Kapitel 1 Holomorphiegebiete

§ 0 Einführung

Dieser Paragraph enthält eine kurze Zusammenfassung des Stoffes von Kapitel 3, §1 – 3, aus Funktionentheorie 2.

Ist $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, alle $r_\nu > 0$, und $\mathbf{z}_0 = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$, so heißt

$$\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}| < r_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$$

Polyzylinder mit Polyradius $\mathbf{r}$ und Zentrum $\mathbf{z}_0$. Ist $r \in \mathbb{R}_+$ und $\mathbf{r} := (r, \ldots, r)$, so schreiben wir $\mathsf{P}^n_r(\mathbf{z}_0)$ statt $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r})$. Bezeichnet man mit Δ die (offene) Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, so ist $\mathsf{P}^n := \mathsf{P}^n_1(\mathbf{0}) = \underbrace{\Delta \times \cdots \times \Delta}_{n \text{ mal}}$ der *Einheits-Polyzylinder* um $\mathbf{0}$.

Die Menge

$$\mathsf{T}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}| = r_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}\,.$$

nennt man den *ausgezeichneten Rand* des Polyzylinders $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r})$. Der ausgezeichnete Rand ist das kartesische Product von n Kreisen, also diffeomorph zu einem n-dimensionalen Torus.

Die Menge

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, r_\nu \geq 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$$

nennt man den *absoluten Raum*, die Abbildung $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathcal{V}$ mit $\tau(z_1, \ldots, z_n) := \big(|z_1|, \ldots, |z_n|\big)$ die natürliche Projektion. Für $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ ist die Urbildmenge $\tau^{-1}(\mathbf{r})$ der Torus $\mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. Für $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ setzen wir $\mathsf{P}_\mathbf{z} := \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \tau(\mathbf{z}))$ und $\mathsf{T}_\mathbf{z} := \mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \tau(\mathbf{z})) = \tau^{-1}(\tau(\mathbf{z}))$. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Reinhardtsches Gebiet*, wenn mit jedem $\mathbf{z} \in G$ auch der Torus $\mathsf{T}_\mathbf{z}$ zu G gehört.

Ein Reinhardtsches Gebiet G heißt

1. *eigentlich*, falls $\mathbf{0} \in G$ ist,
2. *vollständig*, falls für alle $\mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ gilt: $\mathsf{P}_\mathbf{z} \subset G$.

Ist $M \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge und $\{f_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine Familie von komplexwertigen Funktionen auf M, so heißt die Reihe $\sum_{\nu \geq 0} f_\nu$ *normal konvergent* auf M, falls die Reihe der positiven reellen Zahlen $\sum_{\nu \geq 0} \|f_\nu\|_M$ konvergent ist. Dabei bezeichnen wir mit $\|f_\nu\|_M$ das Supremum von $|f_\nu|$ auf M. Die Reihe ist dann punktweise konvergent, und für jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0^n$ ist die Reihe $\sum_{i=1}^\infty f_{\varphi(i)}$ gleichmäßig konvergent auf M.

0.1 Abel'sches Lemma. *Seien $P' \subset\subset P \subset \mathbb{C}^n$ Polyzylinder um den Ursprung. Wenn die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ in einem Punkt des ausgezeichneten Randes von P konvergiert, dann konvergiert sie normal auf P'.*

Ist $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine formale Potenzreihe im Nullpunkt und

$$B := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, S(\mathbf{z}) \text{ konvergent}\},$$

so ist $\mathring{B}$ ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet, und $S(\mathbf{z})$ konvergiert in $\mathring{B}$ *kompakt* (also auf jeder kompakten Teilmenge normal). Die Menge $\mathring{B}$ nennt man das *Konvergenzgebiet* von $S(\mathbf{z})$.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge. A Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$ und eine Potenzreihe $S(\mathbf{z}) := \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ gibt, die auf U gegen $f(\mathbf{z})$ konvergiert.

Die Menge der holomorphen Funktionen auf B wird mit $\mathcal{O}(B)$ bezeichnet.

Eine komplexwertige Funktion f auf einer offenen Menge $B \subset \mathbb{C}^n$ heißt *komplex differenzierbar* in $\mathbf{z}_0 \in B$, falls es eine Abbildung $\Delta : B \to \mathbb{C}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Δ is stetig in $\mathbf{z}_0$.
2. $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^t$ für $\mathbf{z} \in B$.

Der Wert der Funktion Δ bei $\mathbf{z}_0$ ist eindeutig bestimmt. Die Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta(\mathbf{z}_0)^t$$

werden die *partiellen Ableitungen* von f in $\mathbf{z}_0$ genannt, der Vektor

$$\nabla f(\mathbf{z}_0) := (f_{z_1}(\mathbf{z}_0), \ldots, f_{z_n}(\mathbf{z}_0)) = \Delta(\mathbf{z}_0)$$

der *komplexe Gradient*.

Eine Funktion f heißt *schwach holomorph* auf B, falls sie dort stetig und partiell differenzierbar ist. Man kann zeigen, dass f genau dann komplex differenzierbar auf B ist, wenn f dort schwach holomorph ist.

Sei $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ ein Element von $\mathbb{R}^n_+$, $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, $T = \mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ und f eine stetige Funktion auf T. Dann heißt

$$C_f(\mathbf{z}) := \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^n \int\limits_{|\zeta_1| = r_1} \cdots \int\limits_{|\zeta_n| = r_n} f(\boldsymbol{\zeta}) \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)} \cdots \frac{d\zeta_n}{(\zeta_n - z_n)}$$

das Cauchy -Integral von f über T.

0.2 Cauchy'sche Integral-Formel. *Ist $U = U(\overline{P})$ eine offene Umgebung des Abschlusses von P und f schwach holomorph auf U, so ist $C_{f|T}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$ für alle $\mathbf{z} \in P$.*

Ist $f : T \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so gibt es eine Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$, die auf ganz P gegen $C_f(\mathbf{z})$ konvergiert. Die Koeffizienten a_ν sind durch

$$a_{\nu_1\cdots\nu_n} = \left(\frac{1}{2\pi \mathsf{i}}\right)^n \int\limits_T \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{\zeta_1^{\nu_1+1}\cdots\zeta_n^{\nu_n+1}}\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

gegeben.

Insbesondere ist f genau dann komplex differenzierbar, wenn f holomorph ist.

