§ 3 Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition. Sei $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, $\infty \in G$. Eine holomorphe oder meromorphe Funktion f auf $U \setminus \{\infty\}$ heißt *holomorph (bzw. meromorph) im Unendlichen*, falls $z \mapsto f(1/z)$ im Nullpunkt holomorph fortsetzbar ist (bzw. dort eine Polstelle besitzt).

Bemerkung. In beiden Fällen besitzt f in ∞ eine isolierte Singularität. Das bedeutet insbesondere, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ holomorph ist. Außerdem kann man f zu einer stetigen Abbildung $\widehat{f} : G \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen. An Stelle von $\widehat{f}$ schreiben wir meistens wieder f. Die Menge der holomorphen Funktionen auf G bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(G)$.

3.1 Satz. *Jede auf $\overline{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}})$. Dann ist $|f|$ stetig auf dem kompakten Raum $\overline{\mathbb{C}}$, nimmt also sein Maximum in einem $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ an. Ist z_0 in $\mathbb{C}$, so liefert das Maximumsprinzip, daß f konstant auf ganz $\mathbb{C}$ ist. Ist $z_0 = \infty$, so ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, und der Satz von Liouville liefert das gleiche Ergebnis. Wegen der Stetigkeit muß f auch konstant auf $\overline{\mathbb{C}}$ sein. ∎

3.2 Satz. *Jede auf $\overline{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion ist rational, d.h. Quotient zweier Polynome.*

Beweis: Sei f meromorph auf $\overline{\mathbb{C}}$, P_f die Polstellenmenge von f. Dann ist P_f diskret, also endlich. Für jedes z_μ aus $P_f \setminus \{\infty\}$ sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_μ. Dann ist h_μ rational und holomorph auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_\mu\}$. Sind $z_1, \ldots, z_N$ alle Polstellen in $\mathbb{C}$, dann setzen wir

$$p(z) := f(z) - \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu(z).$$

$p(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$, hat aber eventuell noch einen Pol in Unendlich. In $\mathbb{C}$ kann p aber in eine Potenzreihe entwickelt werden: $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle z aus $\mathbb{C}$.

Sei $I(z) = 1/z$ die Inversion. Wir untersuchen $p \circ I$ nahe Null:

$$p \circ I(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Liegt in Null ein Pol vor, so müssen ab einem n_0 alle a_n verschwinden, d.h., p ist ein Polynom. Damit folgt :

$$f(z) = p(z) + \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu(z)$$

ist eine rationale Funktion. ∎

Sei jetzt f eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ und $a \in \mathbb{C}$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Ist f in a holomorph, so hat f eine Darstellung als Potenzreihe :

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

mit $c_k \neq 0$. Die natürliche Zahl k heißt dann die *Vielfachheit* oder *Multiplizität* der $f(a)$-Stelle in a, und wir sagen, f hat in a die Vielfachheit k.

2. Hat f in a eine Polstelle, so ist

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

mit $c_{-k} \neq 0$. In diesem Fall sagen wir, f hat in a die Vielfachheit $-k$.

Ist $a = \infty$, so betrachtet man $f(1/z)$ im Nullpunkt und erklärt die Vielfachheit genauso.

3.3 Satz. *Sei $f = p/q$ eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$, wobei p, q teilerfremde Polynome sind. Außerdem sei $d := \max(\deg(p), deg(q))$. Dann gilt:*

1. *d ist genau dann gleich Null, wenn f konstant ist.*
2. *Ist $d > 0$, so nimmt f jeden Wert c aus $\overline{\mathbb{C}}$ genau d-mal an (mit Vielfachheiten gezählt).*

Beweis: 1) Trivial.

2) Sei zunächst $c = \infty$. Weil p und q teilerfremd sind, ist ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ genau dann eine Polstelle von f, wenn $q(z) = 0$ ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist $\deg(q)$ genau die Summe der Vielfachheiten, mit denen Unendlich in Punkten $z \in \mathbb{C}$ angenommen wird.

a) Ist $\deg(p) \leq \deg(q)$, so existiert $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$, d.h. f hat keine weiteren Polstellen.

b) Ist $\deg(p) > \deg(q)$, so hat f in $z = \infty$ einen Pol der Ordnung $\deg(p) - \deg(q)$, also ist die Vielfachheit von Unendlich in beiden Fällen gleich d.

