§ 2 Funktionenräume

Wir erinnern zunächst an den Weierstraßschen Konvergenzsatz :

2.1 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf G, die auf G kompakt gegen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert.*
Dann ist f holomorph, und die Folge der Ableitungen (f'_n) konvergiert kompakt gegen f'.

Bemerkung. In dieser Allgemeinheit ist die Aussage falsch für reell-differenzierbare Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Es gilt aber : Ist $I = [a, b]$, (f_n) eine Folge stetiger Funktionen auf I, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf I konvergiert, so ist auch f stetig.

Das kann auch anders interpretiert werden :

$$\mathcal{C}^0(I) := \{f \mid f : I \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$$

ist ein normierter, unendlich-dimensionaler Vektorraum mit Norm

$$\|f\| := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Die Norm induziert eine Topologie auf $\mathcal{C}^0(I)$, und der Konvergenzbegriff bezüglich dieser Topologie ist die gleichmäßige Konvergenz. Da jede Cauchyfolge in der Supremumsnorm in $\mathcal{C}^0(I)$ gleichmäßig konvergiert, ist $\mathcal{C}^0(I)$ vollständig.

Unser Ziel wird nun sein, aus

$$\mathcal{O}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}, G \subset \mathbb{C} \text{ Gebiet},$$

einen topologischen Vektorraum zu machen und zu zeigen, daß $\mathcal{O}(G)$ in einem geeigneten Sinne vollständig ist. Das Problem dabei ist, daß sich die kompakte Konvergenz nicht durch eine Norm beschreiben läßt.

Definition. Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, E ein K-Vektorraum. E heißt *topologischer Vektorraum*, falls es eine Topologie auf E gibt, so daß die Addition $+ : E \times E \to E$ und die Skalarmultiplikation $\cdot : K \times E \to E$ stetige Abbildungen sind.

Beispiele.

1. endlich-dimensionale Vektorräume,
2. Banachräume (d.h. normierte, vollständige Vektorräume),
3. Hilberträume (d.h. vollständige Vektorräume mit einem Skalarprodukt).

Bemerkung. U ist eine Umgebung von Null in E genau dann, wenn die Menge $a + U = \{a + x \mid x \in U\}$ eine Umgebung von a ist.

2.2 Hilfsatz. *Sei E topologischer Vektorraum. Ist $U = U(0)$ Umgebung von Null, so gibt es eine Umgebung V von Null, für die gilt :*

1. *Die Menge $V + V = \{x_1 + x_2 \mid x_1, x_2 \in V\}$ ist in U enthalten,*

2. *V ist „symmetrisch“, d.h. aus $x \in V$ folgt, daß auch $-x$ in V enthalten ist.*

Beweis: Wegen der Stetigkeit der Addition existiert eine Umgebung $W = W(0)$ mit $W+W \subset U$. Außerdem existieren wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation eine noch kleinere Umgebung $\widetilde{V} = \widetilde{V}(0) \subset W$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $\lambda \cdot \widetilde{V} \subset W$ für $|\lambda| \leq \varepsilon$. Wir setzen

$$V := \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda \cdot \widetilde{V} = V(0) \subset W.$$

Dann ist wegen $V + V \subset W + W \subset U$ die erste Bedingung erfüllt. Die zweite Bedingung gilt automatisch nach der Definition von V, dennn für $x \in V$ existiert ein $v \in \widetilde{V}$ und ein Skalar λ mit $|\lambda| \leq \varepsilon$, so daß $x = \lambda \cdot v$ gilt. Dann ist auch $|-\lambda| \leq \varepsilon$ und damit $-x = (-\lambda) \cdot v$ ein Element aus V. ∎

2.3 Satz. *E ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Menge $\{0\}$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Zunächst sei E Hausdorffsch. Ist $x_0 \in E \setminus \{0\}$ (falls E nur der Nullraum ist, so ist nichts zu zeigen), dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, die Null nicht trifft, d.h. $U \subset E \setminus \{0\}$. Also ist das Komplement von $\{0\}$ offen und damit $\{0\}$ abgeschlossen.

