Anhang

Der Anhang enthält einige Ergebnisse über Immersionen, Submersionen und Quotienten-Mannigfaltigkeiten, für die in der Vorlesung keine Zeit übrig war.

X und Y seien komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, $F : X \to Y$ sei eine holomorphe Abbildung. Ist $F(x) = y$, (U, φ) eine Karte für X in x und (V, ψ) eine Karte für Y in y, so ist der *Rang* von F in x definiert als der Rang der Jacobi-Matrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\mathbf{z} := \varphi(x)$. Man sieht leicht, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karten abhängt. Offensichtlich ist $\mathrm{rg}_x(F) \le \min(n, m)$. Ist der Rang maximal, so gibt es nur zwei Möglichkeiten:

Definition. Die holomorphe Abbildung $F : X \to Y$ heißt eine *Immersion*, falls $n := \dim(X) \le \dim(Y)$ und $\mathrm{rg}_x(F) = n$ für alle $x \in X$ ist. F heißt eine *Submersion*, falls $n \ge m := \dim(Y)$ und $\mathrm{rg}_x(F) = m$ für alle $x \in X$ ist.

Bemerkung. Ist $F : X \to Y$ eine **injektive** Immersion, dann gibt es zu jedem $x \in X$ Umgebungen $U(x) \subset X$ und $V(F(x)) \subset Y$, so dass $F(U)$ eine Untermannigfaltigkeit von V ist. Ist X kompakt, so ist sogar $F(X)$ eine Untermannigfaltigkeit von Y. Wir verzichten hier auf den Beweis. Der erste Teil beruht auf dem Satz über implizite Funktionen, der zweite Fall auf rein topologischen Argumenten.

A.1 Satz. *Sei $x_0 \in X$ und $y_0 := F(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *F ist eine Submersion in x_0, d.h., es ist $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = \dim(Y)$.*
2. *Es gibt Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$ und $V = V(y_0) \subset Y$ mit $F(U) \subset V$, eine Mannigfaltigkeit Z und eine holomorphe Abbildung $G : U \to Z$, so dass $x \mapsto (F(x), G(x))$ eine biholomorphe Abbildung von U auf eine offene Teilmenge von $V \times Z$ definiert.*
3. *Es gibt eine offene Umgebung $V = V(y_0) \subset Y$ und eine holomorphe Abbildung $s : V \to X$ mit $s(y_0) = x_0$ und $F \circ s = \mathrm{id}_V$. (Man nennt s dann einen* lokalen Schnitt *für F.)*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2) : Wir können uns auf die lokale Situation beschränken und annehmen, dass $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$ und $V = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^m$ offene Umgebungen sind und $F : U \to V$ eine holomorphe Abbildung mit $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathrm{rg}(J_F(\mathbf{0})) = m$ ist.

Wir schreiben $J_F(\mathbf{0}) = \big(J'_F(\mathbf{0}), J''_F(\mathbf{0})\big)$, mit $J'_F(\mathbf{0}) \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ und $J''_F(\mathbf{0}) \in M_{m,n-m}(\mathbb{C})$. Nach Wahl geeigneter Koordinaten können wir annehmen, dass $\det J'_F(\mathbf{0}) \ne 0$ ist. Wir definieren eine neue holomorphe Abbildung $\widetilde{F} : U \to V \times \mathbb{C}^{n-m} \subset \mathbb{C}^n$ durch

$$\widetilde{F}(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') := (F(\mathbf{z}', \mathbf{z}''), \mathbf{z}''), \quad \text{für } \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^m,\ \mathbf{z}'' \in \mathbb{C}^{n-m}.$$

Dann ist

$$J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} J'_F(\mathbf{0}) & J''_F(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n-m} \end{pmatrix}, \qquad \text{und daher } \det J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen gibt es Umgebungen $\widetilde{U}(\mathbf{0}) \subset U$ und $W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $\widetilde{F} : \widetilde{U} \to W$ biholomorph ist.

$Z := \mathbb{C}^{n-m}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit und $G := \mathrm{pr}_2 : \widetilde{U} \to Z$ mit $(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \mapsto \mathbf{z}''$ ist eine holomorphe Abbildung, so dass $(F, G) = \widetilde{F}$ biholomorph nahe $\mathbf{0}$ ist.

$(2) \implies (3)$: Sind U, V, Z und G gegeben, so dass $F(U) \subset V$ und $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ biholomorph ist, so kann $s : V \to X$ definiert werden durch

$$s(y) := (F, G)^{-1}(y, G(x_0)).$$

Dann ist $(F, G)(s(y_0)) = (y_0, G(x_0)) = (F, G)(x_0)$ und daher $s(y_0) = x_0$. Außerdem ist $(F, G) \circ s(y) = (F, g) \circ (F, G)^{-1}(y, G(x_0)) = (y, G(x_0))$, also $F \circ s(y) = y$.