0.3 Weierstraß'scher Konvergenzsatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und (f_k) eine Folge von holomorphen Funktionen, die auf G gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f holomorph.*

Es gelten auch der Identitätssatz und das Maximumprinzip, sowie die Cauchy'schen Ungleichungen:

Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Punkt und $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) \subset\subset G$ ein Polyzylinder mit ausgezeichnetem Rand T, so ist

$$|D^\nu f(\mathbf{z}_0)| \le \frac{\nu!}{\mathbf{r}^\nu} \cdot \sup_T |f|.$$

Ist $f : B \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in $\mathbf{z}_0$, so gibt es eine Darstellung

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta'(\mathbf{z})^t + (\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{z}}_0) \cdot \Delta''(\mathbf{z})^t,$$

wobei Δ' and Δ'' in $\mathbf{z}_0$ stetig sind. Die eindeutig bestimmten Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta'(\mathbf{z}_0)^t$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta''(\mathbf{z}_0)^t$$

heißen die Wirtinger-Ableitungen von f in $\mathbf{z}_0$.

Die komplex-linearen (bzw. antilinearen) Abbildungen $(\partial f)_{\mathbf{z}_0} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ und $(\overline{\partial} f)_{\mathbf{z}_0} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ werden definiert durch

$$(\partial f)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{w}) := \sum_{\nu=1}^n f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) w_\nu \quad \text{und} \quad (\overline{\partial} f)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{w}) := \sum_{\nu=1}^n f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0)\overline{w}_\nu,$$

und das Differential von f in $\mathbf{z}_0$ durch $(df)_{\mathbf{z}_0} := (\partial f)_{\mathbf{z}_0} + (\overline{\partial} f)_{\mathbf{z}_0}$.

Wir führen auch noch den holomorphen (bzw. antiholomorphen) Gradient ein:

$$\nabla f := (f_{z_1}, \ldots, f_{z_n}) \quad \text{und} \quad \overline{\nabla} f := (f_{\overline{z}_1}, \ldots, f_{\overline{z}_n}).$$

Dann ist $(\partial f)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \nabla f(\mathbf{z}_0)^t$ und $(\overline{\partial} f)_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\nabla} f(\mathbf{z}_0)^t$.

Ist f eine in $\mathbf{z}_0$ komplex-wertige reell differenzierbare Funktion, so ist

$$\begin{aligned} f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{2}(f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) - \mathsf{i}\, f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0)), \\ f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{2}(f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) + \mathsf{i}\, f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0)). \end{aligned}$$

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge. Eine Abbildung

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{C}^m$$

heißt holomorph, falls alle Komponenten f_i holomorph sind.

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} (f_1)_{z_1}(\mathbf{z}) & \cdots & (f_1)_{z_n}(\mathbf{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_m)_{z_1}(\mathbf{z}) & \cdots & (f_m)_{z_n}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}$$

heißt komplexe Jacobi-Matrix von f in $\mathbf{z}$. Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen gelten wie im Reellen.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $A \subset G$ heißt *analytisch*, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in G$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset G$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf U gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} U \cap A &= N(f_1, \ldots, f_q) \\ &:= \{\mathbf{z} \in U \,:\, f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_q(\mathbf{z}) = 0\}. \end{aligned}$$

Besitzt die analytische Menge A einen inneren Punkt, so ist $A = G$. Andernfalls ist A nirgends dicht in G und $G \setminus A$ zusammenhängend.

Die analytische Menge heißt in $\mathbf{z} \in A$ *regulär von der Codimension* q, falls es eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}) \subset G$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf U gibt, so dass gilt:

1. $A \cap U = N(f_1, \ldots, f_q)$.
2. $\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(f_1, \ldots, f_q) = q$.

Die Zahl $n - q$ nennt man die Dimension von A in $\mathbf{z}$. Ist A in $\mathbf{z}$ nicht regulär, so nennt man A dort *singulär*. Die Menge der regulären Punkte von A bezeichnen wir mit $\mathrm{Reg}(A)$, die der singulären Punkte mit $\mathrm{Sing}(A)$.

Eine k-dimensionale *komplexe Untermannigfaltigkeit* eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}^n$ ist eine analytische Menge $A \subset G$, die überall regulär von der Codimension $n - k$ ist.

Sei jetzt $G \subset \mathbb{C}^n$ ein eigentliches Reinhardtsches Gebiet und f holomorph auf G. Dann stimmt für alle $\mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ das Cauchy-Integral $C_{f|\mathsf{T}_{\mathbf{z}}}$ in einer Umgebung des Nullpunktes mit f überein. Es gibt sogar eine Potenzreihe $S(\mathbf{z})$, die in G gegen f konvergiert.

Die Menge

$$\widehat{G} := \bigcup_{\mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n} P_{\mathbf{z}}$$

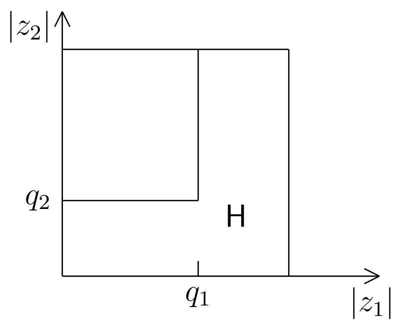
nennt man die *vollständige Hülle* von G. Sie ist das kleinste vollständige Reinhardtsche Gebiet, das G enthält, und man kann zeigen, dass jede holomorphe Funktion f auf G eine eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}$ auf $\widehat{G}$ besitzt.

Das wichtigste Beispiel ist die Hartogs-Figur:

Sei $n \geq 2$, P^n der Einheitspolyzylinder, $q_1, \ldots, q_n$ reelle Zahlen mit $0 < q_\nu < 1$ für $\nu = 1, \ldots, n$, und

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}(\mathbf{q}) := \{\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n \,:\, |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\mu| < q_\mu \text{ für } \mu = 2, \ldots, n\}.$$

Dann nennt man $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine *Euklidische Hartogs-Figur*. H ist ein Reinhardtsches Gebiet und P^n seine vollständige Hülle.



Es gilt der

0.4 Satz von Hartogs. *Sei $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine Euklidische Hartogs-Figur. Dann besitzt jede holomorphe Funktion f auf H eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}$ auf P^n.*

Definition. Sei $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung, $\widetilde{P} := \mathbf{g}(\mathsf{P}^n)$ und $\widetilde{H} := \mathbf{g}(\mathsf{H})$. Dann nennt man $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big)$ eine *allgemeine Hartogs-Figur*.