Jetzt sei $\{0\}$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen, daß es zu beliebigem x_0 disjunkte Umgebungen von 0 und x_0 gibt. Weil $E \setminus \{0\}$ offen ist, hat x_0 eine Umgebung $U = U(x_0)$, die in $E \setminus \{0\}$ enthalten ist. Diese Umgebung verschieben wir nun in den Nullpunkt, so daß wir eine Umgebung $\widetilde{U} = \widetilde{U}(0)$ mit $U = x_0 + \widetilde{U}$ erhalten. Nach dem Hilfsatz wählen wir jetzt eine symmetrische Umgebung $W = W(0) \subset \widetilde{U}$ mit $W + W \subset \widetilde{U}$. Dann ist $x_0 \notin W$, denn sonst wäre auch $-x_0 \in W$ und $0 = x_0 + (-x_0) \in x_0 + \widetilde{U} = U$.

Behauptung: W und $x_0 + W$ sind die gesuchten Umgebungen.

Angenommen, es gibt ein z der Form $z = x_0 + w$ (mit $w \in W$) im Schnitt von W und $x_0 + W$. Dann ist $w - z \in W + W \subset \widetilde{U}$ und $0 = x_0 + w - z \in x_0 + \widetilde{U} = U$, Widerspruch! ∎

2.4 Satz. *Sei $F \subset E$ Untervektorraum eines topologischen Vektorraums. Dann gilt :*

1. *F ist mit der Relativtopologie ein topologischer Vektorraum.*

2. *$\overline{F} \subset E$ ist Untervektorraum.*

Beweis:

1. Trivial.

2. Sind x_0 und $y_0 \in \overline{F}, U = U(x_0 + y_0) \subset E$ eine beliebige, offene Umgebung in E. Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Addition Umgebungen $U'(x_0)$ und $U''(y_0)$ in E, so daß $U' + U''$ ganz in U enthalten ist. Man kann sicher Punkte $x \in U' \cap F$ und $y \in U'' \cap F$ finden. Dann ist die Summe $x + y$ in $U \cap F$ enthalten, d.h. $x_0 + y_0$ liegt im Abschluß $\overline{F}$.

   Analog zeigt man: Ist $\lambda \in K$, $x_0 \in \overline{F}$, dann ist auch $\lambda \cdot x_0$ in $\overline{F}$.

∎

2.5 Satz. *Sei $F \subset E$ abgeschlossener Unterraum eines Hausdorffschen topologischen Vektorraums. Dann ist F selbst Hausdorffsch.*

Beweis: Das ist schon bei einem beliebigen topologischen Raum klar! ∎

Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir wollen auf den $\mathbb{C}$-Vektorräumen $\mathcal{C}^0(G)$ und $\mathcal{O}(G)$ eine Topologie einführen, die zur kompakten Konvergenz paßt.

Ist $f \in \mathcal{C}^0(G)$, $K \in G$ kompakt, so definieren wir

$$|f|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty.$$

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$U_{K,\varepsilon}(f) := \{g \in \mathcal{C}^0(G) \, : \, |f - g|_K < \varepsilon\},$$

also die Menge aller auf G stetigen Funktionen, die sich auf K von f nur um ε unterscheiden.

Definition. $M \subset \mathcal{C}^0(G)$ heißt *Umgebung* von f, falls es eine kompakte Mege K und ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{K,\varepsilon}(f) \subset M$ gibt.

Bemerkung. $U_{K,\varepsilon}$ wird kleiner, wenn K größer oder ε kleiner wird.

Definition. $M \subset \mathcal{C}^0(G)$ heißt *offen*, falls M für jedes $f \in M$ eine Umgebung ist.

Insbesondere sind die $U_{K,\varepsilon}$ offen.

2.6 Satz. *$\mathcal{C}^0(G)$ ist Hausdorffscher topologischer Raum.*

Beweis:

1. Die leere Menge und $\mathcal{C}^0(G)$ sind offen (bei der leeren Menge gibt es nichts zu zeigen; $\mathcal{C}^0(G)$ enthält jede Menge $U_{K,\varepsilon}(f)$).