$(3) \implies (1)$: Ist s ein lokaler Schnitt für F mit $s(y_0) = x_0$, dann ist $J_F \cdot J_s$ nahe y_0 die Einheitsmatrix. So folgt unmittelbar, dass J_F eine surjektive Abbildung repräsentiert, dass also $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = m$ ist. ∎

A.2 Folgerung. *Ist $F : X \to Y$ eine Submersion, so ist für jedes $y \in Y$ die Faser $F^{-1}(y)$ leer oder eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X.*

Ist F zusätzlich surjektiv und $K \subset Y$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \subset X$ eine $(n-m+k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

BEWEIS: Wir betrachten einen Punkt $x_0 \in X$. Es sei $M := F^{-1}(y_0)$ die Faser über $y_0 := F(x_0)$. Dann können wir Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$, $V = V(y_0) \subset Y$, eine $(n-m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Z, und eine holomorphe Abbildung $G : U \to Z$ finden, so dass $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ biholomorph ist. Folglich ist $M \cap U = (F|_U, G)^{-1}(\{y_0\} \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.

Ist $K \subset V$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \cap U = (F|_U, G)^{-1}(K \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m + k$. ∎

Sei G eine Gruppe mit der Struktur einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Das Inverse von $g \in G$ sei mit g^{-1} bezeichnet, das neutrale Element mit e und die Verknüpfung zweier Elemente $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 g_2$.

Definition. G heißt eine *komplexe Liegruppe*, falls die folgenen Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ (von G nach G) ist holomorph.

2. Die Abbildung $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ (von $G \times G$ nach G) ist holomorph.

Es gibt viele Beispiele von komplexen Liegruppen. Das einfachste ist der $\mathbb{C}^n$, mit der Vektoraddition als Verknüpfung. Ein anderes Beispiel ist die Gruppe $\mathbb{C}^*$ bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation komplexer Zahlen.

Das wichtigste Beispiel ist die *allgemeine lineare Gruppe*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, \det \mathbf{A} \neq 0\}.$$

Ihre komplexe Struktur erhält sie als offene Teilmenge des $\mathbb{C}^{n^2}$. Die Multiplikation von Matrizen ist bilinear, und die Determinanten, die bei der Berechnung des Inversen einer Matrix $\mathbf{A}$ auftreten, sind Polynome in den Koefficienten von $\mathbf{A}$.

Jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ definiert eine lineare und deshalb holomorphe Abbildung $\Phi_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\Phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) := \mathbf{z} \cdot \mathbf{A}^{\,t}.$$

Dann ist $\Phi_{\mathbf{AB}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{AB})^{\,t} = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{B}^{\,t}\mathbf{A}^{\,t}) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{B}^{\,t}) \cdot \mathbf{A}^{\,t} = \Phi_{\mathbf{A}}(\Phi_{\mathbf{B}}(\mathbf{z}))$. Ist $\mathbf{E}_n$ die Einheitsmatrix, so ist $\Phi_{\mathbf{E}_n} = \mathrm{id}$. Ist umgekehrt $\mathbf{A}$ eine Matrix mit $\Phi_{\mathbf{A}} = \mathrm{id}$, so muss $\mathbf{A}$ die Einheitsmatrix sein, denn $\Phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}^{\,t}$ ist das Transponierte der i-ten Spalte von $\mathbf{A}$.

Wir wollen diese Situation verallgemeinern. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und G eine komplexe Liegruppe.

Definition. Wir sagen, G *operiert analytisch* auf X (oder ist eine *komplexe (Lie-) Transformationsgruppe* auf X), falls es eine holomorphe Abbildung $\Phi : G \times X \to X$ gibt, mit

$$\Phi(g_1 g_2, x) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) \text{ für } g_1, g_2 \in G, x \in X.$$

Die holomorphe Abbildung $x \mapsto \Phi(g, x)$ wird mit Φ_g bezeichnet. Wir sagen, G operiert *effektiv* oder *treu* auf X, wenn aus $\Phi_g = \mathrm{id}_X$ folgt, dass $g = e$ ist.

Meist schreiben wir gx statt $\Phi(g, x)$ oder $\Phi_g(x)$. Ein Punkt $x \in X$ mit $gx = x$ heißt ein *Fixpunkt* von g. Wir sagen, G operiert *frei*, wenn nur das neutrale Element $e \in G$ Fixpunkte in X hat. Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ operiert analytisch und treu auf $\mathbb{C}^n$, aber nicht frei.

Sei $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{2n}\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$. Dann ist das Gitter

$$\Gamma := \mathbb{Z}\mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{w}_{2n}$$

eine Untergruppe der (additiven) Gruppe $\mathbb{C}^n$, erzeugt von $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{2n}$. Die Gruppe Γ operiert auf $\mathbb{C}^n$ durch Translation: $\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{z}) := \mathbf{z} + \mathbf{w}$. Das ist ein Beispiel einer freien Gruppenoperation.

Wir wollen jetzt ein allgemeines Verfahren angeben, wie Gruppenoperationen zu neuen Beispielen komplexer Mannigfaltigkeiten führen.

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sind $x, y \in X$ äquivalent, so schreiben wir $x \sim y$ oder $R(x, y)$. Für $x \in X$ sei

$$X(x) := \{y \in X \,:\, y \sim x\} = \{y \in X \,:\, R(y, x)\}$$

die Äquivalenzklasse von x in X. Diese Klassen ergeben eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Mengen. Die Menge X/R aller Äquivalenzklassen nennen wir den *topologischen Quotienten* von X *modulo* R.

Sei $\pi : X \to X/R$ die kanonische Projektion, gegeben durch $\pi : x \mapsto X(x)$. Dann wird X/R mit der feinsten Topologie versehen, so dass π stetig wird. Das bedeutet, dass eine Menge $U \subset X/R$ genau dann offen ist, wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Wir nennen diese Topologie die *Quotiententopologie*.

