweis: Sei K eine relativ-kompakte Teilmenge von G. Da G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet und $\overline{K}$ eine kompakte Teilmenge von G ist, gibt es Punkte $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$, so dass gilt:

$$K \subset G' := \bigcup_{i=1}^{k} \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{q}_i) \subset G, \qquad \text{wobei } \mathbf{q}_i := \tau(\mathbf{z}_i) \text{ ist.}$$

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} = \{m(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\nu \;:\; \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ von Monomen, die eine Teilmenge von $\mathcal{O}(G)$ ist. Für $\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{q}_i)$ und $m \in \mathcal{M}$ haben wir:

$$|m(\mathbf{z})| = |\mathbf{z}^\nu| < \mathbf{q}_i^\nu = |m(\mathbf{q}_i)|.$$

Sei $Z := \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$. Für $\mathbf{z} \in \widehat{K}$ folgt dann:

$$|m(\mathbf{z})| \le \sup_K |m| \le \sup_{G'} |m| \le \sup_Z |m|, \text{ für alle } m \in \mathcal{M}.$$

Nehmen wir an, dass $\widehat{K}$ nicht relativ kompakt in G liegt. Dann hat $\widehat{K}$ einen Häufungspunkt in $\mathbf{z}_0$ in ∂G und es folgt, dass $|m(\mathbf{z}_0)| \le \sup_Z |m|$ für alle $m \in \mathcal{M}$ gilt.

Sei $h(\mathbf{z}) := \log\tau(\mathbf{z})$, für $\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^*)^n$. Da G logarithmisch konvex ist, ist das Gebiet $G_0 := h(G \cap (\mathbb{C}^*)^n) \subset \mathbb{R}^n$ affin konvex. Für den Augenblick nehmen wir an, dass $\mathbf{z}_0 \in (\mathbb{C}^*)^n$ ist. Dann liegt $\mathbf{x}_0 := h(\mathbf{z}_0)$ in ∂G_0, und es gibt eine reelle Linearform $\lambda(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, so dass $\lambda(\mathbf{x}) < \lambda(\mathbf{x}_0)$ für $\mathbf{x} \in G_0$ ist.

Sei $\mathbf{x} = \log\tau(\mathbf{z})$ ein Punkt von G_0 und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $u_j \le x_j$ für $j = 1, \dots, n$. Dann ist $e^{u_j} \le e^{x_j} = |z_j|$ und deshalb (weil G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet ist) $\mathbf{w} = (e^{u_1}, \dots, e^{u_n}) \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ und $\mathbf{u} \in G_0$. Insbesondere ist

$$\mathbf{x} - n\mathbf{e}_j \in G_0 \text{ und } \lambda(\mathbf{x}) - na_j = \lambda(\mathbf{x} - n\mathbf{e}_j) < \lambda(\mathbf{x}_0), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Deshalb ist $a_j \geq 0$ für $j = 1, \ldots, n$.

Jetzt wählen wir rationale Zahlen $r_j > a_j$ und setzen $\widetilde{\lambda}(\mathbf{x}) := r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n$. Wenn wir die r_j genügend nahe bei den a_j wählen, dann gilt die Ungleichung $\widetilde{\lambda}(\log \mathbf{q}_i) < \widetilde{\lambda}(\mathbf{x}_0)$ für $i = 1, \ldots, k$, und sie gilt auch noch, wenn man mit dem gemeinsamen Nenner der r_j multipliziert. Deshalb können wir annehmen, dass die r_j natürliche Zahlen sind, und wir können ein spezielles Monom m_0 durch $m_0(\mathbf{z}) := z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}$ definieren. Dann ist

$$|m_0(\mathbf{z}_i)| = e^{\widetilde{\lambda}(\log \mathbf{q}_i)} < e^{\widetilde{\lambda}(\mathbf{x}_0)} = |m_0(\mathbf{z}_0)|, \text{ für } i = 1, \ldots, k.$$

Also ist $|m_0(\mathbf{z}_0)| > \sup_Z |m_0|$, und das ist ein Widerspruch.

Ist $\mathbf{z}_0 \notin (\mathbb{C}^*)^n$, dann können wir nach einer Permutation der Koordinaten annehmen, dass $z_1^{(0)} \cdots z_l^{(0)} \neq 0$ und $z_{l+1}^{(0)} = \cdots = z_n^{(0)} = 0$ ist. Wir können auf den Raum $\mathbb{C}^l$ projizieren und mit Monomen in den Variablen $z_1, \ldots, z_l$ arbeiten. Der Beweis geht dann wie oben durch. ∎

Jetzt erhalten wir folgendes Resultat:

4.17 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *G ist das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe.*
2. *G ist logarithmisch konvex.*
3. *G ist holomorph-konvex.*
4. *G ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen: Ist G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet und ein Holomorphiegebiet, so ist G das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe. Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion f, die auf G holomorph und in jedem Randpunkt voll singulär ist. Wir haben im vorigen Semester gezeigt, dass es zu jeder holomorphen Funktion auf einem eigentlichen Reinhardtschen Gebiet eine Potenzreihe $S(\mathbf{z})$ gibt, die auf G gegen f konvergiert. Wegen des Identitätssatzes kann sie auf keinem echt größeren Gebiet konvergieren. ∎

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $U \subset G$, $V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f_1, \ldots, f_k$ holomorphe Funktionen auf G. Die Menge

$$P := \{\mathbf{z} \in U \ : \ f_i(\mathbf{z}) \in V_i, \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$$

nennt man ein *analytisches Polyeder* in G, falls $P \subset\subset U$ ist.