2. Es seien M, N offen, $f \in M \cap N$. Wegen der Offenheit von N bzw. M existieren

$$U_{K_1,\varepsilon_1}(f) \subset M, \qquad U_{K_2,\varepsilon_2}(f) \subset N.$$

Setzen wir nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ und $K := K_1 \cup K_2$ als die Vereinigung der beiden Kompakta, dann ist $U_{K,\varepsilon}(f) \subset M \cap N$ eine gesuchte Elementarumgebung.

3. Ist $\{M_i, i \in I\}$ eine Familie offener Mengen, dann ist natürlich auch die Vereinigung aller M_i offen, da jedes Element der Vereinigung schon eine Umgebung in einem M_{i_0} hat.

4. Jetzt prüfen wir die Hausdorff-Eigenschaft: Dazu seien $f, g \in \mathcal{C}^0(G)$, $f \neq g$. Dann gibt es ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) \neq g(z_0)$. Setzen wir $K := \{z_0\}$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}|f(z_0) - g(z_0)| > 0$, dann sind die Umgebungen $U_{K,\varepsilon}(f)$ und $U_{K,\varepsilon}(g)$ disjunkt.

∎

Man nennt die eingeführte Topologie die K.O.-Topologie (für „kompakt-offen").

Definition. Eine Funktionenfolge $(f_n) \subset \mathcal{C}^0(G)$ heißt konvergent gegen $f \in \mathcal{C}^0(G)$, falls in jeder Umgebung von f fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) f_n liegen.

2.7 Satz. *Eine Funktionenfolge $(f_n) \subset \mathcal{C}^0(G)$ konvergiert gegen f in $\mathcal{C}^0(G)$ in der K.O.-Topologie genau dann, wenn (f_n) auf G kompakt gegen f konvergiert.*

Beweis: Die Topologie auf $\mathcal{C}^0(G)$ ist ja genau so gemacht, daß die Begriffe übereinstimmen. ∎

Definition. Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Ein System $\mathfrak{U}$ von Teilmengen von X heißt *Umgebungsbasis* von x_0, falls gilt :

1. Jedes $U \in \mathfrak{U}$ ist Umgebung von x_0.
2. Für jede Umgebung $V = V(x_0)$ existiert ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subset V$.

Bemerkung. Eine Umgebungsbasis ist also eine Menge, in der beliebig kleine Umgebungen enthalten sind.

2.8 Satz. *In $\mathcal{C}^0(G)$ besitzt jedes Element eine abzählbare Umgebungsbasis (man sagt auch: $\mathcal{C}^0(G)$ erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**).*

Beweis: Wir konstruieren eine „kompakte Ausschöpfung" von G, d.h. kompakte Mengen $K_n \subset G$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$,

2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$,

3. Ist $K \subset G$ kompakt, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $K \subset K_n$ gilt.

Bemerkung. Eigenschaft (3) ist automatisch erfüllt, wann immer die anderen beiden gelten.

Die Folge (K_n) können wir z. B. so konstruieren:

$$K_n := \{z \in G \mid \operatorname{dist}(z, \partial G) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{B_n(0)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Nun definieren wir für $f \in \mathcal{C}^0(G)$ eine Umgebungsbasis:

Sei $\varepsilon_n := {}^1\!/n$ und

$$U_n := U_{K_n,\varepsilon_n}(f), \quad \textit{bzw.} \quad \mathfrak{U} := \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Noch ist Bedingung (2) für eine Umgebungsbasis zu prüfen. Ist $V = V(f)$ eine Umgebung von f, dann existieren K, ε mit $U_{K,\varepsilon} \subset V$, da V offen ist. Es gibt aber ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $K \subset K_n$ und $\varepsilon < \varepsilon_n$ ist. Damit gilt

$$U_{K_n,\varepsilon_n} \subset U_{K,\varepsilon} \subset V.$$

∎

Bemerkung. Hat $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis, so hat x auch eine abzählbare, monotone Umgebungsbasis, d.h. eine Umgebungsbasis (U_n) mit $U_m \subset U_n$ für $m > n$.

2.9 Satz. *Seien X, Y Hausdorff-Räume, wobei X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfülle. $F : X \to Y$ sei eine Abbildung, $x_0 \in X$ ein Punkt. Dann gilt:*

F ist stetig in x_0 genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset X$, die gegen x_0 konvergieren, auch die Folge der Bilder $(F(x_n))$ gegen das Bild des Grenzwertes $F(x_0)$ konvergiert.