Entscheidend für alles weitere ist der

0.5 Kontinuitätssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big)$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\widetilde{H} \subset G$, f eine holomorphe Funktion auf G. Ist $G \cap \widetilde{P}$ zusammenhängend, so kann f eindeutig nach $G \cup \widetilde{P}$ fortgesetzt werden.*

Eine Anwendung ist z.B. der folgende Spezialfall des „Kugelsatzes“:

Sei $n \geq 2$. Sind $P' \subset\subset P$ konzentrische Polyzylinder um den Nullpunkt in $\mathbb{C}^n$, so kann jede holomorphe Funktion f auf $P \setminus \overline{P'}$ eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf P fortgesetzt werden.

0.6 Riemann'scher Hebbarkeitssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine echte analytische Teilmenge. Ist f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus A$, die entlang A beschränkt ist, so kann f nach G holomorph fortgesetzt werden.*

Im Falle höherer Codimension gibt es noch stärkere Aussagen.

0.7 Satz. *Sei $n \geq 2$ und $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1)$ der Einheitspolyzylinder im $\mathbb{C}^n$, $k \geq 2$ und*

$$E := \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \, : \, z_{n-k+1} = \cdots = z_n = 0\}.$$

Dann kann jede holomorphe Funktion f auf $\mathsf{P}^n \setminus E$ holomorph nach P^n fortgesetzt werden.

Ist also $n \geq 2$, so ist jede isolierte Singularität einer holomorphen Funktion von $z_1, \ldots, z_n$ hebbar.

§ 1 Das Kontinuitätsprinzip

Manchmal benutzt man an Stelle einer Hartogs-Figur eine Familie von analytischen Scheiben.

Definition. Eine *Familie von analytischen Scheiben* wird durch eine stetige Abbildung $\varphi : \overline{\Delta} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ gegeben, so dass $\varphi_t(\zeta) := \varphi(\zeta, t)$ in Δ holomorph ist, für alle $t \in [0,1]$. Die Menge $S_t := \varphi_t(\Delta)$ nennt man eine *analytische Scheibe* und $bS_t := \varphi_t(\partial\Delta)$ ihren *Rand*.

Man beachte, dass bS_t i.a. nicht der topologische Rand von S_t ist.

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ genügt dem *Kontinuitätsprinzip*, falls für alle Familien $\{S_t,\, t \in [0,1]\}$ von analytischen Scheiben in $\mathbb{C}^n$ mit $\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t \subset G$ und $S_0 \subset G$ folgt, dass $\bigcup_{0 \le t \le 1} S_t \subset G$ ist.

Beispiel.

Sei P^n der Einheitspolyzylinder und $\{S_t,\, t \in [0,1]\}$ eine Familie von analytischen Scheiben in $\mathbb{C}^n$ mit $\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t \subset \mathsf{P}^n$ und $S_0 \subset \mathsf{P}^n$. Weil $\overline{S}_0$ und die Vereinigung aller Ränder bS_t kompakte Mengen sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$\bigcup_{0 \le t \le 1} bS_t \subset \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1-\varepsilon) \quad \text{und} \quad S_0 \subset \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1-\varepsilon).$$

Wir nehmen an, dass $\bigcup_{0 \le t \le 1} S_t$ nicht in P^n enthalten ist, und definieren

$$t_0 := \inf\{t \in [0,1] \,:\, S_t \not\subset \mathsf{P}^n\}.$$

Es ist klar, dass $t_0 > 0$, $S_{t_0} \not\subset \mathsf{P}^n$ und $S_t \subset \mathsf{P}^n$ für $0 \le t < t_0$ ist. Dann enthält S_{t_0} einen Punkt $\mathbf{z}_0 = \left(z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}\right) \in \partial\mathsf{P}^n$. Ist die Familie von analytischen Scheiben gegeben durch die Abbildung $\varphi : \overline{\Delta} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ und bezeichnet w_μ die μ-te Koordinatenfunction, so ist $f_{\mu,t}(\zeta) := w_\mu \circ \varphi(\zeta, t)$ auf $\overline{\Delta}$ stetig und in Δ holomorph. Wählt man μ so, dass $|z_\mu^{(0)}| = 1$ ist, so gibt es ein $\zeta_0 \in \Delta$ mit $f_{\mu,t_0}(\zeta_0) = z_\mu^{(0)}$ und $|f_{\mu,t_0}(\zeta_0)| = 1$. Aber nach dem Maximumprinzip ist

$$|f_{\mu,t}(\zeta_0)| \le \sup_{\partial\Delta} |f_{\mu,t}| \le 1 - \varepsilon, \text{ für } t < t_0.$$

Weil $t \mapsto f_{\mu,t}(\zeta_0)$ stetig ist, stellt dies einen Widerspruch dar. Also genügt P^n dem Kontinuitätsprinzip.

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Hartogs-konvex*, falls gilt: Ist $\left(\widetilde{P}, \widetilde{H}\right)$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\widetilde{H} \subset G$, so ist $\widetilde{P} \subset G$.

Nun folgt unmittelbar:

Das biholomorphe Bild eines Hartogs-konvexen Gebietes ist wieder Hartogs-konvex.

1.1 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, das dem Kontinuitäts-Prinzip genügt. Dann ist G Hartogs-konvex.*

BEWEIS: Sei $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big)$ eine allgemeine Hartogs-Figur mit $\widetilde{H} \subset G$. Sie sei das biholomorphe Bild $(g(\mathsf{P}^n), g(\mathsf{H}))$ einer euklidischen Hartogs-Figur $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ mit

$$\mathsf{H} = \{\mathbf{z} \,:\, |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\mu| < q_\mu \text{ für } \mu = 2, \ldots, n\}.$$

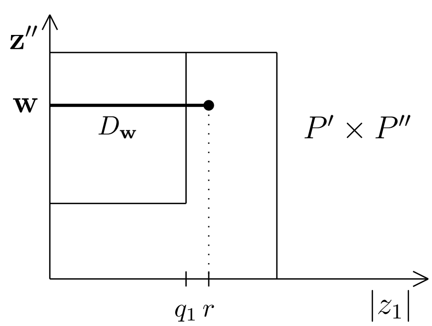
Um analytische Scheiben zu definieren, wählen wir ein r mit $q_1 < r < 1$ und führen die affinen analytischen Scheiben

$$D_\mathbf{w} := \{\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}'') \in \mathsf{P}^n = P' \times P'' \,:\, |z_1| < r \text{ und } \mathbf{z}'' = \mathbf{w}\}$$

ein. Da $\overline{D}_\mathbf{w} \subset \mathsf{P}^n$ für jedes $\mathbf{w} \in P''$ ist, können wir $\varphi_\mathbf{w} : \overline{\Delta} \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ durch $\varphi_\mathbf{w}(\zeta, t) := g(r\zeta, t\mathbf{w})$ definieren. Dann ist eine Familie $\{S_t(\mathbf{w}) \,:\, 0 \le t \le 1\}$ von analytischen Scheiben in $\widetilde{P}$ gegeben durch

$$S_t(\mathbf{w}) := \varphi_\mathbf{w}(\Delta \times \{t\}) = g(D_{t\mathbf{w}}).$$

Es folgt, dass $bS_t(\mathbf{w}) \subset G$ für jedes $\mathbf{w} \in P''$ und jedes $t \in [0,1]$ ist, und außerdem $S_0(\mathbf{w}) = g(D_\mathbf{0}) \subset G$.