Eine Menge $A \subset X$ heißt *saturiert* bezüglich der Relation R, falls gilt:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = A.$$

A.3 Satz.

1. *A saturiert $\iff$ $A = \bigcup_{x \in A} X(x)$.*
2. *Ist $U \subset X/R$ offen, so ist $\pi^{-1}(U)$ offen und saturiert.*
3. *Ist $W \subset X$ offen und saturiert, so ist $\pi(W) \subset X/R$ offen.*

Trivial!

A.4 Satz. *Sei Z ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X/R \to Z$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Z$ stetig ist.*

Die Aussage ist ebenfalls trivial, da ja $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ ist.

Wir wollen nun X/R so mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen, dass π holomorph wird. Auf jeden Fall muss X/R dann ein Hausdorff-Raum sein. Was kann man noch herausfinden? Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}^k$ ein komplexes Koordinatensystem für X/R, so ist $\widehat{U} := \pi^{-1}(U)$ eine offene saturierte Menge in X und $\mathbf{f} := \varphi \circ \pi : \widehat{U} \to \mathbb{C}^k$ muss eine holomorphe Abbildung mit $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x)) = \pi^{-1}(\pi(x)) = X(x)$ werden. Die Fasern von $\mathbf{f}$ müssen also Äquivalenzklassen werden, und die Äquivalenzklassen müssen daher analytische Mengen sein. Wenn π sogar zu einer Submersion wird, dann ist $\mathrm{rg}_x(\mathbf{f}) = k$ für jedes $x \in \widehat{U}$, und die Fasern (und damit die Äquivalenzklassen) sind $(n-k)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wir zeigen jetzt, dass diese Bedingungen tatsächlich auch hinreichend für die Existenz einer geeigneten komplexen Struktur auf X/R sind.

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{Z} = \{Z_\iota : \iota \in I\}$ eine Zerlegung von X in d-dimensionale analytische Mengen. Für $x \in X$ sei $\iota(x) \in I$ der eindeutig bestimmte Index mit $x \in Z_{\iota(x)}$. Dann gibt es eine Äquivalenzrelation R auf X, so dass die Äquivalenzklasse $X(x)$ genau die analytische Menge $Z_{\iota(x)}$ ist. Wir betrachten den topologischen Quotienten X/R und die kanonische Projektion $\pi : X \to X/R$ und nehmen an, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. X/R ist ein Hausdorff-Raum.
2. Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es eine saturierte offene Umgebung $\widehat{U}$ von $X(x_0)$ in X und eine holomorphe Abbildung $\mathbf{f} : \widehat{U} \to \mathbb{C}^{n-d}$, so dass gilt
   (a) $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x)) = X(x)$ für alle $x \in \widehat{U}$.
   (b) $\mathrm{rg}_x(\mathbf{f}) = n - d$ für $x \in \widehat{U}$.

A.5 Satz. *Unter den obigen Bedingungen trägt X/R eine eindeutig bestimmte Struktur einer $(n-d)$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, so dass $\pi : X \to X/R$ eine holomorphe Submersion ist.*

BEWEIS: Sei $x_0 \in X$ gegeben. Dann gibt es eine offene Umgebung $\widehat{U}$ von $X(x_0)$ in X mit $\pi^{-1}\big(\pi(\widehat{U})\big) = \widehat{U}$ und eine Submersion $\mathbf{f} : \widehat{U} \to \mathbb{C}^{n-d}$, deren Fasern Äquivalenzklassen $X(x)$ sind. Ist $\mathbf{z}_0 := \mathbf{f}(x_0)$, so gibt es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{z}_0) \subset \mathbb{C}^{n-d}$ und einen holomorphen Schnitt $s : W \to \widehat{U}$ (mit $s(\mathbf{z}_0) = x_0$ und $\mathbf{f} \circ s = \mathrm{id}_W$). Für $\mathbf{z} \in W$ gilt $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{z}) = X(s(\mathbf{z}))$ und daher

$$\pi^{-1}(\pi(s(W))) = \bigcup_{\mathbf{z} \in W} X(s(\mathbf{z})) = \bigcup_{\mathbf{z} \in W} \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}^{-1}(W).$$

Da dies eine offene Menge ist, ist auch $\pi(s(W)) \subset X/R$ offen. Wir definieren ein komplexes Koordinatensystem $\varphi : \pi(s(W)) \to \mathbb{C}^{n-d}$ durch

$$\varphi(\pi(s(\mathbf{z}))) := \mathbf{z}.$$

Dann ist $\varphi(\pi(x)) = \mathbf{f}(x)$. Also ist φ wohldefiniert und stetig. φ ist auch bijektiv, mit $\varphi^{-1}(\mathbf{z}) = \pi(s(\mathbf{z}))$, und deshalb ein Homöomorphismus.