Beweis: Es sei F stetig in x_0, (x_n) eine gegen x_0 konvergente Folge. Außerdem sei $V = V(F(x_0)) \subset Y$ Umgebung von $F(x_0)$, $U := F^{-1}(V) \subset X$ deren Urbild unter F. Dann enthält U den Punkt x_0 und ist offen, da F stetig ist. Weil (x_n) gegen x_0 konvergiert, existiert ein n_0, so daß $x_n \in U$ für alle $n > n_0$ gilt. Dann gilt aber auch $F(x_n) \in F(U) = V$ für diese n, d.h. $(F(x_n))$ konvergiert gegen $F(x_0)$.

Sei $V = V(F(x_0))$ eine offene Umgebung, $U := F^{-1}(V)$ wieder das Urbild von V. Angenommen, U ist keine Umgebung von x_0, d.h. für jede Umgebung W von x_0 gilt: W liegt nicht in U.
Ist (U_n) jetzt eine monotone, abzählbare Umgebungsbasis von x_0, dann wähle zu

jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n \setminus U$, was es nach Annahme gibt. Die Folge (x_n) konvergiert dann gegen x_0, denn ist $\widetilde{U}$ eine Umgebung von x_0, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, mit $U_{n_0} \subset \widetilde{U}$, und deshalb liegen die x_n in $\widetilde{U}$ für $n > n_0$. Nach Voraussetzung konvergiert dann $F(x_n)$ gegen $F(x_0) \in V$, d.h. die $F(x_n)$ liegen in V für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ist aber $F(x_n)$ in V, dann ist $x_n \in F^{-1}(V) = U$, Widerspruch! ∎

Bemerkungen.

1. Das ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Folgenstetigkeit, der für reelle bzw. komplexe Funktionen bekannt ist.

2. Die Eigenschaft „Hausdorffsch" ist notwendig, damit überhaupt von einem eindeutigen Grenzwert die Rede sein kann.

2.10 Folgerung. *$\mathcal{C}^0(G)$ ist mit der K.O.-Topologie ein Hausdorffscher, topologischer Vektorraum.*

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, daß die Addition und die Skalarmultiplikation in der K.O.-Topologie stetig sind. Das ist aber klar, denn sind (f_n) bzw. $(g_n) \subset \mathcal{C}^0(G)$ Funktionenfolgen, die kompakt gegen f bzw. g konvergieren, dann konvergieren auch $f_n + g_n$ bzw. $c \cdot g_n$ auf G kompakt gegen $f + g$ bzw. $c \cdot g$. ∎

Jetzt folgt mit dem Satz von Weierstraß folgende Aussage:

Der Funktionenraum $\mathcal{O}(G) \subset \mathcal{C}^0(G)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum, also selbst ein Hausdorffscher, topologischer Vektorraum.

Eine injektive holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ nennt man auch *schlicht*. Wir erinnern an den Satz von Hurwitz:

> *Es sei $f_n \subset \mathcal{O}(G)$ eine Folge von nullstellenfreien, holomorphen Funktionen, die auf G kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Dann ist $f \equiv 0$, oder f ist nullstellenfrei. Sind alle f_n injektiv, so ist f injektiv oder konstant.*

In der Sprache der Funktionenräume heißt das: Setzen wir

$$\mathcal{S}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \mid f \text{ konstant oder injektiv}\}$$

(die Menge der „schlichten" holomorphen Funktionen), so ist $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{O}(G)$ abgeschlossen.

Sei E ein normierter Vektorraum. Dann heißt eine Menge $M \subset E$ genau dann *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl r gibt, so daß $M \subset \{x \in E : \|x\| < r\}$, d.h. M muß in eine Kugel um 0 passen.