Da G dem Kontinuitätsprinzip genügt, ist $g(D_\mathbf{w}) = S_1(\mathbf{w})$ in G enthalten. Dies gilt für jedes $\mathbf{w} \in P''$. Also ist $\widetilde{P} \subset G$, und G ist Hartogs-konvex. ∎

1.2 Folgerung. *Der Einheitspolyzylinder P^n ist Hartogs-konvex.*

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, f holomorph in G und $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ ein Punkt. Die Funktion f heißt *vollständig singulär* in $\mathbf{z}_0$, falls es auf keiner zusammenhängenden Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Funktion g gibt, die auf einer Zusammenhangskomponente C von $U \cap G$ mit f übereinstimmt.

Beispiel.

Sei $G := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \le 0\}$ und f ein Zweig des Logarithmus auf G. Dann ist f vollständig singulär in $z = 0$, aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$.

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt *schwaches Holomorphiegebiet*, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z} \in \partial G$ eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ gibt, die in $\mathbf{z}$ vollständig singulär ist. Das Gebiet G heißt ein *Holomorphiegebiet*, falls eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ existiert, die in **jedem** Punkt $\mathbf{z} \in \partial G$ vollständig singulär ist.

Beispiele.

1. Da der $\mathbb{C}^n$ keinen Randpunkt besitzt, erfüllt er trivialerweise die Bedingungen eines Holomorphiegebietes.

2. Man sieht sofort, dass jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ein schwaches Holomorphiegebiet ist: Ist z_0 ein Randpunkt von G, so ist $f(z) := 1/(z - z_0)$ in G holomorph und vollständig singulär in z_0.

   Für $G = \Delta$ können wir sogar mehr zeigen! Die Funktion $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}$ ist holomorph im Einheitskreis und wird in jedem Randpunkt vollständig singulär. Deshalb ist Δ ein Holomorphiegebiet. Am Ende dieses Kapitels werden wir sehen, dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ ein Holomorphiegebiet ist.

3. Ist $f : \Delta \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in jedem Randpunkt vollständig singulär wird, so gilt das gleiche für $\widehat{f} : \mathsf{P}^n = \Delta \times \cdots \times \Delta \to \mathbb{C}$, definiert durch $\widehat{f}(z_1, \ldots, z_n) := f(z_1) + \cdots + f(z_n)$. Ist nämlich $\mathbf{z}_0$ ein Randpunkt von P^n, so gibt es ein i, so dass die i-te Komponente $z_i^{(0)}$ ein Randpunkt von Δ ist. Wenn $\widehat{f}$ holomorph über $\mathbf{z}_0$ hinweg fortgesetzt werden könnte, dann hätte auch $\widehat{f}_i(\zeta) := \widehat{f}(z_1^{(0)}, \ldots, \zeta, \ldots, z_n^{(0)})$ eine holomorphe Fortsetzung. Aber dann könnte f in $z_i^{(0)}$ nicht vollständig singulär sein. Deshalb ist der Einheitspolyzylinder ein Holomorphiegebiet.

4. Ist $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogs-Figur, so ist H kein Holomorphiegebiet.

1.3 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in \partial G$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^n$ und eine holomorphe Funktion $f : G \cup U \to \mathbb{C}$ mit $f(\mathbf{z}_0) = 0$ und $f(\mathbf{z}) \neq 0$ für $\mathbf{z} \in G$ gibt, dann ist G ein schwaches Holomorphiegebiet.*

Beweis: Wir zeigen, dass $1/f$ in $\mathbf{z}_0$ vollständig singulär ist. Dazu nehmen wir an, es gebe eine zusammenhängende offene Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0)$, eine Zusammenhangskomponente $C \subset V \cap G$ und eine holomorphe Funktion F auf V mit $F|_C = (1/f)\,\big|_C$. Die Menge $V' := V \setminus N(f)$ ist immer noch zusammenhängend und enthält C. Nach dem Identitätssatz müssen die Funktionen F und $1/f$ in V' übereinstimmen. Dann ist F offensichtlich nicht holomorph in $\mathbf{z}_0$. Widerspruch! ∎

1.4 Folgerung. *Jedes konvexe Gebiet G im $\mathbb{C}^n$ ist ein schwaches Holomorphiegebiet.*

Beweis: Ist $\mathbf{z}_0 \in \partial G$, so gibt es wegen der Konvexität von G eine reelle Linearform λ auf $\mathbb{C}^n$ mit $\lambda(\mathbf{z}) < \lambda(\mathbf{z}_0)$ für $\mathbf{z} \in G$. Wir können λ in der Form

$$\lambda(\mathbf{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\alpha}_\nu \overline{z}_\nu, \ \text{ mit } \boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \mathbf{0},$$

schreiben. Daher ist $\lambda = \operatorname{Re} h(\mathbf{z})$, wobei $h(\mathbf{z}) := 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu$ holomorph auf $\mathbb{C}^n$ ist.

Da die Funktion $f(\mathbf{z}) := h(\mathbf{z}) - h(\mathbf{z}_0)$ auf $\mathbb{C}^n$ holomorph, $f(\mathbf{z}_0) = 0$ und $f(\mathbf{z}) \neq 0$ auf G ist, kann der Satz angewandt werden. ∎

Wir wollen zeigen, dass jedes schwache Holomorphiegebiet Hartogs-konvex ist. Als Hilfsmittel benötigen wir das folgende einfache geometrische Lemma, das auch in anderen Situationen nützlich sein wird.