Sei nun ψ ein anderes Koordinatensystem, gegeben durch $\psi(\pi(t(\mathbf{z}))) := \mathbf{z}$, wobei t ein lokaler Schnitt zu einer geeigneten Submersion $\mathbf{g}$ ist. Dann folgt:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{z}) = \varphi(\pi(t(\mathbf{z}))) = \mathbf{f}(t(\mathbf{z})).$$

Die Koordinatentransformationen sind holomorph. ∎

Sei G eine komplexe Liegruppe, die analytisch auf einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X operiert. Dann definiert

$$R(x, y) :\Longleftrightarrow \quad \exists\, g \in G \text{ mit } y = gx$$

eine Äquivalenzrelation auf X. Die Äquivalenzklasse $X(x) = \{y \in X \,:\, \exists g \in G \text{ mit } y = gx\}$ nennt man den *Orbit* von x unter der Gruppenoperation und schreibt dafür auch Gx. Den topologischen Quotienten X/R nennt man den *Orbitraum* und bezeichnet ihn auch mit X/G.

Wir betrachten einen sehr speziellen Fall.

Definition. Die Gruppe G operiert *eigentlich diskontinuierlich*, falls es zu allen Punkten $x, y \in X$ offene Umgebungen $U = U(x)$ und $V = V(y)$ gibt, so dass

$$\{g \in G \,:\, gU \cap V \neq \varnothing\}$$

leer oder eine endliche Menge ist.

Hier sind die Orbits Gx diskrete Teilmengen von X und daher 0-dimensionale analytische Teilmengen. Ist die Operation frei, so können wir zeigen, dass alle Bedingungen erfüllt sind, damit X/G eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi : X \to X/G$ eine holomorphe Submersion wird (was in diesem Fall bedeutet, dass π eine unverzweigte Überlagerung ist).

A.6 Lemma. *G operiere frei und eigentlich diskontinuierlich auf X, und es seien zwei Punkte $x_0, y_0 \in X$ gegeben.*

1. *Wenn es ein $g_0 \in G$ mit $y_0 = g_0 x_0$ gibt, so gibt es Umgebungen $U = U(x_0)$ und $V = V(y_0)$, so dass $gU \cap V = \varnothing$ für $g \neq g_0$ ist. Im Falle $y_0 = x_0$ und $g_0 = e$ kann man $V = U$ wählen.*

2. *Ist $gx_0 \neq y_0$ für alle $g \in G$, so gibt es Umgebungen $U = U(x_0)$ und $V = V(y_0)$, so dass $gU \cap V = \varnothing$ für alle $g \in G$ ist.*

BEWEIS: Zunächst wählen wir Umgebungen $U_0(x_0)$ und $V_0(y_0)$, so dass

$$M := \{g \in G \,:\, gU_0 \cap V_0 \neq \varnothing\}$$

endlich oder leer ist. Wir brauchen nichts zu beweisen, wenn $M = \{g_0\}$ (im ersten Fall) oder $M = \varnothing$ (im zweiten Fall) ist. Deshalb nehmen wir an, dass es Elemente $g_1, \ldots, g_N$, $N \geq 1$ mit $M = \{g_0, g_1, \ldots, g_N\}$ (im ersten Fall) und $M = \{g_1, \ldots, g_N\}$ (im zweiten Fall) gibt. Dann setzen wir $y_\lambda := g_\lambda x_0$ für $\lambda = 1, \ldots, N$. Da G frei operiert, ist $y_\lambda \neq y_0$ für $\lambda = 1, \ldots, N$.

Wir wählen Umgebungen $W_\lambda = W_\lambda(y_\lambda)$ und $V = V(y_0) \subset V_0$, so dass $W_\lambda \cap V = \varnothing$ ist, und wir wählen eine Umgebung $U = U(x_0) \subset U_0$, so dass $g_\lambda U \subset W_\lambda$ für $\lambda = 1, \ldots, N$ gilt. Dann ist $gU \cap V = \varnothing$ für $g \neq g_0$ (im ersten Fall) und $g \in G$ (im zweiten Fall). ∎

A.7 Satz. *G operiere frei und eigentlich dikontinuierlich auf X. Dann trägt X/G eine eindeutig bestimmte Struktur einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, so dass $\pi : X \to X/G$ eine unverzweigte holomorphe Überlagerung ist.*

BEWEIS: Sei $U \subset X$ eine offene Menge. Dann ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ eine offene Menge und daher auch $\pi(U)$ offen. Für jedes $x_0 \in X$ können wir eine offene Umgebung $U = U(x_0)$ wählen, so dass $gU \cap U = \varnothing$ für $g \neq e$ ist. Dann ist $\pi : U \to \pi(U)$ bijektiv.

(1) Wir müssen zeigen, dass X/G ein Hausdorff-Raum ist. Sind $x_1, x_2 \in X$ mit $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ gegeben, so ist $gx_1 \neq x_2$ für alle $g \in G$. Es gibt offene Umgebungen $U = U(x_1)$ und $V = V(x_2)$ mit $gU \cap V = \varnothing$ für jedes $g \in G$. Dann sind $\pi(U)$ und $\pi(V)$ disjunkte offene Umgebungen von $\pi(x_1)$ und $\pi(x_2)$.

(2) Wir verifizieren die anderen Bedingungen. Sei $x_0 \in X$ gegeben und $U = U(x_0) \subset X$ eine kleine offene Umgebung, so dass $\pi : U \to \pi(U)$ ein Homöomorphismus ist und es ein komplexes Koordinatensystem $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ gibt. Dann kann $\mathbf{f} : \widehat{U} := \pi^{-1}(\pi(U)) \to \mathbb{C}^n$ durch $\mathbf{f}(gx) := \varphi(x)$ definiert werden, für $x \in U$ und $g \in G$. Es ist klar, dass $\mathbf{f}$ wohldefiniert ist. Die Fasern von $\mathbf{f}$ sind die G-Orbits, und auf gU ist $\mathbf{f}(y) = \varphi(g^{-1}(y))$. Damit folgt, dass $\mathbf{f}$ holomorph und $\mathrm{rg}_y(\mathbf{f}) = n$ ist, für alle $y \in \widehat{U}$.

