# Kapitel 1 Biholomorphe Abbildungen

## § 1 Automorphismen von Gebieten

**Anmerkung:**
Dieser Abschnitt war schon Inhalt von Funktionentheorie 1.

**Definition.**

1. Seien $B_1, B_2$ zwei offene Mengen in $\mathbb{C}$, $f : B_1 \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(B_1) = B_2$. $f$ heißt *biholomorph*, falls $f$ sogar bijektiv und $f^{-1}$ holomorph ist.

2. Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *in $z_0 \in G$ lokal biholomorph*, falls es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$ gibt, so daß $f|_U : U \to V$ biholomorph ist.

3. $f$ heißt *auf $G$ lokal biholomorph*, falls $f$ in jedem Punkt $z \in G$ lokal biholomorph ist.

Offensichtlich gilt: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ injektiv und lokal biholomorph, so ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet und $f : G \to f(G)$ biholomorph.

**1.1 Satz.**

*$f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ lokal biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.*

Beweis:

1) Ist $f(z_0) = w_0$ und $f$ in $z_0$ lokal biholomorph, so gibt es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(w_0)$, sowie eine holomorphe Funktion $g : V \to U$, so daß $g \circ f|_U = \mathrm{id}_U$ ist. Aber dann ist $1 = (g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, also $f'(z_0) \neq 0$.

2) Sei umgekehrt $f'(z_0) \neq 0$. Da dann auch $\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$ und $f$ außerdem reell stetig differenzierbar ist, besitzt $f$ auf einer offenen Umgebung $U = U(z_0)$ eine reell differenzierbare Umkehrung.

Da $(f|_U)^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$ holomorph ist, gilt für $z \in U$ :

$$\begin{aligned} 0 &= ((f|_U)^{-1} \circ f)_{\overline{z}}(z) \\ &= ((f|_U)^{-1})_w(f(z)) \cdot f_{\overline{z}}(z) + ((f|_U)^{-1})_{\overline{w}}(f(z)) \cdot (\overline{f})_{\overline{z}}(z) \\ &= ((f|_U)^{-1})_{\overline{w}}(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$

Also ist $((f|_U)^{-1})_{\overline{w}} = 0$ und $(f|_U)^{-1}$ holomorph. ∎

Demnach kann man sagen: Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist $f(G)$ ein Gebiet und $f : G \to f(G)$ biholomorph. Wir werden bald sehen, daß man die Folgerungen auch unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen erhalten kann.

**1.2 Lemma.** *Sei $k \geq 1$ und $\varphi_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi_k(z) := z^k$. Dann gilt:*

1. *$\varphi_k$ ist im Punkt $z_0 := 1$ lokal biholomorph.*

2. *Ist $r > 0$, so bildet $\varphi_k$ die Kreisscheibe $D_r(0)$ surjektiv auf die Kreisscheibe $D_{r^k}(0)$ ab. Dabei kommt jeder Wert $\neq 0$ genau $k$-mal vor.*

Beweis: Die erste Aussage ist trivial, denn $\varphi_k'(z) = k \cdot z^{k-1}$ verschwindet nicht in $z_0 = 1$.

Der Punkt $z = \varrho e^{\mathrm{i}\,t}$ wird durch $\varphi_k$ auf $w = \varrho^k e^{\mathrm{i}\,kt}$ abgebildet. Läßt man $\varrho$ alle Werte zwischen 0 und $r$ durchlaufen, so erhält man die zweite Aussage. Sie entspricht der schon in Kapitel I, §1, bewiesenen Tatsache, daß jede komplexe Zahl $\neq 0$ genau $k$ $k$-te Wurzeln besitzt. ∎

**1.3 Satz.** *Hat die holomorphe Funktion $f$ in $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $k$, so gibt es in der Nähe von $z_0$ eine holomorphe Funktion $h$ mit einer einfachen Nullstelle, so daß $f(z) = h(z)^k$ ist.*