Definition. $M \subset \mathcal{C}^0(G)$ heißt *beschränkt*, wenn gilt: Für jedes Kompaktum $K \subset G$ existiert ein r mit $M \subset U_{K,r}(0)$, d.h. für jedes K ist $\{|f|_K : f \in M\}$ beschränkt.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge stetiger Funktionen auf G. Die Folge (f_n) heißt *lokal beschränkt*, falls es zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung $U(z_0)$ und eine von U abhängige Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$|f_n(z)| \leq C \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}, z \in U.$$

2.11 Satz. *Eine Folge (f_n) ist lokal beschränkt auf G genau dann, wenn die Menge der Funktionen $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ im Funktionenraum $\mathcal{C}(G)$ beschränkt ist.*

Beweis: Sei (f_n) lokal beschränkt, $K \subset G$ kompakt. Dann existiert eine Familie von offenen Mengen $\{U_z = U(z) | z \in G\}$ mit zugehörigen Konstanten C_z, so daß (f_n) auf U_z durch C_z beschränkt ist. Diese überdecken ganz G. Da K kompakt ist, wird K auch schon von endlich vielen der U_z überdeckt, die wir mit $U_1, \ldots, U_N$ bezeichnen, $C_1, \ldots C_N$ seien die zugehörigen Konstanten. Sei jetzt $C := \max\limits_{1 \leq i \leq N}\{C_i\}$. Dann gilt

$$|f_n(z)| \leq C \text{ für alle } z \in K, n \in \mathbb{N}, \quad \text{d.h. } \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset U_{K,C}(0).$$

Sei umgekehrt die Menge der Folgenelemente $M := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Ist $z_0 \in G$, dann wählen wir eine Umgebung $U(z_0) \subset\subset V(z_0) \subset G$. Dann ist $K := \overline{U}$ kompakt, und weil M beschränkt ist, existiert ein $r > 0$ mit $M \subset U_{K,r}(0)$, also gilt insbesondere $|f_n(z)| \leq r$ für jedes $z \in U$, $n \in \mathbb{N}$. ∎

2.12 Satz. *Es sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine lokal beschränkte Funktionenfolge, $A \subset G$ eine dichte Teilmenge. Außerdem sei die eingeschränkte Folge $(f_n|_A)$ auf A punktweise konvergent. Dann ist (f_n) auf G kompakt konvergent, insbesondere ist die Grenzfunktion f auf ganz G definiert und holomorph.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß (f_n) lokal eine Cauchy-Folge im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz ist, d.h. zu beliebigem $z_0 \in G$ ist ein $r > 0$ gesucht, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, mit

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } |z - z_0| \leq r; m, n > n_0.$$

Sei $z_0 \in G$ gegeben. Wegen der lokalen Beschränktheit existieren $r' > 0$, $C > 0$, so daß $|f_n(z)| \leq C$ für jedes n ist, falls $z \in \overline{D_{r'}(z_o)} \subset G$ ist.

Sei nun r noch etwas kleiner gewählt, etwa $r = r'/2$. Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel gilt dann für $z, z' \in \overline{D_r(z_0)} \subset D_{r'}(z_0)$:

$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f_n(z')| &= \Big|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_{r'}(z_0)} \Big(\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z'}\Big)\, d\zeta\Big| \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \Big| \int\limits_{\partial D_{r'}(z_0)} \frac{f_n(\zeta)(\zeta - z') - f_n(\zeta)(\zeta - z)}{(\zeta - z)(\zeta - z')}\, d\zeta\Big| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \cdot |z - z'| \cdot 2\pi r' \cdot \sup_{\partial D_{r'}(z_0)} |f_n(\zeta)| \cdot \frac{4}{r'^2} \\
&= \frac{4|z - z'|}{r'} \cdot C
\end{aligned}$$

mit $C := \sup\limits_{\zeta \in \partial D_{r'}(z_0)} |f_n(\zeta)|$.

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann definieren wir $\varrho := {}^1\!/_2 \cdot {}^{\varepsilon}\!/_3 \cdot {}^{r'}\!/_{4C} > 0$. Die Kreisscheiben $D_\varrho(a)$, $a \in A \cap D_r(z_0)$, überdecken $\overline{D_r(z_0)}$, denn A liegt dicht in G. Da $\overline{D_r(z_0)}$ kompakt ist, genügen auch endlich viele Scheiben. Deren Mittelpunkte seien $a_1, \ldots, a_N$. Nun wählen wir natürliche Zahlen $n_{0,i}$ so groß, daß $|f_n(a_i) - f_m(a_i)| \le \varepsilon/3$ für alle $m, n > n_{0,i}$ gilt. Wegen der punktweisen Konvergenz geht das für jedes $i \in \{1, \ldots, N\}$. Dann kann n_0 als Maximum der endlich-vielen $n_{0,i}$ genommen werden.