Ist U klein genug, so ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$, mit paarweise disjunkten Mengen gU, die topologisch äquivalent zu $\pi(U)$ sind. Also ist π eine unverzweigte Überlagerung. ∎

Beispiele:

A) Tori.

Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_{2n}\}$ eine RR-Basis von $\mathbb{C}^n$. Wir wissen schon, dass die diskrete Gruppe $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_{2n}$ frei auf $\mathbb{C}^n$ durch Translationen operiert. Die Menge

$$A_{\mathbf{w}} := \Gamma + \mathbf{w} = \{\omega + \mathbf{w} \,:\, \omega \in \Gamma\}$$

ist der Orbit von $\mathbf{w}$.

Die Gruppe Γ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{C}^n$: Seien $\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n$ gegeben. Ist $\mathbf{w}_0 = \omega_0 + \mathbf{z}_0$ für ein $\omega_0 \in \Gamma$, so wählen wir

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \inf\{\|\omega\| \,:\, \omega \in \Gamma \setminus \{0\}\}.$$

Dann ist $(\omega + B_\varepsilon(\mathbf{z}_0)) \cap B_\varepsilon(\mathbf{w}_0) = \varnothing$, außer für $\omega = \omega_0$.

Ist $\mathbf{w}_0 - \mathbf{z}_0 \notin \Gamma$ und

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \mathrm{dist}(\mathbf{w}_0, \Gamma + \mathbf{z}_0),$$

so ist $(\omega + B_\varepsilon(\mathbf{z}_0)) \cap B_\varepsilon(\mathbf{w}_0) = \varnothing$ für jedes ω.

Die n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $T^n = T^n_\Gamma := \mathbb{C}^n/\Gamma$ ist der schon bekannte *komplexe Torus*.

B) Hopf-Mannigfaltigkeiten.

Sei $\varrho > 1$ eine feste reelle Zahl und $n > 1$. Dann operiert die (multiplikative) Gruppe $\Gamma := \{\varrho^k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ frei auf $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ durch $\mathbf{z} \mapsto \varrho^k \cdot \mathbf{z}$.

Die Operation ist eigentlich diskontinuierlich. Um das zu sehen, definieren wir die Mengen

$$U_r := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, r < \|\mathbf{z}\| < \varrho r\}, \text{ für } r > 0.$$

Dann sind die Mengen $\varrho^k U_r$ paarweise disjunkt. Sind zwei Punkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gegeben, so kann man ein $r > 0$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so dass $\mathbf{z}_1 \in U := U_r$ und $\mathbf{z}_2 \in V := \varrho^k U_r$ ist. Der Fall $k = 0$ ist erlaubt. Nun ist $\varrho^s U \cap V = \varnothing$, außer im Falle $s = k$.

Also ist $H = H_\Gamma := (\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\})/\Gamma$ eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to H$ ist eine unverzweigte holomorphe Überlagerung. Natürlich ist H die ebenfalls schon bekannte *Hopf-Mannigfaltigkeit*.

C) Projektive Räume.

In $X := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$R(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } \mathbf{w} = \lambda \mathbf{z}.$$

Die Äquivalenzklasse von $\mathbf{z}$ ist die Menge $L_{\mathbf{z}} = \mathbb{C}\mathbf{z} \setminus \{\mathbf{0}\}$, also haben wir eine Zerlegung von X in 1-dimensionale analytische Mengen (die wir auch als Orbits der kanonischen Operation von $\mathbb{C}^*$ auf X durch skalare Multiplikation auffassen können). Der topologische Quotient $\mathbb{P}^n := X/R = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{C}^*$ ist der n-dimensionale komplex-projektive Raum. Wie üblich sei $\pi : X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ die kanonische Projektion.

Es soll gezeigt werden, dass man die komplexe Struktur auf dem $\mathbb{P}^n$ auch mit der oben vorgestellten Methode gewinnen kann:

Ist $W \subset X$ eine offene Menge, so ist $\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda \cdot W$ eine saturierte offene Menge in X und daher $\pi(W)$ offen in $\mathbb{P}^n$. Das trifft z.B. auf

$$\widehat{U}_i := \{\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \,:\, z_i \neq 0\} \subset X, \quad i = 0, \ldots, n,$$

zu. Die Mengen $U_i := \pi(\widehat{U}_i)$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$.

Dass der $\mathbb{P}^n$ ein Hausdorff-Raum ist, haben wir schon früher gezeigt.