1.5 Lemma (über Randkomponenten). *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge mit $U \cap G \neq \varnothing$ und $(\mathbb{C}^n \setminus U) \cap G \neq \varnothing$.*

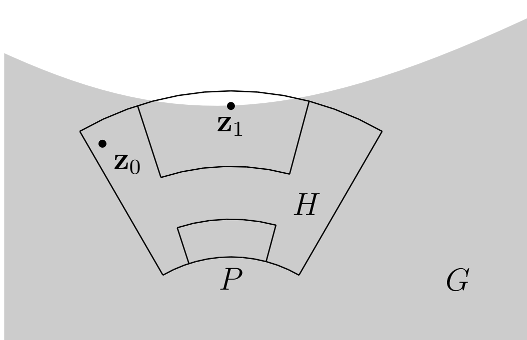
Dann ist $G \cap \partial C \cap \partial U \neq \varnothing$ für jede Zusammenhangskomponente C von $U \cap G$.

BEWEIS: Wir wählen Punkte $\mathbf{z}_1 \in C \subset U \cap G$ und $\mathbf{z}_2 \in (\mathbb{C}^n \setminus U) \cap G$. Dann gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\gamma(0) = \mathbf{z}_1$ und $\gamma(1) = \mathbf{z}_2$. Sei $t_0 := \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in C\}$ und $\mathbf{z}_0 := \gamma(t_0)$. Offensichtlich ist $\mathbf{z}_0 \in \partial C \cap G$, aber $\mathbf{z}_0 \notin C$. Da C eine Zusammenhangskomponente von $U \cap G$ ist, kann $\mathbf{z}_0$ nicht in $U \cap G$ und daher auch nicht in U liegen. Wegen $\gamma(t) \in U$ für $t < t_0$ folgt, dass $\mathbf{z}_0 \in \partial U$ ist. ∎

1.6 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein schwaches Holomorphiegebiet. Dann ist G Hartogs-konvex.*

BEWEIS: Wir nehmen an, dass G nicht Hartogs-konvex ist. Dann gibt es eine allgemeine Hartogs-Figur (P, H) mit $H \subset G$, aber $P \cap G \neq P$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\mathbf{z}_0$ in H und setzen $C := C_{P \cap G}(\mathbf{z}_0)$.[1] Da H in $P \cap G$ liegt und zusammenhängend ist, folgt, dass $H \subset C$ ist. Außerdem ist $C \subsetneqq P$.

Da $P \cap G \neq \varnothing$ und $(\mathbb{C}^n \setminus G) \cap P \neq \varnothing$ ist, gibt es nach dem Lemma einen Punkt $\mathbf{z}_1 \in \partial C \cap \partial G \cap P$.



[1] Mit $C_M(\mathbf{z})$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente von $\mathbf{z}$ in M.

Sei f eine beliebige holomorphe Funktion auf G. Dann ist auch $f|_C$ holomorph und besitzt nach dem Kontinuitätssatz eine holomorphe Fortsetzung F auf P. Da P eine offene zusammenhängende Umgebung von $\mathbf{z}_1$ ist, kann f nicht vollständig singulär in $\mathbf{z}_1$ sein. Das ist ein Widerspruch. ∎

Es folgt z.B., dass jedes konvexe Gebiet Hartogs-konvex ist. Insbesondere ist jede Kugel Hartogs-konvex.

1.7 Theorem. *Jedes Holomorphiegebiet ist Hartogs-konvex.*

Der Beweis ist trivial.

Um die Umkehrung dieses Satzes zu zeigen, muss man zu jedem Hartogs-konvexen Gebiet eine globale holomorphe Funktion konstruieren, die in jedem Randpunkt vollständig singulär wird. Das ist sehr schwierig. Es wurde 1910 in sehr speziellen Fällen von E.E. Levi durchgeführt. Der allgemeine Fall wurde als *Levi-Problem* bezeichnet.

1942 lieferte der japanische Mathematiker K. Oka einen Beweis für $n = 2$. Anfang der 50er lösten Oka, Bremermann und Norguet das Levi-Problem für beliebiges n. Das Ergebnis wurde auf komplexe Mannigfaltigkeiten (H. Grauert, 1958) und komplexe Räume (R. Narasimhan, 1962) verallgemeinert. Schließlich veröffentlichte L. Hörmander 1965 einen Beweis, der Hilbertraum-Methoden und partielle Differentialgleichungen benutzte.

§ 2 Plurisubharmonische Funktionen

Wir beginnen mit einigen Fakten aus der 1-dimensionalen komplexen Analysis.

Eine zweimal differenzierbare reell-wertige Funktion h auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *harmonisch*, falls $h_{z\overline{z}}(z) \equiv 0$ auf G ist. Der Realteil einer holomorphen Funktion ist immer harmonisch, und auf einer offenen Kreisscheibe ist jede harmonische Funktion der Realteil einer holomorphen Funktion.

Ist $D = \Delta(a, r) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion mit Periode 2π, so gibt es eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$, die harmonisch auf D ist, so dass $h(a + re^{\mathrm{i}\,t}) = \beta(t)$ für alle t gilt (Dirichlet's Prinzip).

Eine nach oben halbstetige[2] Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ genügt der *schwachen Mittelwerteigenschaft*, falls gilt:

Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $r > 0$ mit $\Delta(a, r) \subset\subset G$ und

$$\varphi(a) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})\, dt \qquad \text{für } 0 < \varrho \le r.$$

Bemerkungen.

1. Ist $\varphi : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine nach oben halbstetige Funktion, so sind die Mengen $U_c := \{z \in G : \varphi(z) < c\}$ offen, und deshalb ist φ messbar und auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ nach oben beschränkt. Es folgt, dass das Integral in der Definition der schwachen Mittelwerteigenschaft existiert (eventuell mit dem Wert $-\infty$).

2. Harmonische Funktionen genügen der schwachen Mittelwerteigenschaft (sogar der strengen *Mittelwerteigenschaft* mit „=“ an Stelle von „$\le$“).

3. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine nirgends identisch verschwindende holomorphe Funktion, so genügt $\log|f|$ der schwachen Mittelwerteigenschaft. Tatsächlich ist die Funktion $\varphi := \log|f|$ harmonisch auf $G \setminus N(f)$, weil sie lokal als $\mathrm{Re}(\log f)$ geschrieben werden kann, mit einem geeigneten Zweig des Logarithmus. In jedem Punkt $z_0 \in N(f)$ ist $\varphi(z_0) = -\infty$, also ist dort die Ungleichung in der schwachen Mittelwerteigenschaft erfüllt.

2.1 Satz. *$\varphi : G \to \mathbb{R}$ genüge der schwachen Mittelwerteigenschaft. Hat φ ein globales Maximum in G, so ist φ konstant.*

BEWEIS: Sei $a \in G$ ein Punkt mit $c := \varphi(a) \ge \varphi(z)$ für $z \in G$. Wir wählen ein $r > 0$, so dass gilt:

$$\Delta(a, r) \subset\subset G \text{ und } \varphi(a) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})\, dt \text{ für } 0 < \varrho \le r.$$

[2] φ ist in $z_0 \in G$ *halbstetig nach oben*, falls gilt: Ist $\varphi(z_0) < r$, so gibt es eine Umgebung $U(z_0) \subset G$, so daß $\varphi(z) < r$ für $z \in U$ ist.