Sei jetzt $c \in \mathbb{C}$ und f nicht konstant. Wir definieren

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - c \cdot q(z)}.$$

Die Polstellen von g sind genau die c-Stellen von f. Weil p und q teilerfremd sind, gilt das auch für q und $p - c \cdot q$. Außerdem ist

$$\max(\deg(q), \deg(p - c \cdot q)) = \max(\deg(q), \deg(p)) = d.$$

Also gilt die Behauptung. ∎

3.4 Satz. *Sei $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Dann ist eine nicht-konstante meromorphe Funktion $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Abbildung.*

Beweis: Ist f eine (nicht-konstante) holomorphe Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$, so wissen wir schon, daß f offen ist. Da die Inversion I ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich ist, gilt diese Aussage auch für meromorphe Funktionen. ∎

Definition. Eine stetige Abbildung $\pi : X \to Y$ (zwischen topologischen Räumen) heißt *Überlagerung*, falls gilt:

Zu jedem $y \in Y$ gibt es eine Umgebung $V = V(y) \subset Y$, so daß $\pi^{-1}(V)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen ist, die durch π homöomorph auf V abgebildet werden.

Ist $\pi^{-1}(y)$ immer eine d-elementige Menge, so spricht man von einer d-blättrigen Überlagerung.

Sei jetzt f eine nicht-konstante rationale Funktion, $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und $f(a) = c$ mit Vielfachheit k. Dann gibt es Umgebungen $U = U(a)$ und $V = V(c)$, so daß die Gleichung $f(z) = w$ für jedes $w \in V \setminus \{c\}$ genau k Lösungen (der Vielfachheit 1) in U hat. Ist $k = 1$, so ist f lokal homöomorph. Ist $k > 1$, dann heißt a ein *Verzweigungspunkt* der Ordnung $(k - 1)$. Die Menge

$$Z := \{a \in \overline{\mathbb{C}} \,:\, a \text{ Verzweigungspunkt }\}$$

ist endlich, da die Ableitung f' in den Punkten aus Z verschwindet. Das kann aber nur in endlich vielen Punkten passieren.

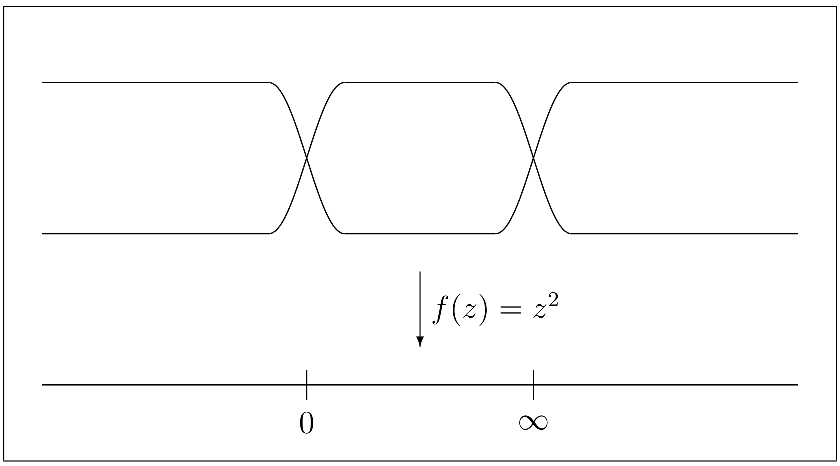
Für $c \in \overline{\mathbb{C}} \setminus f(Z)$ hat die Gleichung $f(z) = c$ genau d verschiedene Lösungen.
Ist $f^{-1}(c) = \{a_1, \ldots, a_d\}$, so existieren offene Umgebungen $V = V(c)$ und $W_i = W_i(a_i)$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, so daß $f : W_i \to V$ eine homöomorphe Abbildung ist. Also ist

$$f : \overline{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(f(Z)) \to \overline{\mathbb{C}} \setminus f(Z)$$

eine Überlagerung. Die Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ nennt man eine *verzweigte Überlagerung.*

Beispiel.