Sei nun ein Punkt $\mathbf{z}_0 = \big(z_0^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}\big) \in X$ gegeben. Dann gibt es einen Index i mit $z_i^{(0)} \neq 0$, und $\mathbf{z}_0$ liegt in $\widehat{U}_i$. Wir definieren $\mathbf{f}_i : \widehat{U}_i \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\mathbf{f}_i(z_0, \ldots, z_n) := \Big(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\Big).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^{-1}(\mathbf{f}_i(\mathbf{z})) &= \Big\{\mathbf{w} \in \widehat{U}_i \,:\, \frac{w_j}{w_i} = \frac{z_j}{z_i} \text{ for } j \neq i\Big\} \\ &= \Big\{\mathbf{w} \in \widehat{U}_i \,:\, \mathbf{w} = \frac{w_i}{z_i} \cdot \mathbf{z}\Big\} \\ &= \pi^{-1}(\pi(\mathbf{z})). \end{aligned}$$

Ist ein Punkt $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_n) \in \widehat{U}_i$ gegeben, so definieren wir einen holomorphen Schnitt $s : \mathbb{C}^n \to \widehat{U}_i$ durch $s(z_1, \ldots, z_n) := (u_i z_1, \ldots, u_i z_i, u_i, u_i z_{i+1}, \ldots, u_i z_n)$. Dann ist

$$s\Big(\frac{u_0}{u_i}, \ldots, \frac{u_{i-1}}{u_i}, \frac{u_{i+1}}{u_i}, \ldots, \frac{u_n}{u_i}\Big) = (u_0, \ldots, u_n),$$

und

$$\mathbf{f}_i \circ s(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n).$$

Also ist $\mathbf{f}_i$ eine Submersion und $\mathrm{rg}_{\mathbf{z}}(\mathbf{f}_i) = n$ für alle $\mathbf{z}$.

Somit ist $\mathbb{P}^n$ eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ eine holomorphe Submersion. Lokale Koordinaten sind durch die Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi_i \circ \pi = \mathbf{f}_i$ gegeben. Das bedeutet:

$$\varphi_i(z_0 : \ldots : z_n) = \Big(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\Big).$$

Das sind die lokalen Koordinaten, die wir schon kennen.

D) Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

Die 1-dimensionalen komplexen Untervektorräume des $\mathbb{C}^{n+1}$ können mit den Punkten des n-dimensionalen projektiven Raumes identifiziert werden, und wir haben dieser Menge eine komplexe Struktur gegeben. Jetzt wollen wir das gleiche bei der Menge $G_{k,n}$ der k-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{C}^n$ machen. Die Idee ist die folgende: Ist $V_0 \subset \mathbb{C}^n$ ein festes Element von $G_{k,n}$, dann wählen wir einen $(n-k)$-dimensionalen Unterraum $W_0 \subset \mathbb{C}^n$, so dass $V_0 \oplus W_0 = \mathbb{C}^n$ ist. Wir suchen nach einer Topologie auf $G_{k,n}$, so dass die Menge aller k-dimensionalen Unterräume V mit $V \oplus W_0 = \mathbb{C}^n$ eine Umgebung von V_0 in $G_{k,n}$ bildet.

Aber wie kommen wir zu komplexen Koordinaten? Im Falle $G_{1,n+1} = \mathbb{P}^n$ betrachten wir z.B. $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{e}_0$ (mit $\mathbf{e}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$) und $W_0 = \{(z_0, \ldots, z_n) \,:\, z_0 = 0\}$. Dann ist $V_0 \oplus W_0 = \mathbb{C}^{n+1}$. Ein Vektor $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n) \neq \mathbf{0}$ erzeugt genau dann einen 1-dimensionalen Raum V mit $V \oplus W_0 = \mathbb{C}^{n+1}$, wenn $z_0 \neq 0$ ist. Multiplikation mit einem komplexen Skalar $\neq 0$ verändert den Raum V nicht. Deshalb ist V durch

$$z_0^{-1} \cdot \mathbf{z} = z_0^{-1} \cdot (z_0, \widetilde{\mathbf{z}}) = (1, z_0^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{z}}) \quad \text{mit } \widetilde{\mathbf{z}} = (z_1, \ldots, z_n)$$

eindeutig bestimmt. Die Abbildung $\mathbf{f} : V \mapsto z_0^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^n$ ergibt die wohlbekannten lokalen Koordinaten.

Um diese Prozedur auf höhere k übertragen zu können, nehmen wir noch einen etwas anderen Standpunkt ein: Jeder Raum V mit $V \oplus W_0 = \mathbb{C}^{n+1}$ hat die Form

Graph(φ_V), wobei $\varphi_V : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ eine lineare Abbildung ist, gegeben durch $\varphi_V(1) := \mathbf{f}(V)$.

Ist nun $V_0 \subset \mathbb{C}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum und $V_0 \oplus W_0 = \mathbb{C}^n$, so hat jeder andere k-dimensionale Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ mit $V \oplus W_0 = \mathbb{C}^n$ die Form Graph(φ_V), mit einer Abbildung $\varphi_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_0, W_0)$. Halten wir Basen von V_0 und W_0 fest, so ergibt die Matrix von φ_V bezüglich dieser Basen lokale Koordinaten in $M_{k,n-k}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{k(n-k)}$.