Seien jetzt $n, m > n_0$, $z \in D_r(z_0)$. Dann gibt es ein $i \in 1, \ldots, N$ mit $|z - a_i| \le \varrho$, da die Scheiben ganz $D_r(z_0)$ überdecken. Es folgt:

$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f_m(z)| &\le |f_n(z) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f_m(a_i)| + |f_m(a_i) - f_m(z)| \\
&\le \frac{4|z - a_i|}{r'} \cdot C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4|a_i - z|}{r'} \cdot C \\
&\le \frac{4C\varrho}{r'} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4C\varrho}{r'} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

also ist die Folge lokal-gleichmäßig konvergent, was die Behauptung ergibt. ■

2.13 Folgerung (Satz von Montel). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine lokal-beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Dann besitzt (f_n) eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Beweis: $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset G$ sei abzählbare, dichte Teilmenge von G, z.B. alle Punkte mit rationalen Koordinaten.

Betrachte nun $(f_n(a_1))_{n \in \mathbb{N}}$. Die Punktfolge ist beschränkt, also existiert eine Teilfolge $(f_{1,n})$ von (f_n), die in a_1 punktweise konvergiert. Nun betrachten wir die Werte der Teilfolge in a_2, $(f_{1,n}(a_2))_{n \in \mathbb{N}}$. Auch die sind beschränkt, d.h. es existiert eine Teilfolge $(f_{2,n})$ von $(f_{1,n})$, die in a_1 und a_2 punktweise konvergiert.

Analog wird die Teilfolge $(f_{k,n})$ von $(f_{k-1,n})$ gebildet, so daß $(f_{k,n})$ konvergent ist in allen a_i, für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Gehen wir jetzt zur Diagonalfolge $(f_{n,n})$ über, so konvergiert die punktweise auf A. Damit sind wir in der Situation des Satzes von oben, d.h. die Diagonalfolge konvergiert kompakt auf G. ∎

Eine Teilmenge eines Funktionenraumes wird oft auch als eine „Familie von Funktionen“bezeichnet.

Definition. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ heißt *normal*, wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathcal{F}$ eine auf G kompakt konvergente Folge (von paarweise verschiedenen Funktionen) enthält.

Eine Familie heißt *beschränkt*, falls sie lokal-beschränkt ist. Damit lautet der Satz von Montel nun :

Jede beschränkte Familie ist normal.

Nun wollen wir eine topologische Interpretation dieser Aussage anstreben.

2.14 Folgerung. *Sei $M \subset \mathcal{O}(G)$ abgeschlossen und beschränkt. Dann besitzt jede unendliche Folge in M eine dort konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $(f_n) \subset M$ eine Funktionenfolge.

Die Folge ist beschränkt, da M beschränkt ist. Nach dem Satz von Montel existiert eine kompakt-konvergente Teilfolge. Da M abgeschlossen ist, liegt die Grenzfunktion auch in M. ∎

Im $\mathbb{R}^n$ sind die abgeschlossenen und beschränkten Mengen genau die kompakten Mengen. In Funktionenräumen ist die Situation nicht so einfach. Deshalb benutzt man noch den folgenden Begriff:

Definition. Ein Hausdorffscher topologischer Raum heißt *folgenkompakt*, wenn es zu jeder unendlichen Folge eine konvergente Teilfolge gibt.

Bemerkung. Wir haben oben gezeigt: Ist $M \subset \mathcal{O}(G)$ abgeschlossen und beschränkt, so ist M folgenkompakt.