Sei $f(z) := z^n$. Dann liegt in 0 eine n-fache Nullstelle vor. Die Ableitung $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$ ist $\neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$, d.h. in $\mathbb{C}$ existiert kein weiterer Verzweigungspunkt. Um das Verhalten in $z = \infty$ zu studieren, benutzen wir die Inversion I. Es ist $I \circ f \circ I(z) = z^n$, also auch $f(\infty) = \infty$ mit Vielfachheit n. Damit ist $\overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{z^n} \overline{\mathbb{C}}$ eine verzweigte, n-blättrige Überlagerung mit Verzweigungsmenge $Z := \{0, \infty\}$. Im Fall $n = 2$ ergibt sich folgendes Diagramm:



Wir wollen noch ein paar Ergebnisse über lineare Transformationen (Möbius-Transformationen) nachtragen. Jede solche Transformation

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0$$

ist eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$, und – weil Zähler und Nenner einen Grad ≤ 1 haben – konstant oder ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich. Nicht-konstante lineare Transformationen sind also Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$.

Wieviele Fixpunkte hat $T(z)$, wenn T nicht konstant ist?

1. Es sei T affin-linear, $T(z) = az + b \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Dann ist Unendlich ein Fixpunkt. Ist $a = 1$, so liegt eine Translation vor und die Abbildung hat keinen weiteren Fixpunkt. Ist $a \neq 1$, so stellt $z = \frac{-b}{a-1}$ einen weiteren Fixpunkt dar. Mehr gibt es nicht.

2. Ist $c \neq 0$, so ist $T(\infty) = a/c$, also Unendlich kein Fixpunkt! Es gilt $T(z) = z$ genau dann, wenn $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ ist, und da es für eine quadratische Gleichung höchstens zwei verschiedene Lösungen gibt, hat T höchstens zwei Fixpunkte.

3.5 Folgerung.

1. *Sei T eine lineare Transformation mit mehr als zwei Fixpunkten. Dann ist $T = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$.*

2. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Dann ist T durch die Bilder $T(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ eindeutig festgelegt.*

Beweis:

1. ist klar!

2. Es gebe $S, T \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ mit $S(z_i) = T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist auch $S^{-1}T \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, hat aber mindestens drei Fixpunkte. Also muß $S = T$ sein!

■

Man kann sogar zu drei beliebigen Punkten und drei vorgegebenen Bildern die passende lineare Transformation konkret bestimmen.

Dazu suchen wir zunächst zu beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 eine Möbiustransformation T mit $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$ und $T(z_3) = \infty$. Eine leichte Überlegung ist, daß

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

schon die Punkte z_1 und z_3 richtig abbildet. Allerdings ist

$$T(z_2) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Dividieren wir $T(z)$ noch durch diesen Bruch, so erhalten wir die gewünschte Transformation.

Definition. Als *Doppelverhältnis* der Punkte z, z_1, z_2, z_3 bezeichnen wir die Größe

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Bemerkung. Ist einer der ausgewählten Punkte gleich Unendlich, so vereinfacht sich die Formel. Im Falle $z_1 = \infty$ gilt z.B.

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Der fehlende Bruch

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\frac{z}{z_1} - 1}{\frac{z_2}{z_1} - 1}$$

geht gegen Eins, wenn z_1 nach Unendlich geht.

3.6 Satz. *Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils paarweise verschieden, so gibt es genau eine gebrochen lineare Transformation T mit $T(z_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.*

BEWEIS: Seien $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ und $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$. Dann erfüllt die Verkettung

$$T(z) := T_2^{-1} \circ T_1(z)$$

die Forderung. Daß die Transformation T eindeutig bestimmt ist, haben wir schon gesehen. ■

3.7 Satz. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Ein Punkt $z \in \overline{\mathbb{C}}$ liegt genau dann auf der durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreislinie (alle $z_i \in \mathbb{C}$) oder Geraden (ein $z_i = \infty$), falls das Doppelverhältnis $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine reelle Zahl oder Unendlich ist.*

BEWEIS: Sei $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$, K die Gerade oder Kreislinie durch die z_i. Dann ist $T(K)$ Kreis oder Gerade durch 0, 1 und Unendlich, also $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und damit ist $z \in K$ genau dann, wenn $T(z)$ reell ist oder Unendlich. ■

3.8 Folgerung. *Das Gebiet $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ werde von einer Geraden oder einer Kreislinie berandet. Dann gibt es eine lineare Transformation T mit $T(G) = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.*

Beispiel.