Jetzt wollen wir die Ideen im Detail ausführen. Ein geordnetes k-Tupel von linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{C}^n$ kann in einer Matrix angeordnet werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = k$. Die Menge

$$\mathrm{St}(k, n) := \{\mathbf{A} \in M_{k,n}(\mathbb{C}) \,:\, \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = k\}$$

heißt die *komplexe Stiefel-Mannigfaltigkeit* vom Typ (k, n). Da ihr Komplement in $M_{k,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{kn}$ eine analytische Menge ist, gegeben durch das Verschwinden aller $(k \times k)$-Minoren von $\mathbf{A}$, ist $\mathrm{St}(k, n)$ eine offene Menge in $M_{k,n}(\mathbb{C})$ und daher eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Gruppe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ operiert auf $\mathrm{St}(k, n)$ durch Multiplikation von links, und jeder Orbit dieser Gruppenoperation repräsentiert genau einen k-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Den topologischen Quotienten

$$G_{k,n} = \mathrm{St}(k, n)/\,\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$$

nennt man die *komplexe Grassmann-Mannigfaltigkeit* vom Typ (k, n).

Ist z.B. $W_0 = \{\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \,:\, w_1 = \cdots = w_k = 0\}$, so repräsentiert eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{St}(k, n)$ genau dann eine Basis eines k-dimensionalen Raumes V mit $V \oplus W_0 = \mathbb{C}^n$, wenn $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_0|\widetilde{\mathbf{A}})$ ist, mit $\mathbf{A}_0 \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ und $\widetilde{\mathbf{A}} \in M_{k,n-k}(\mathbb{C})$. In diesem Fall hat V die Form Graph(φ_{V}) für eine lineare Abbildung $\varphi_V : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{n-k}$. Natürlich ist V durch die Matrix $\mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{E}_k|\mathbf{A}_0^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{A}})$ eindeutig bestimmt, und $\mathbf{A}_0^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}$ ist die Matrix von φ_V bezüglich der Standardbasen.

Jetzt betrachten wir die Menge von Multi-Indizes

$$\mathcal{I}_{k,n} := \{I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k \,:\, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}.$$

Zu jedem $\mathbf{A} \in \mathrm{St}(k, n)$ gibt es ein $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_{k,n}$, so dass gilt:

$$\mathbf{A}_I := \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ki_1} & \cdots & a_{ki_k} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}).$$

Dann gibt es eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}_I \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_I = (\mathbf{A}_I | \widetilde{\mathbf{A}}_I)$ ist.

Für festes I setzen wir

$$V_I := \{\mathbf{A} \in \mathrm{St}(k,n) \,:\, \det \mathbf{A}_I \neq 0\}.$$

Wir bemerken, dass $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{A})_I = \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}_I$ und $\widetilde{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{A})}_I = \mathbf{G} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_I$ für $\mathbf{G} \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ ist. Daher ist V_I invariant unter der Operation von $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$.

A.8 Hilfssatz. *Sei $\pi_{k,n} : \mathrm{St}(k,n) \to G_{k,n}$ die kanonische Projektion. Dann ist*

$$\pi_{k,n}^{-1}(\pi_{k,n}(V_I)) = V_I \textit{ für jedes } I \in \mathcal{I}_{k,n}.$$

BEWEIS: Sei $\mathbf{A} \in \pi_{k,n}^{-1}(\pi_{k,n}(V_I))$ gegeben. Dann gibt es ein $\mathbf{A}^* \in V_I$ mit $\pi_{k,n}(\mathbf{A}) = \pi_{k,n}(\mathbf{A}^*)$. Das bedeutet, dass es eine Matrix $\mathbf{G} \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}^*$ gibt. Da V_I invariant unter der Operation von $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ ist, liegt $\mathbf{A}$ in V_I. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. ∎

Also ist V_I eine saturierte offene Teilmenge von $\mathrm{St}(k,n)$, und $U_I := \pi_{k,n}(V_I)$ ist offen in $G_{k,n}$. Es sei dem Leser überlassen, zu zeigen, dass $G_{k,n}$ ein Hausdorff-Raum ist.

Ist $E_I \subset \mathbb{C}^n$ erzeugt von $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}$ und $F_I \subset \mathbb{C}^n$ von den übrigen $\mathbf{e}_j$, so ist $E_I \oplus F_I = \mathbb{C}^n$, und jeder k-dimensionale Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ mit $V \oplus F_I = \mathbb{C}^n$ wird durch eine Matrix $\mathbf{A} \in V_I$ repräsentiert. Die eindeutig bestimmte Matrix $\mathbf{A}_I^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_I \in M_{k,n-k}(\mathbb{C})$ beschreibt die lineare Abbildung $\varphi_V : E_I \to F_I$. Daher definieren wir die holomorphe Abbildung $\mathbf{f}_I : V_I \to M_{k,n-k}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{k(n-k)}$ durch

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{A}) := \mathbf{A}_I^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_I.$$

Es ist klar, dass $\mathbf{f}_I$ holomorph ist, und wegen

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{G} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{A}_I)^{-1} \cdot (\mathbf{G} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_I) = \mathbf{f}_I(\mathbf{A}),$$

respektiert $\mathbf{f}_I$ die Fasern von $\pi_{k,n}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbf{f}_I$ maximalen Rang hat. Dazu konstruieren wir Schnitte:

Sei $\mathbf{A} \in V_I$ gegeben. Dann definieren wir $s : M_{k,n-k}(\mathbb{C}) \to V_I$ durch

$$s(\mathbf{B}) := \mathbf{A}_I \cdot (\mathbf{E}_k | \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}.$$