Wir nehmen an, dass es ein $b \in \Delta(a,r)$ mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ gibt. Dann schreiben wir $b = a + \varrho e^{\mathrm{i}\, t_0}$ und erhalten

$$\varphi(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + \varrho e^{\mathrm{i}\, t})\, dt < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a)\, dt = \varphi(a).$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss φ konstant auf $\Delta(a,r)$ sein. Wir setzen $M := \{z \in G \,:\, \varphi(z) = c\}$. Offensichtlich ist M in G abgeschlossen und nicht leer. Da M sowieso offen ist, ist $M = G$ und φ konstant. ∎

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $s : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt *subharmonisch*, falls folgendes gilt:

1. s ist halbstetig nach oben auf G.
2. Ist $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig, $h|_D$ harmonisch und $h \ge s$ auf ∂D, so ist $h \ge s$ auf D.

2.2 Satz. *Sei $s_\nu : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine monoton fallende Folge von subharmonischen Funktionen. Dann ist auch $s := \lim_{\nu\to\infty} s_\nu$ subharmonisch.*

Beweis: Die Grenzfunktion $s = \lim_{\nu\to\infty} s_\nu = \inf\{s_\nu\}$ ist halbstetig nach oben. Sei nun $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf D, mit $s \le h$ auf ∂D. Für ein festes $\varepsilon > 0$ betrachten wir die kompakten Mengen

$$K_\nu := \{z \in \partial D \,:\, s_\nu(z) \ge h(z) + \varepsilon\}.$$

Es ist $K_{\nu+1} \subset K_\nu$ und $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \varnothing$. Deshalb gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $K_\nu = \varnothing$ für $\nu \ge \nu_0$. Das bedeutet, dass $s_\nu < h + \varepsilon$ für $\nu \ge \nu_0$ auf ∂D ist, und dann gilt dasselbe auch auf D. Da die s_ν monoton fallen, ist $s < h + \varepsilon$ auf D. Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also ist $s \le h$ auf D. ∎

2.3 Satz. *Sei $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von subharmonischen Funktionen auf G. Ist $s := \sup s_\alpha$ halbstetig nach oben und überall endlich, so ist s subharmonisch.*

Beweis: Ist $s \le h$ auf ∂D, wobei $D \subset\subset G$ und $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und auf D harmonisch ist, so ist $s_\alpha \le h$ auf ∂D, für jedes $\alpha \in A$. Da die s_α subharmonisch sind, folgt, dass $s_\alpha \le h$ auf D ist, für jedes $\alpha \in A$. Dann ist auch $s \le h$ auf D. ∎

Beispiele.

1. Offensichtlich ist jede harmonische Funktion subharmonisch.
2. Sei $s : G \to \mathbb{R}$ eine stetige subharmonische Funktion, so dass auch $-s$ subharmonisch ist. Dann ist s harmonisch. Um dies zu zeigen, betrachten wir einen beliebigen Punkt $a \in G$ und wählen ein $r > 0$, so dass $D := \Delta(a,r) \subset\subset G$ ist. Dann gibt es eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ mit $h|_{\partial D} = s|_{\partial D}$, die auf D

harmonisch ist (Dirichlet'sches Prinzip). Es folgt, dass $s \le h$ auf D ist. Aber weil auch $-h$ harmonisch ist, haben wir $-s \le -h$ auf D. Zusammen ergibt das $s = h$ auf D.

3. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist $s := \log|f|$ subharmonisch. Ist nämlich $f(z) \equiv 0$ auf G, so ist $s(z) \equiv -\infty$ und es bleibt nichts zu zeigen. Andernfalls ist s harmonisch auf $G \setminus N(f)$, und wir müssen nur eine isolierte Nullstelle a von f betrachten. Dann wählen wir eine Scheibe $D = \Delta(a,r) \subset\subset G$ und eine Funktion h, die auf $\overline{D}$ stetig und auf D harmonisch ist, mit $s \le h$ auf ∂D. Wir wissen, dass s und daher auch $s - h$ auf D die schwache Mittelwerteigenschaft besitzen. Da s nicht konstant ist, muss $s - h$ sein Maximum (≤ 0) auf dem Rand ∂D annehmen. Das bedeutet, dass $s \le h$ auf D ist.

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet. Die *Randdistanz* $\delta_G : G \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ist definiert durch
$$\delta_G(z) := \sup\{r \in \mathbb{R} \,:\, \Delta(z,r) \subset G\}.$$
Behauptung: $s := -\log \delta_G$ ist subharmonisch auf G.

BEWEIS: Ist $G = \mathbb{C}$, so ist $s(z) \equiv -\infty$ und daher nichts zu zeigen. Ist $G \ne \mathbb{C}$, so ist s reellwertig und stetig. Für $w \in \partial G$ definieren wir $s_w : G \to \mathbb{R}$ durch $s_w(z) := -\log|z - w|$. Dann ist $s(z) = \sup\{s_w(z) \,:\, w \in \partial G\}$. Aus dem obigen Satz folgt die Behauptung. ∎

2.4 Maximumprinzip. *Sei $s : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine subharmonische Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wenn s in G sein Maximum annimmt, dann muss s konstant sein.*

BEWEIS: Wir nehmen an, dass $c := s(a) \ge s(z)$ für alle $z \in G$ gilt. Wie bei den Funktionen, die die schwache Mittelwerteigenschaft besitzen, genügt es zu zeigen, dass s in einer Umgebung von a konstant ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine kleine Scheibe $D = \Delta(a,r) \subset\subset G$ und ein $b \in \partial D$ mit $s(a) > s(b)$. Da s halbstetig nach oben ist, gibt es eine stetige Funktion h auf ∂D mit $s \le h \le c$ und $h(b) < c$. Die Lösung des Dirichlet'schen Problems liefert eine harmonische Fortsetzung von h in D. Dann ist aber
$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + re^{\mathrm{i}\,t})\, dt < c = s(a),$$
und das ist ein Widerspruch. ∎

Manchmal erweist sich das folgende Kriterium für Subharmonizität als nützlich:

2.5 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $s : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine nach oben halbstetige Funktion. Für jede Scheibe $D \subset\subset G$ und jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ mit $s < \mathrm{Re}(f)$ auf ∂D sei $s < \mathrm{Re}(f)$ auf D. Dann ist s subharmonisch.*

Beweis: Sei $D = \Delta(a,r) \subset\subset G$, $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und auf D harmonisch, sowie $s \le h$ auf ∂D. Der Einfachheit halber sei $a = 0$.