Die Abbildung $T(z) := \mathsf{i}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = DV(z, -1, -\mathsf{i}, 1)$ bildet die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ab, denn -1, $-\mathsf{i}$ und 1 liegen alle auf $\partial\mathbb{D}$, und es ist $T(0) = \mathsf{i}$. Also ist $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$. Wir kennen diese Transformation schon aus dem ersten Paragraphen dieses Kapitels.

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ soll *speziell* genannt werden, wenn gilt: Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, dann gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g^2 = f$.

3.9 Satz.

1. *Ist G einfach zusammenhängend, so ist G speziell.*
2. *Seien $G, G' \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $\varphi : G \to G'$ biholomorphe Abbildung. Dann gilt: G ist speziell genau dann, wenn G' speziell ist.*

BEWEIS:

1. Aus Funktionentheorie 1 wissen wir: ist G einfach zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(G)$ eine nullstellenfreie Funktion, so hat f einen Logarithmus, d.h. es existiert $q \in \mathcal{O}(G)$ mit $\exp(q) = f$.

   Setzen wir $g := \exp(q/2) \in \mathcal{O}(G)$, dann ist $g^2 = \exp(q/2)^2 = \exp(q) = f$.

2. Es sei $\varphi : G \to G'$ biholomorph, G ein spezielles Gebiet. Ist $f \in \mathcal{O}(G')$ nullstellenfrei, so ist $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(G)$ auch nullstellenfrei. Da G speziell ist, existiert $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g^2 = f \circ \varphi$. Dann ist $g \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(G')$, und es gilt :

   $$(g \circ \varphi^{-1})^2 = g^2 \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = f.$$

   Also ist auch G' speziell. Die andere Richtung geht analog.

∎

Bemerkung. Die Eigenschaft „speziell“ ist also eine biholomorphe Invariante.

Sei nun $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Wir wollen Gebiete bis auf biholomorphe Äquivalenz klassifizieren.

1. Ist $G = \overline{\mathbb{C}}$, so ist G kompakt. Das ist ein Sonderfall.

2. Ist $G \neq \overline{\mathbb{C}}$, so gibt ein $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Wir können ohne Einschränkung verlangen, daß $z_0 = \infty \notin G$ ist, sonst bilden wir G mittels $1/(z - z_0)$ biholomorph auf ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ab. Also reicht es, wenn wir Gebiete in $\mathbb{C}$ betrachten. Dabei interessiert uns vor allem der Fall $G \neq \mathbb{C}$.

Wir kommen jetzt zum zentralen Resultat dieses Paragraphen:

3.10 Riemannscher Abbildungssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein spezielles Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$. Dann ist G biholomorph äquivalent zum Einheitskreis $\mathbb{D}$.*

BEWEIS: Wir zeigen: zu jedem Punkt $z_0 \in G$ gibt es eine biholomorphe Abbildung $T : G \to \mathbb{D}$ mit $T(z_0) = 0$, deren Ableitung $T'(z_0)$ reell und größer als Null ist. Der Beweis wird in drei Schritten geführt :

1. Konstruiere injektive, holomorphe Abbildung $T_1 : G \to \mathbb{D}$ mit $T_1(z_0) = 0$, $T_1'(z_0)$ reell und größer Null. Das Gebiet $G_1 := T_1(G)$ ist dann auch speziell.

2. Betrachte die Familie

   $$\mathcal{F} := \{f : G_1 \to \mathbb{D} \mid f \text{ holomorph und injektiv}, f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

   Wir zeigen: es gibt eine Abbildung $T_0 \in \mathcal{F}$ mit maximaler Ableitung im Nullpunkt.