Ist sogar $V_1 = \cdots = V_k = \Delta$, so spricht man von einem *speziellen analytischen Polyeder* in G.

Bemerkung. Ein analytisches Polyeder P braucht nicht zusammenhängend zu sein. Die Menge U in der Definition stellt sicher, dass jede Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von P wieder ein analytisches Polyeder ist, wenn es einen positiven Abstand von jeder anderen Zusammenhangskomponente von P hat.

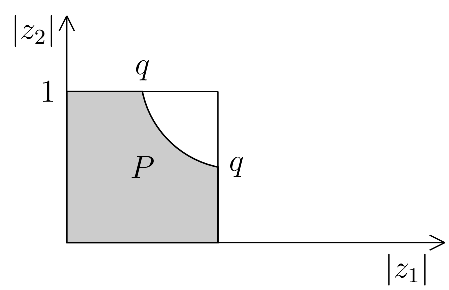
4.18 Theorem. *Jedes zusammenhängende analytische Polyeder P in G ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen, dass P ein schwaches Holomorphiegebiet ist. Ist $\mathbf{z}_0 \in \partial P$, so gibt es ein i, so daß $f_i(\mathbf{z}_0) \in \partial V_i$ ist. Deshalb ist $f(\mathbf{z}) := (f_i(\mathbf{z}) - f_i(\mathbf{z}_0))^{-1}$ in P holomorph und in $\mathbf{z}_0$ voll singulär. ∎

Beispiel.

Sei $q < 1$ eine positive reelle Zahl und

$$P := \left\{\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, |z_1| < 1,\, |z_2| < 1 \text{ und } |z_1 \cdot z_2| < q\right\}.$$



Dann ist P offensichtlich ein analytisches Polyeder, aber weder affin konvex noch das kartesische Produkt von Gebieten. So erweitern die analytischen Polyeder unseren Vorrat an Beispielen von Holomorphiegebieten.

Wir werden zeigen, dass jedes Holomorphiegebiet „fast“ ein analytisches Polyeder ist.

4.19 Theorem. *Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet, so gibt es eine Folge (P_ν) von speziellen analytischen Polyedern in G mit $P_\nu \subset\subset P_{\nu+1}$ und $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu = G$.*

Beweis: Sei (K_ν) eine normale Ausschöpfung von G mit $\widehat{K}_\nu = K_\nu$. Ist $\mathbf{z} \in \partial K_{\nu+1}$ ein beliebiger Punkt, so liegt $\mathbf{z}$ nicht in $K_\nu \subset (\overset{\circ}{K}_{\nu+1})$ und deshalb nicht in $\widehat{K}_\nu$. Es gibt also eine holomorphe Funktion f auf G mit $q := \sup_{K_\nu} |f| < |f(\mathbf{z})|$. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten erhalten wir $q < 1 < |f(\mathbf{z})|$, und dann gibt es eine ganze Umgebung $U = U(\mathbf{z})$, so dass $|f| > 1$ auf U ist.

Da der Rand $\partial K_{\nu+1}$ kompakt ist, können wir endlich viele offene Umgebungen $U_{\nu,j}$ von $\mathbf{z}_{\nu,j} \in \partial K_{\nu+1}$, $j = 1, \ldots, k_\nu$, und dazu holomorphe Funktionen $f_{\nu,j}$ auf G finden, so dass $|f_{\nu,j}| > 1$ auf $U_{\nu,j}$ und $\partial K_{\nu+1} \subset \bigcup_{j=1}^{k_\nu} U_{\nu,j}$ ist. Wir definieren

$$P_\nu := \big\{ \mathbf{z} \in (\overset{\circ}{K}_{\nu+1}) \,:\, |f_{\nu,j}(\mathbf{z})| < 1 \text{ für } j = 1, \ldots, k_\nu \big\}.$$

Offensichtlich ist $K_\nu \subset P_\nu \subset (\overset{\circ}{K}_{\nu+1})$. Außerdem ist $M := K_{\nu+1} \setminus (U_{\nu,1} \cup \cdots \cup U_{\nu,k_\nu})$ eine kompakte Menge mit $P_\nu \subset M \subset (\overset{\circ}{K}_{\nu+1})$. Folglich ist $P_\nu \subset\subset K_{\nu+1}$ und P_ν ein spezielles analytisches Polyeder in G. Trivialerweise schöpft dann die Folge (P_ν) das Gebiet G aus. ∎

In der Theorie der Steinschen Mannigfaltigkeiten beweist man die Umkehrung dieses Satzes.