Das ist eine holomorphe Abbildung mit $s(\mathbf{f}_I(\mathbf{A})) = (\mathbf{A}_I | \widetilde{\mathbf{A}}_I) \cdot \mathbf{P}_I^{-1} = \mathbf{A}$ und

$$\mathbf{f}_I \circ s(\mathbf{B}) = \mathbf{f}_I(\mathbf{A}_I \cdot (\mathbf{E}_k | \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}) = \mathbf{A}_I^{-1} \cdot (\mathbf{A}_I \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}.$$

Also ist $\mathbf{f}_I$ eine Submersion und $G_{k,n}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$. Komplexe Koordinaten sind gegeben durch $\varphi_I : U_I \to M_{k,n-k}(\mathbb{C})$ mit

$$\varphi_I(\pi_{k,n}(\mathbf{A})) := \mathbf{A}_I^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_I.$$

Sei $S_{k,n} := \{\mathbf{A} \in \mathrm{St}(k,n) \,:\, \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}}^t = \mathbf{E}_k\}$ die Menge der Orthonormalsysteme von k Vektoren in $\mathbb{C}^n$. Dann ist $S_{k,n}$ eine kompakte Menge, und $\pi_{k,n} : S_{k,n} \to G_{k,n}$ ist surjektiv. Also ist $G_{k,n}$ kompakt.

Jetzt zeigen wir, dass die Grassmann-Mannigfaltigkeiten projektiv-algebraisch sind. Sei $0 \le k \le n$ gegeben und $N := \binom{n}{k} - 1$. Wir identifizieren $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{C}^{N+1}$ und definieren die *Plücker-Einbettung* $\mathrm{pl} : G_{k,n} \to \mathbb{P}^N$ wie folgt: Hat ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ die Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$, so sei

$$\mathrm{pl}(V) := \pi(\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_k).$$

Es ist klar, dass das eine wohldefinierte injektive Abbildung ist. Um zu sehen, dass es sich um eine holomorphe Immersion handelt, wählen wir eine andere Beschreibung. Wie oben benutzen wir die Menge der Multi-Indizes

$$\mathcal{I}_{k,n} = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \,:\, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}.$$

Jedem $I \in \mathcal{I}_{k,n}$ entspricht eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}_I \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_I = (\mathbf{A}_I | \widetilde{\mathbf{A}}_I)$ für $\mathbf{A} \in \mathrm{St}(k,n)$ gilt. Wir definieren $\widetilde{p} : \mathrm{St}(k,n) \to \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ durch

$$\widetilde{p}(\mathbf{A}) := (\det \mathbf{A}_I \mid I \in \mathcal{I}_{k,n}).$$

Dann ist $\widetilde{p}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{A}) = \det \mathbf{G} \cdot \widetilde{p}(\mathbf{A})$, und $\widetilde{p}$ induziert eine Abbildung $p : G_{k,n} \to \mathbb{P}^N$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}(k,n) & \xrightarrow{\widetilde{p}} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ {\scriptstyle \pi_{k,n}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi} \\ G_{k,n} & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Für $I = (i_1, \ldots, i_k)$ sei $e_I := \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$. Dann ist

$$\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_k = \sum_{I \in \mathcal{I}_{k,n}} \det \mathbf{A}_I \cdot e_I,$$

und daher $p = \mathrm{pl}$.

Sei $\varphi_I : U_I \to M_{k,n-k}(\mathbb{C})$ ein komplexes Koordinatensystem für $G_{k,n}$. Dann ist $\varphi_I^{-1}(\mathbf{B}) = \pi_{k,n}\big((\mathbf{E}_k | \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}\big)$ und

$$p \circ \varphi_I^{-1}(\mathbf{B}) = \pi \circ \widetilde{p}\big((\mathbf{E}_k | \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}\big) = \pi\Big(\det\big((\mathbf{E}_k | \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}\big)_J \,:\, J \in \mathcal{I}_{k,n}\Big).$$

Offensichtlich ist p eine holomorphe Abbildung.

Jede Matrix $\mathbf{B} \in M_{k,n-k}(\mathbb{C})$ kann in der Form

$$\mathbf{B} = \big(\mathbf{b}_{k+1}^t, \ldots, \mathbf{b}_n^t\big)$$

geschrieben werden, mit $\mathbf{b}_\mu \in \mathbb{C}^k$ für $\mu = k+1, \dots, n$. Wir haben

$$\det\bigl((\mathbf{E}_k|\mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}\bigr)_I = 1,$$

und wenn $J = (I \setminus \{i_\nu\}) \cup \{\mu\}$ für ein $\nu \in \{1, \dots, k\}$ und ein $\mu \in \{k+1, \dots, n\}$ ist, so ist

$$\bigl((\mathbf{E}_k|\mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}\bigr) \cdot \mathbf{P}_J = \bigl(\mathbf{e}_1^t, \dots, \mathbf{e}_{\nu-1}^t, \mathbf{b}_\mu^t, \mathbf{e}_{\nu+1}^t, \dots, \mathbf{e}_k^t\bigr),$$

und daher $\det\bigl((\mathbf{E}_n|\mathbf{B}) \cdot \mathbf{P}_I^{-1}\bigr)_J = b_{\nu\mu}$. Also enthält $p \circ \varphi_I^{-1}(\mathbf{B})$ die Komponenten 1, $b_{\nu\mu}$ für alle ν, μ und einige andere Komponenten. Daraus folgt, dass pl eine Immersion ist. Da $G_{k,n}$ kompakt ist, ist pl eine Einbettung.