2.15 Behauptung. *Ist $M \subset \mathcal{O}(G)$ kompakt im üblichen Sinne, so ist M abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis: In jedem Hausdorff-Raum gilt: Aus „kompakt“ folgt „abgeschlossen“, wir müssen also nur noch zeigen, daß die Kompaktheit auch Beschränktheit impliziert. Dazu betrachten wir für $K \subset G$ die Abbildung $p_K : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{R}$ mit $p_K(f) := |f|_K$. Es gilt :

1. p_K ist stetig. Ist nämlich $f_0 \in \mathcal{O}(G)$ und $\varepsilon > 0$, so gilt für $f \in U := U_{K,\varepsilon}(f_0)$:

$$|p_K(f) - p_K(f_0)| \leq p_K(f - f_0) < \varepsilon,$$

also $p_K(U) \subset U_\varepsilon(p_K(f_0))$.

2. Ist nun $M \subset \mathcal{O}(G)$ kompakt, so ist das stetige Bild $p_K(M) \subset \mathbb{R}$ kompakt, insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $r > 0$, so daß $|f|_K < r$ für alle $f \in M$ ist. Da dabei K beliebig war, bedeutet das, daß M beschränkt ist.

■

2.16 Satz. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann gilt: X ist kompakt genau dann, wenn X folgenkompakt ist.*

Beweis: Siehe Analysis 2, Kapitel I, §1. ■

Der letzte Satz (und sein Beweis) ist leider nur auf metrische Räume anwendbar, also liegt es nahe, zu fragen, ob $\mathcal{O}(G)$ ein solcher ist.

2.17 Satz. *Es gibt eine Metrik auf $\mathcal{C}^0(G)$, die die K.O.-Topologie induziert.*

Beweis: Sei (K_n) eine kompakte Ausschöpfungsfolge von G. Setzen wir zur Abkürzung

$$p_n(f) := |f|_{K_n} = \max_{z \in K_n} |f(z)|,$$

und definieren damit

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \quad \text{und} \quad \delta(f) := d(f,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \frac{p_n(f)}{1+p_n(f)},$$

so gilt:

1. Die Reihe für $\delta(f)$ konvergiert absolut, weil der Bruch abgeschätzt werden kann, $0 \leq \frac{p_n(f)}{1+p_n(f)} < 1$. Wegen $d(f,g) = \delta(f-g)$ ist auch d wohldefiniert.

2. Es ist $\delta(0) = 0$. Ist umgekehrt $\delta(f) = 0$, so gilt $p_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber das bedeutet $f \equiv 0$.

3. δ erfüllt die Dreiecksgleichung : $\delta(f+g) \leq \delta(f) + \delta(g)$, denn p_n selbst erfüllt sie, die Funktion $x \mapsto x/(1+x)$ ist auf $\mathbb{R}_+$ monoton wachsend und es ist

$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \quad \text{für } x,y \geq 0.$$

4. Aus 1.) - 3.) folgt: d ist eine Metrik auf $\mathcal{C}^0(G)$.

5. Die Metrik d induziert die K.O.-Topologie:

   Weil d translationsinvariant ist (d.h. $d(f+h, g+h) = d(f,g)$), haben ε-Umgebungen von f_0 die Gestalt $f_0 + B_\varepsilon(0)$ mit $B_\varepsilon(0) = \{f \in \mathcal{C}^0(G) | \delta(f) < \varepsilon\}$, wir müssen also nur Umgebungen der Null betrachten.

Zu zeigen: Die von d induzierte Topologie ist feiner als die K.O.-Topologie. Dazu sei $M \subset \mathcal{C}^0(G)$ Umgebung der Null in der K.O.-Topologie, d.h. es gibt $K \subset G$ kompakt, $\varepsilon > 0$ mit $U_{K,\varepsilon}(0) \subset M$.

Weil die K_n ausschöpfend sind, können wir ein n wählen, so daß $K \subset K_n$ liegt. Es sei $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot (\frac{1}{2})^n$. Für ein Element $g \in B_{\varepsilon'}(0)$ ist $\delta(g) < \varepsilon'$, d.h.

$$\frac{p_n(g)}{1+p_n(g)} = 2^n \cdot (\frac{1}{2})^n \cdot \frac{p_n(g)}{1+p_n(g)} \leq 2^n \cdot \delta(g) \leq 2^n \cdot \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

und damit können wir wegen der Monotonie von $x/(1+x)$ den Ausdruck $p_n(g)$ nach oben abschätzen: $p_n(g) < \varepsilon$, d.h. $g \in U_{K,\varepsilon}(0) \subset M$, also liegt eine Kugel $B_{\varepsilon'}(0)$ in M.