3. T_0 bildet G_1 surjektiv auf $\mathbb{D}$ ab. (Dann ist $T := T_0 \circ T_1$ die gesuchte, biholomorphe Abbildung $T : G \to \mathbb{D}$.)

Wir kommen nun zur Ausführung. $G \subset \mathbb{C}$ sei das gegebene spezielle Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$.

1) o.B.d.A. sei $G \subset \mathbb{C}^*$, sonst verschieben wir G entsprechend.

Wenn jetzt der Nullpunkt nicht in G liegt, ist die Funktion identisch z holomorph und nullstellenfrei auf G. Weil G speziell ist, existiert eine holomorphe Quadratwurzel $q(z) = \sqrt{z}$ auf G. Die Funktion q ist injektiv, deshalb ist das Gebiet $G' := q(G) \subset \mathbb{C}^*$ biholomorph äquivalent zu G. Aber das Komplement von G' enthält eine ganze Kreisscheibe, denn mit $w \in G'$ ist $-w \notin G'$, sonst wäre die Wurzel auf G' nicht umkehrbar. Nehmen wir nun ein $w_0 \in G'$, dann gibt es wegen der Offenheit ein $\varepsilon > 0$, so daß die Menge $\overline{D_\varepsilon(w_0)}$ in G' liegt. Also muß der Kreis mit gleichem Radius um $-w_0$ ganz im Komplement G' liegen.

Betrachte nun den Automorphismus $g(z) := \dfrac{\varepsilon}{z + w_0}$ von $\overline{\mathbb{C}}$. Dann ist $g(\infty) = 0$ und $|g(z)| < 1$ für $|z + w_0| > \varepsilon$. Also bildet g die Menge $\overline{\mathbb{C} \setminus D_\varepsilon(-w_0)}$ nach $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ab, d.h. es gibt ein Gebiet $G'' \subset \mathbb{D}$, so daß $g \circ q : G \to G''$ eine biholomorphe Abbildung ist.

Sei $a := g(q(z_0))$ das Bild von dem ausgewählten Punkt z_0. Die Transformation

$$T_a(z) := \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

schickt a auf den Nullpunkt, oder hintereinandergeschaltet schickt die Abbildung $T_a \circ g \circ q$ den Punkt z_0 dorthin. Ist jetzt $(T_a \circ g \circ q)'(z_0) = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$ mit $r > 0, t \in [0, 2\pi)$, so wenden wir noch die Drehung $R_t(z) := e^{-\mathrm{i}\,t} \cdot z$ an, um den Punkt auf die positive relle Achse zu drehen. Dann erfüllt $T_1 := R_t \circ T_a \circ g \circ q$ die Forderungen des ersten Schrittes.

2) Sei $G_1 := T_1(G)$. Dann ist G_1 auch speziell. Wir benutzen die Familie

$$\mathcal{F} := \{f : G_1 \to \mathbb{D} \mid f \text{ holomorph und injektiv, } f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

Wir suchen ein $T_0 \in \mathcal{F}$, so daß $T_0'(0)$ maximal ist. $\mathcal{F}$ ist lokal-beschränkt, sogar gleichmäßig beschränkt. $\mathcal{F}$ ist nicht leer, da $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ in $\mathcal{F}$ liegt.

Sei $\alpha := \sup\{f'(0) \mid f \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $(\mathrm{id}_{\mathbb{D}})'(0) = 1$ gilt, ist $\alpha \geq 1$. α ist das Supremum, d.h. es gibt eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{F}$, deren Ableitungen im Nullpunkt gegen α konvergieren. Wegen der lokalen Beschränktheit und des Satzes von Montel erhält die Folge eine Teilfolge, die lokal- gleichmäßig gegen eine Funktion $f_0 \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Ohne Einschränkung sei (f_n) diese Teilfolge. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß konvergieren auch die Ableitungen (f_n') gegen f_0', deshalb gilt $f_0'(0) = \alpha < \infty$. Wegen $\alpha \geq 1$ ist f_0 nicht konstant. Nun liefert der Satz von Hurwitz, da alle f_n injektiv sind, und die Grenzfunktion f_0 nicht konstant ist, daß f_0 selbst injektiv ist. Da $|f_n| < 1$ für alle n ist, ist $|f_0| \leq 1$. Nach dem Maximumsprinzip muß $|f_0| < 1$ sein. Außerdem ist $f_0(0) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = 0$ und damit gezeigt : $f_0 \in \mathcal{F}$. Definiere nun $T_0 := f_0$, und der zweite Schritt ist fertig.