Für $\nu \in \mathbb{N}$ wird eine harmonische Funktion h_ν auf $D_\nu := \Delta(0, (\nu/(\nu-1))r) \supset D$ gegeben durch

$$h_\nu(z) := h\Big(\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big)z\Big).$$

Dann konvergiert (h_ν) auf $\overline{D}$ gleichmäßig und monoton wachsend gegen h. Außerdem gibt es zu jedem ν eine holomorphe Funktion f_ν auf D_ν mit $\mathrm{Re}(f_\nu) = h_\nu$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein ν_0 mit $|h - h_\nu| < \varepsilon$ auf $\overline{D}$ für $\nu \ge \nu_0$. Daher ist $s < h_\nu + \varepsilon = \mathrm{Re}(f_\nu + \varepsilon)$ auf ∂D für $\nu \ge \nu_0$. Nach Definition folgt, daß $s < h_\nu + \varepsilon$ auf D ist. Da die (h_ν) wachsen, ist $s < h + \varepsilon$ und damit $s \le h$ auf D. ∎

2.6 Hilfssatz. *Sei $s : G \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion und $s_{z\overline{z}} > 0$ auf G. Dann ist s subharmonisch.*

Beweis: Sei $D = \Delta(a,r) \subset\subset G$ und eine stetige Funktion $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass h auf D harmonisch und $s \le h$ auf ∂D ist. Wir setzen $\varphi := s - h$.

Wir nehmen an, dass φ sein Maximum in einem inneren Punkt z_0 von D annimmt. Dann betrachten wir die Taylor-Entwicklung von φ in z_0 in einer kleinen Umgebung um z_0:

$$\varphi(z_0 + z) = \varphi(z_0) + 2\,\mathrm{Re}\,Q(z) + \varphi_{z\overline{z}}(z_0)z\overline{z} + R(z),$$

wobei $Q(z) := \varphi_z(z_0)z + \frac{1}{2}\varphi_{zz}(z_0)z^2$ holomorph ist und $R(z)/|z|^2 \to 0$ für $z \to 0$. Die Funktion $\psi(z) := 2\,\mathrm{Re}\,Q(z)$ ist harmonisch, mit $\psi(0) = 0$. Da sie kein Maximum oder Minimum annehmen kann, muss sie in Punkten, die beliebig nahe bei Null liegen, aber $\ne 0$ sind, Nullstellen besitzen. Andererseits ist $\varphi(z_0 + z) - \varphi(z_0) \le 0$ und $\varphi_{z\overline{z}}(z_0)z\overline{z} > 0$ außerhalb $z = 0$. Das ist ein Widerspruch! Also muss φ sein Maximum auf dem Rand von D annehmen und $s \le h$ auf D sein. ∎

2.7 Theorem. *Sei $s : G \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. s ist genau dann subharmonisch, wenn $s_{z\overline{z}} \ge 0$ auf G ist.*

Beweis: (a) Sei $s_{z\overline{z}}(z) \ge 0$ in jedem $z \in G$. Dann definieren wir s_ν auf G durch $s_\nu := s + (1/\nu)z\overline{z}$. Offensichtlich ist $(s_\nu)_{z\overline{z}} = s_{z\overline{z}} + (1/\nu) > 0$. Dann ist s_ν subharmonisch, nach dem obigen Lemma. Da (s_ν) monoton fallend gegen s konvergiert, ist s subharmonisch.

(b) Sei umgekehrt s subharmonisch auf G. Wir nehmen an, dass $s_{z\overline{z}}(a) < 0$ in einem $a \in G$ ist. Dann gibt es eine zusammenhängende offene Umgebung $U = U(a) \subset G$, so dass $s_{z\overline{z}} < 0$ auf U ist. Aus dem Lemma folgt, dass $-s$ auf U subharmonisch ist. Dann muss s harmonisch auf U sein. Also ist $s_{z\overline{z}}(a) = 0$, im Widerspruch zur Annahme. ∎

Wir kehren zu den Gebieten in beliebigen Dimensionen zurück. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{a} \in G$ ein Punkt und $\mathbf{w}$ ein Vektor im $\mathbb{C}^n$. Wir benutzen die holomorphe Abbildung $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) := \mathbf{a} + \zeta\mathbf{w}$.

Definition. Eine nach oben halbstetige Funktion $p : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt *plurisubharmonisch* auf G, falls für jeden Punkt $\mathbf{a} \in G$ und jeden Vektor $\mathbf{w}$ im $\mathbb{C}^n$ die Funktion

$$p_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) := p \circ \alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) = p(\mathbf{a} + \zeta\mathbf{w})$$

subharmonisch auf der Zusammenhangskomponente $G(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ der Menge $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}^{-1}(G) \subset \mathbb{C}$ ist, die 0 enthält.

Bemerkungen.

1. Plurisubharmonizität ist eine lokale Eigenschaft.
2. Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, so ist $\log|f|$ plurisubharmonisch.
3. Sind p_1, p_2 plurisubharmonisch, so auch $p_1 + p_2$.
4. Ist p plurisubharmonisch und $c > 0$, so ist $c \cdot p$ plurisubharmonisch.
5. Ist (p_ν) eine monoton fallende Folge von plurisubharmonischen Funktionen, so ist auch $p := \lim_{\nu\to\infty} p_\nu$ plurisubharmonisch.
6. Sei $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von plurisubharmonischen Funktionen. Ist $p := \sup(p_\alpha)$ halbstetig nach oben und endlich, so ist p auch plurisubharmonisch.
7. Wenn eine plurisubharmonische Funktion p ihr Maximum in einem Punkt des Gebietes G annimmt, so ist p konstant auf G.

Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$, so nennen wir die Menge $T_{\mathbf{a}}$ aller Paare $(\mathbf{a}, \mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, den *Tangentialraum* in $\mathbf{a}$. Offensichtlich ist $T_{\mathbf{a}}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge, $f \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$ und $\mathbf{a} \in U$. Die quadratische Form[3] $\operatorname{Lev}(f) : T_{\mathbf{a}} \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) := \sum_{\nu,\mu} f_{z_\nu \overline{z}_\mu}(\mathbf{a}) w_\nu \overline{w}_\mu$$

heißt die *Leviform* von f in $\mathbf{a}$.