Jetzt zeigen wir noch: die K.O.-Topologie ist feiner als die von d induzierte. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir suchen K, ε', so daß $U_{K,\varepsilon'}(0) \subset B_\varepsilon(0)$ ist. Sei n so groß, daß $(1/2)^n < \varepsilon/2$ ist. Dann setzen wir $\varepsilon' := \varepsilon/2$ und $K := K_n$. Für eine Funktion $g \in U_{K,\varepsilon'}(0)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} d(g,0) \;=\; \delta(g) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^j \cdot \frac{p_j(g)}{1+p_j(g)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2})^j \cdot p_j(g) + \sum_{j=n+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^j \\ &\leq p_n(g) \cdot \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2})^j + (\frac{1}{2})^n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^j \\ &\leq p_n(g) + (\frac{1}{2})^n \;\leq\; \varepsilon' + (\frac{1}{2})^n \;<\; \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $U_{K,\varepsilon'}(0) \subset B_\varepsilon(0)$, was zu zeigen war.

∎

Also ist der Raum $\mathcal{C}^0(G)$ ein metrischer Raum. Nach dem vorherigen Satz ist jeder Teilraum von $\mathcal{C}^0$ kompakt, wenn er folgenkompakt ist. Der Satz von Montel kann dann auch folgendermaßen formuliert werden:

Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition. Ein vollständiger, metrisierbarer, lokal-konvexer, topologischer Vektorraum heißt *Fréchet-Raum*.

Bemerkungen.

1. „Lokal-konvex“ heißt: jede Nullumgebung enthält eine konvexe Nullumgebung.

2. Ersetzen wir „metrisierbar“ und „lokal-konvex“ durch „normiert“, so erhalten wir einen Banachraum.

2.18 Satz. *$\mathcal{C}^0(G)$ und $\mathcal{O}(G)$ sind Fréchet-Räume.*

BEWEIS: Die Elementarumgebungen $U_{K,\varepsilon}(0)$ sind konvex. Den Rest haben wir schon gezeigt ! ∎

Definition. Ein Fréchet-Raum E heißt *Montel-Raum*, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge kompakt ist.

$\mathcal{O}(G)$ ist demnach ein Montel-Raum. Bisher nicht beantwortet haben wir die Frage, ob $\mathcal{O}(G)$ vielleicht sogar eine Norm besitzt, also ein Banachraum ist. Das ist nicht der Fall, denn sonst wäre $\{f \in \mathcal{O}(G) : \|f\| \le c\}$ eine kompakte Nullumgebung. Ein Satz aus der Funktionalanalysis würde dann liefern, daß $\mathcal{O}(G)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum wäre. Das kann aber nicht sein, da der unendlich-dimensionale Unterraum der Polynome in $\mathcal{O}(G)$ enthalten ist.

Bemerkung. Wir zeigen noch konkret: Jede Nullumgebung in $\mathcal{O}(G)$ ist unbeschränkt.

BEWEIS: Sei M eine Nullumgebung. Dann gibt es K kompakt und $\varepsilon > 0$, so daß $U_{K,\varepsilon} \subset M$ ist. Nehmen wir eine nicht-konstante, holomorphe Funktion f auf G (die Existenz einer solchen Funktion wird im nächsten Kapitel gezeigt), dann gibt es nach dem Maximumsprinzip einen Punkt z_0, in dem $|f|$ größer ist als auf K. Ist $\delta := \frac{1}{2}(|f(z_0)| - |f|_K)$, dann definieren wir eine holomorphe Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{|f|_K + \delta},$$

die auf K vom Betrage echt kleiner als Eins ist, in z_0 aber größer. Deshalb wird für großes n die Funktion $g^n(z)$ auf K beliebig klein, in z_0 aber unbeschränkt, d.h. es gibt ein n_0, so daß g^n in M liegt für $n \ge n_0$. Auf dem Kompaktum $\widetilde{K} = K \cup \{z_0\}$ sind sie aber beliebig groß, deshalb ist M unbeschränkt. ∎