3) Behauptung: T_0 ist surjektiv (dann sind wir fertig, weil die Verkettung $T_0 \circ T_1 : G \to \mathbb{D}$ biholomorph ist). Angenommen, $G_2 := T_0(G) \neq \mathbb{D}$, d.h. T_0 nicht surjektiv. Sei c ein Punkt aus $\mathbb{D} \setminus G_2$. Wir betrachten den Automorphismus

$$T_c(z) := \frac{z-c}{1-\bar{c}z}.$$

T_c bildet den Nullpunkt nach $-c$ und den Punkt c nach Null ab. Definieren wir $G_3 := T_c(G_2)$, dann ist G_3 ein spezielles Gebiet, weil es biholomorphes Bild von G_1 ist. Außerdem ist der Nullpunkt nicht in G_3. Deshalb existiert eine holomorphe Quadratwurzel auf G_3, $p(z) = \sqrt{z}$, die natürlich injektiv ist. Auch das Bild $p(G_3)$ ist vollständig im Einheitskreis enthalten. Wir setzen jetzt eine Transformation an:

$$T_{\lambda,d}(z) := e^{\mathrm{i}\,\lambda} \cdot \frac{z-d}{1-\bar{d}z},$$

wobei wir die Parameter λ und d noch später wählen wollen. Sei

$$S := T_{\lambda,d} \circ p \circ T_c : G_2 \to \mathbb{D},$$

dann ist die Verkettung auch injektiv. Jetzt setzen wir $d := p(-c)$ und wählen λ so, daß die Ableitung $S'(0)$ reell und größer Null ist. Das geht, da die Ableitung wegen der Injektivität ungleich Null ist; λ muß den Wert dann noch entsprechend auf die reelle Achse drehen. Definieren wir jetzt $p^*(z) := z^2$ und damit

$$S^* := T_c^{-1} \circ p^* \circ T_{\lambda,d}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D},$$

dann ist die Verkettung $S^* \circ S = \mathrm{id}_{G_2}$, wobei der Wert $S^*(0)$ gleich Null ist. Deshalb ist das Schwarzsche Lemma anwendbar, und es folgt

$$|(S^*)'(0)| \leq 1.$$

Wäre der Betrag der Ableitung in Null gleich Eins, also S^* eine Drehung, dann wäre

$$p^*(z) = T_c \circ S^* \circ T_{\lambda,d}$$

ein Automorphismus des Einheitskreises, was aber nicht der Fall ist.

Also ist die Ableitung von S^* vom Betrage in Null kleiner als Eins. Dann ist aber die Ableitung von S, der Umkehrabbildung von S^*, in Null echt größer als Eins (reell ist sie nach Wahl von λ !). Damit definieren wir eine Abbildung

$$h(z) := S \circ T_0 : G_1 \to \mathbb{D}.$$

h ist eine holomorphe, injektive Abbildung, die den Nullpunkt fix läßt. Für die Ableitung h' gilt aber

$$h'(0) = S'(0) \cdot T_0'(0) > T_0'(0),$$

das ist aber ein Widerspruch ! Also ist T_0 surjektiv und wir sind fertig. ∎

Der Begriff „speziell“ ist sehr technisch. Bekannter ist der Riemannsche Abbildungssatz in der folgenden Formulierung:

3.11 Riemannscher Abbildungssatz (2. Fassung). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent :*

1. *G ist gleich $\mathbb{C}$ oder biholomorph äquivalent zum Einheitskreis.*
2. *G ist einfach zusammenhängend.*
3. *Das Komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend.*
4. *Für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ und jeden Zyklus Γ in G gilt :*
$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$
5. *Jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ hat auf G eine Stammfunktion.*
6. *Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ eine nullstellenfreie, holomorphe Funktion, dann hat f einen Logarithmus.*
7. *G ist speziell.*