Offensichtlich ist $\operatorname{Lev}(f)$ linear in f.

Beispiele.

1. Im Falle $n = 1$ haben wir $\operatorname{Lev}(s)(a, w) = s_{z\overline{z}}(a) w\overline{w}$. Also ist s genau dann subharmonisch, wenn $\operatorname{Lev}(s)(a, w) \geq 0$ für jedes $a \in G$ und $w \in \mathbb{C}$ ist.

[3] Ist $H : T \times T \to \mathbb{C}$ eine Hermite'sche Form auf einem komplexen Vektorraum, so ist die assoziierte *quadratische Form* $Q : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $Q(v) := H(v, v)$.

2. Sei $f(\mathbf{z}) := \|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z}_i$. Dann ist $\mathrm{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2$ in jedem $\mathbf{a}$.

3. Ist $f \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$ und $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so ist
$$\mathrm{Lev}(\varrho \circ f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \varrho''(f(\mathbf{a})) \cdot |(\partial f)_{\mathbf{a}}(\mathbf{w})|^2 + \varrho'(f(\mathbf{a})) \cdot \mathrm{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}).$$

4. Ist $\mathbf{F} : U \to V \subset \mathbb{C}^m$ eine holomorphe Abbildung und $g \in \mathcal{C}^2(V; \mathbb{R})$, so ist
$$\mathrm{Lev}(g \circ \mathbf{F})(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \mathrm{Lev}(g)(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{w})).$$

5. Für $f \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$ ergibt die Taylor-Entwicklung in $\mathbf{a} \in U$ die Gleichung
$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{a}) + 2\,\mathrm{Re}(Q_f(\mathbf{z} - \mathbf{a})) + \mathrm{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{z} - \mathbf{a}) + R(\mathbf{z} - \mathbf{a}),$$
wobei $Q_f(\mathbf{w}) = \sum_{\nu=1}^n f_{z_\nu}(\mathbf{a}) w_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} f_{z_\nu z_\mu}(\mathbf{a}) w_\nu w_\mu$ ein holomorphes quadratisches Polynom ist, und
$$\lim_{\mathbf{z} \to \mathbf{a}} \frac{R(\mathbf{z} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{a}\|^2} = 0.$$

Die Beweise seien dem interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen.

2.8 Theorem. *Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$ ist genau dann plurisubharmonisch, wenn $\mathrm{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \geq 0$ für jedes $\mathbf{a} \in U$ und jedes $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}$ ist.*

Beweis: Sei $(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ ein Tangentialvektor mit $\mathbf{a} \in G$ und $\alpha(\zeta) := \alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}(\zeta) = \mathbf{a} + \zeta \mathbf{w}$. Dann ist $f \circ \alpha(0) = f(\mathbf{a})$ und
$$(f \circ \alpha)_{\zeta\overline{\zeta}}(0) = \mathrm{Lev}(f \circ \alpha)(0, 1) = \mathrm{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}).$$
Aber f ist genau dann plurisubharmonisch, wenn $f \circ \alpha$ subharmonisch nahe 0 ist, für jedes $\alpha = \alpha_{\mathbf{a},\mathbf{w}}$. Das ist äquivalent dazu, dass $(f \circ \alpha)_{\zeta\overline{\zeta}}(0) \geq 0$ für jedes solche α ist. Und das gilt wiederum genau dann, wenn $\mathrm{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \geq 0$ für jeden Tangentialvektor $\mathbf{w}$ in $\mathbf{a} \in G$ ist. ∎

2.9 Folgerung. *Seien $G_1 \subset \mathbb{C}^n$ und $G_2 \subset \mathbb{C}^m$ Gebiete, $\mathbf{F} : G_1 \to G_2$ eine holomorphe Abbildung und $g \in \mathcal{C}^2(G_2; \mathbb{R})$ eine plurisubharmonische Funktion. Dann ist $g \circ \mathbf{F}$ plurisubharmonisch auf G_1.*

Beweis: Das ist trivial, nach der Formel im Beispiel 4 oben. ∎

Für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist die Funktion $-\log \delta_G$ subharmonisch. In höheren Dimensionen gilt **nicht**, dass diese Funktion für jedes Gebiet G plurisubharmonisch ist.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Eine nicht-konstante stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt eine *Ausschöpfungsfunktion* für G, falls für $c < \sup_G(f)$ alle Subniveaumengen

$$G_c(f) := \{\mathbf{z} \in G \,:\, f(\mathbf{z}) < c\}$$

relativ-kompakt in G sind.

Beispiel.

Für $G = \mathbb{C}^n$ ist die Funktion $f(\mathbf{z}) := \|\mathbf{z}\|^2$ eine Ausschöpfungsfunktion. Für $G \neq \mathbb{C}^n$ definieren wir die *Randdistanz* δ_G durch

$$\delta_G(\mathbf{z}) := \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbb{C}^n \setminus G).$$

Dann ist $-\delta_G$ eine beschränkte und $-\log \delta_G$ eine unbeschränkte Ausschöpfungsfunktion. Wir müssen nur zeigen, daß δ_G stetig ist:

Zu jedem Punkt $\mathbf{z} \in G$ gibt es einen Punkt $\mathbf{r}(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}^n \setminus G$, so dass gilt:

$$\delta_G(\mathbf{z}) = \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{r}(\mathbf{z})) \leq \operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \text{ für jedes } \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \setminus G.$$

Dann haben wir für beliebige Punkte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$

$$\begin{aligned} \delta_G(\mathbf{u}) \,=\, \|\mathbf{u} - \mathbf{r}(\mathbf{u})\| \quad &\leq \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{r}(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \delta_G(\mathbf{v}), \\ \text{und genauso} \quad \delta_G(\mathbf{v}) \quad &\leq \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \delta_G(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Daher ist $|\delta_G(\mathbf{u}) - \delta_G(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Definition. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(G;\mathbb{R})$ heißt *streng plurisubharmonisch*, falls $\operatorname{Lev}(f)(\mathbf{a}, \mathbf{w}) > 0$ für $\mathbf{a} \in G$, $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in T_{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ist.

Für einen Beweis des folgenden Ergebnisses verweisen wir auf das Buch von Michael Range, Chapter II, Proposition 4.14.

2.10 Glättungs-Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion, $K \subset G$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Ausschöpfungsfunktion $g : G \to \mathbb{R}$, so dass gilt:*

1. *$g \geq f$ auf G.*
2. *g ist streng plurisubharmonisch.*
3. *$|g(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z})| < \varepsilon$ auf K.*