Beweis: Von dem Ringschluß haben wir schon einige Schritte gezeigt. Wir überlegen uns noch die Schritte von 2.) nach 3.) und von 3.) nach 4.) :
Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. Angenommen, $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, in der Relativtopologie offene Mengen U_1 und U_2, die disjunkt sind, deren Vereinigung aber ganz $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist. Die U_i sind abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ und deshalb auch schon in $\overline{\mathbb{C}}$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung sei $\infty \in U_1$, dann setzen wir $A_1 := U_1 \setminus \{\infty\}$, $A_2 := U_2$. Die A_i sind abgeschlossen in $\mathbb{C}$, aber da A_1 aus einer Umgebung von Unendlich hervorgeht und A_2 nicht schneidet, ist die Menge A_2 zusätzlich noch beschränkt, insgesamt also kompakt. Dann ist G aber nicht einfach zusammenhängend, Widerspruch !
Sei jetzt $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend, Γ ein Zyklus in G und C die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma|$. Die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend und enthalten in $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma|$, deshalb muß $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ganz in der unbeschränkten Komponente C enthalten sein. Das bedeutet aber, daß jeder innere Punkt von Γ schon in G liegen muß, d. h. Γ nullhomolog in G ist. ∎

Wir können nun noch eine weitere Charakterisierung der einfach-zusammenhängenden Gebiete angeben. Dazu sind ein paar topologische Vorbereitungen nötig.

Definition. Es seien $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt $z_0 = \alpha(0) = \beta(0)$ und gleichem Endpunkt $z_1 = \alpha(1) = \beta(1)$. Eine *Homotopie* zwischen α und β ist eine stetige Abbildung $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, für die gilt :

1. $\Phi(t, 0) = \alpha(t)$ und $\Phi(t, 1) = \beta(t)$.

2. $\Phi(0, s) = z_0$ und $\Phi(1, s) = z_1$.

Zur Abkürzung wird $\Phi_s(t)$ für $\Phi(t, s)$ geschrieben. $\Phi_s(t)$ ist dann ein gewöhnlicher stetiger Weg von z_0 nach z_1, speziell ist $\Phi_0 = \alpha$ und $\Phi_1 = \beta$.

Zwei Wege heißen *homotop* in G (in Zeichen: $\alpha \simeq \beta$), falls es eine Homotopie zwischen α und β gibt. Ein geschlossener Weg α in G mit $z_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$ heißt *nullhomotop* in G, falls α in G homotop zum konstanten Weg $c(t) \equiv z_0$ ist.

3.12 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ konvex oder ein homöomorphes Bild davon, so ist jeder geschlossene Weg in G nullhomotop in G.*

Beweis: Es sei G konvex, $\alpha : [0, 1] \to G$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt z_0. Definieren wir

$$\Phi(t, s) := s \cdot z_0 + (1 - s) \cdot \alpha(t) \quad \text{auf } [0, 1] \times [0, 1],$$

so ist Φ stetig. Alle Wege Φ_s haben als Anfangs- und Endpunkte den Punkt z_0. Außerdem ist $\Phi_0 = \alpha$ und $\Phi_1(t) \equiv z_0$, also α nullhomotop in G.

Ist G homöomorphes Bild eines konvexen Gebietes, dann kann der Weg α mittels Umkehrabbildung dorthin transportiert werden. Die Konstruktion der Homotopie läßt sich dann ganz einfach übertragen. ∎

Sei jetzt $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetiger Weg. Dann gibt es eine Kreiskette $\{D_1, \ldots, D_n\}$ längs α, mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so existiert auf jeder Kreisscheibe D_i eine Stammfunktion F_i von f_i. Wir können deshalb definiere:

$$\int_\alpha f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{n} (F_i(\alpha(t_i)) - F_i(\alpha(t_{i-1}))).$$

Bemerkungen.

1. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Kreiskette bzw. von der Wahl der Stammfunktionen, wie man – etwas mühsam – zeigen kann.

2. Falls α stückweise stetig-differenzierbar ist, stimmt der neue Integralbegriff mit dem schon vorhandenen überein.

Die Verallgemeinerung des Wegintegrals auf Ketten stetiger Wege erfolgt wie gewohnt :
Ist $\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \alpha_i$ mit stetigen Wegen α_i und natürlichen Zahlen n_i, so definieren wir:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \int_{\alpha_i} f(z)\,dz.$$

3.13 Satz. *Sind die Wege α, β in G homotop zueinander, so ist $\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz$ für jede holomorphe Funktion f auf G.*

BEWEIS: Es sei $z_0 := \alpha(0) = \beta(0)$ der Anfangspunkt, $z_n := \alpha(1) = \beta(1)$ der Endpunkt. Weiter sei Φ die Homotopie, $s_0 \in [0,1]$ und $\{D_1, \ldots, D_n\}$ eine Kreiskette längs $\gamma_0 := \Phi_{s_0}$ (zur Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$) in G. Dann ist $\Phi(t, s_0) \in D_i$ für $t_{i-1} \le t \le t_i$. Ist s nahe bei s_0, so verläuft auch noch $\gamma := \Phi_s$ im Innern der Kreiskette, und man kann eine Zerlegung $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = 1$ finden, so daß $\Phi(t, s) \in D_i$ ist, für $u_{i-1} \le t \le u_i$.

Nun sei F_i eine Stammfunktion von f in D_i. Auf $D_i \cap D_{i+1}$ ist $c_i := F_{i+1} - F_i$ konstant. Daher ist

$$F_{i+1}(\gamma(u_i)) - F_{i+1}(\gamma_0(t_i)) = F_i(\gamma(u_i)) - F_i(\gamma_0(t_i))$$

für $i = 1, \ldots, n-1$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \;= \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(F_i(\gamma(u_i)) - F_i(\gamma(u_{i-1}))\big) - \sum_{i=1}^{n} \big(F_i(\gamma_0(t_i)) - F_i(\gamma_0(t_{i-1}))\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(F_i(\gamma(u_i)) - F_i(\gamma_0(t_i))\big) - \sum_{i=0}^{n-1} \big(F_{i+1}(\gamma(u_i)) - F_{i+1}(\gamma_0(t_i))\big) \\
&= \big(F_n(z_n) - F_n(z_n)\big) - \big(F_1(z_0) - F_1(z_0)\big) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun so kleine Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$, daß das Bild des Rechtecks $Q_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ unter Φ in einer Kreisscheibe $D_{ij} \subset G$ enthalten ist, für alle i und j. Dann liegen die Wege $\Phi_{s_{j-1}}$ und Φ_{s_j} jeweils so dicht beieinander, daß die Integrale darüber gleich sind. Den Beweis dafür haben wir gerade geliefert. Aber dann stimmen auch die Integrale über α und β überein. ∎

3.14 Folgerung. *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und α ein geschlossener Weg in G, der nullhomotop in G ist. Dann gilt $\int_\alpha f(z)dz = 0$.*

BEWEIS: α ist homotop zu einem konstanten Weg $c(t) \equiv z_0$, und das Integral längs c verschwindet offensichtlich. ∎

Jetzt kommen wir endlich zur gewünschten Charakterisierung der einfach-zusammenhängenden Gebiete:

3.15 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt : G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.*

BEWEIS: Es sei G einfach zusammenhängend. Dann ist $G = \mathbb{C}$ oder G biholomorph äquivalent zum Einheitskreis – die sind aber beide konvexe Gebiete, d.h. dort ist jeder geschlossene Weg nullhomotop. Die Homotopie kann dann nach G übertragen werden.

Wenn umgekehrt jeder geschlossene Weg nullhomotop ist, dann verschwindet das Integral über jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ und jeden geschlossenen Weg α in G. Ist Γ ein Zyklus in G, so zerfällt Γ in geschlossene Wege α_i. Also ist das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion f auf G. Daraus folgt, daß G einfach zusammenhängend ist. ∎