Beweis: O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Dann gibt es in der Nähe des Nullpunktes eine holomorphe Funktion $g$, so daß $f(z) = z^k \cdot g(z)$ und $g(0) \neq 0$ ist. Sei $c := g(0)$. Man kann dann auch schreiben:

$$f(z) = c \cdot z^k \cdot (1 + q(z)),$$

mit einer holomorphen Funktion $q$ und $q(0) = 0$. Ist $z$ nahe genug bei 0, so liegt $1 + q(z)$ in einer Umgebung $U = U(1)$, auf der $\varphi_k^{-1}$ definiert ist. Dann ist $h^*(z) := \sqrt[k]{1 + q(z)} := \varphi_k^{-1}(1 + q(z))$ holomorph und $h^*(0) = 1$. Wir können $h(z) := \sqrt[k]{c} \cdot z \cdot h^*(z)$ setzen. ∎

Dieser Satz hat eine wichtige Konsequenz:

**1.4 Satz.** *Eine nicht konstante holomorphe Funktion bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.*

Beweis: Sei $B \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, auf der $f$ definiert und holomorph ist, und $w_0 = f(z_0)$, für ein beliebiges $z_0 \in B$. Dann hat $g(z) := f(z) - w_0$ bei $z_0$ eine Nullstelle endlicher Ordnung. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $h$, die in $z_0$ eine einfache Nullstelle besitzt, so daß $g(z) = h(z)^k$ ist. Es ist $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$. Also bildet $h$ eine Umgebung von $z_0$ biholomorph auf eine Umgebung der Null ab, und $g = h^k = \varphi_k \circ h$ bildet sie zumindest surjektiv auf eine Umgebung der Null ab. Aber dann enthält $f(B)$ eine ganze Umgebung von $w_0$. ∎

**1.5 Folgerung (Satz von der Gebietstreue).** *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis: Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend, und das holomorphe Bild einer offenen Menge ist wieder offen. ∎

**Definition.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, falls $f$ offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Wir haben gerade gesehen, daß jede nicht konstante holomorphe Funktion eine offene Abbildung darstellt.

Man überlegt sich übrigens sofort: Eine stetige und bijektive Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann offen, wenn sie ein Homöomorphismus ist, wenn also auch $f^{-1}$ stetig ist.

Und jetzt kommt noch ein weiterer erstaunlicher Satz:

**1.6 Satz.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv.*

*Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, also insbesondere $f : G \to f(G)$ biholomorph.*

Beweis: Da $f'$ holomorph und nicht identisch Null ist, ist die Menge $A := \{z \in G \mid f'(z) = 0\}$ diskret in $G$. Weiter wissen wir schon, daß $f(G)$ ein Gebiet und $f : G \to f(G)$ stetig, offen und bijektiv ist, also ein Homöomorphismus. Daher ist auch $M := f(A)$ diskret in $f(G)$. Da $f : G \setminus A \to f(G) \setminus M$ bijektiv und lokal biholomorph, also sogar global biholomorph ist, gilt: $f^{-1} : f(G) \to G$ ist stetig und außerhalb $M$ holomorph. Aber dann muß $f^{-1}$ sogar auf ganz $f(G)$ holomorph sein.
∎

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung biholomorpher Abbildungen ist der folgende Satz:

**1.7 Schwarzsches Lemma.** *Sei $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann ist $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, und daher $|f'(0)| \leq 1$.*

*Ist sogar $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so ist $f(z) = e^{\mathrm{i}\,\lambda} \cdot z$ mit einem festen $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

ist offensichtlich holomorph auf $\mathbb{D}$. Sei nun $0 < r < 1$. Nach dem Maximumprinzip ist

$$|g(z)| \leq \max_{\partial D_r(0)} |g(\zeta)| \leq \frac{1}{r} \text{ für } |z| \leq r.$$

Läßt man $r$ gegen 1 gehen, so erhält man $|g(z)| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$. Daraus ergeben sich die ersten beiden Behauptungen.

Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so ist $|g(z)| = 1$ für ein $z \in \mathbb{D}$. Dann hat $g$ in $z$ ein lokales Maximum, und nach dem Maximumprinzip muß $g$ auf $\mathbb{D}$ konstant (vom Betrag 1) sein. Daraus folgt die letzte Behauptung. ∎

Die Gruppe aller biholomorphen Abbildungen eines Gebietes $G$ auf sich bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(G)$. Ist $\varphi : G_1 \to G_2$ biholomorph, so induziert $\varphi$ durch $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ einen Isomorphismus von $\mathrm{Aut}(G_1)$ auf $\mathrm{Aut}(G_2)$.

**1.8 Satz.** *Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $f(\alpha) = 0$. Dann gibt es ein $\theta$ mit*

$$f(z) = e^{\mathrm{i}\,\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \,.$$

BEWEIS: Für $\alpha \in \mathbb{D}$ sei

$$T_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \,.$$

Dann ist $T_\alpha$ eine Möbius-Transformation, die in $z = 1/\overline{\alpha}$ nicht definiert ist.

Ist $|z| = 1$, so ist auch

$$|T_\alpha(z)| = \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{z - \alpha}{\overline{z} - \overline{\alpha}} \right| = 1.$$

Nach dem Maximumprinzip ist dann $|T_\alpha(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$, also $T_\alpha(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Nach dem Satz von der Gebietstreue folgt sogar, daß $T_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ist.

Man rechnet nun leicht nach, daß $T_\alpha(-T_\alpha(-z)) = z$ ist. Das bedeutet, daß $T_\alpha$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist.

Jetzt sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ beliebig, mit $f(\alpha) = 0$. Dann ist auch $g := f \circ T_\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, und es ist $g(0) = 0$. Aus dem Schwarzschen Lemma folgt, daß $|g(z)| \leq |z|$ ist, und weil man das Lemma auch auf $g^{-1}$ anwenden kann, gilt sogar die Gleichheit. Aber daraus folgt wiederum, daß $g(z) = e^{\mathrm{i}\,\theta} z$ ist, für ein geeignetes $\theta$. Damit ist $f(z) = e^{\mathrm{i}\,\theta} \cdot T_\alpha(z)$. ∎

**Definition.** Die Menge $\mathbb{H} := \{z = x + \mathrm{i}\, y \;:\; y > 0\}$ nennt man die *obere Halbebene.*

**1.9 Satz.** *Die Abbildung $f(z) := \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ bildet $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ ab.*

BEWEIS: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{H}$. Dann ist $y > 0$ und

$$|z - \mathrm{i}\,|^2 = x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 = |z + \mathrm{i}\,|^2,$$

also $|f(z)| < 1$, d.h. $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$.

Löst man die Gleichung $f(z) = w$ nach $z$ auf, so erhält man

$$z = g(w) := -\mathsf{i} \cdot \frac{w+1}{w-1}\,.$$

Ist $w = u + \mathsf{i}\,v$, so ist

$$\begin{aligned} g(w) &= -\mathsf{i} \cdot \frac{(w+1)(\overline{w}-1)}{|w-1|^2} \\ &= \frac{-2v}{|w-1|^2} + \mathsf{i} \cdot \frac{1 - w\overline{w}}{|w-1|^2}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ ist. Also ist $f(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ und $g = f^{-1}$. ∎

**1.10 Folgerung.** *Die Abbildung* $z \mapsto \dfrac{z^2 - \mathsf{i}}{z^2 + \mathsf{i}}$ *bildet den ersten Quadranten biholomorph auf* $\mathbb{D}$ *ab.*

Das ist klar, denn $z \mapsto z^2$ bildet den ersten Quadranten biholomorph auf die obere Halbebene ab.

Man erhält auf diesem Wege auch die Automorphismengruppen von $\mathbb{H}$ und vom ersten Quadranten.

Wir führen jetzt die folgende Hilfsgröße ein:

$$\delta(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|.$$

$\delta(z, w)$ ist symmetrisch in $z$ und $w$, und es ist $\delta(z, 0) = |z|$.

Für $\alpha \in \mathbb{D}$ ist $\delta(z, \alpha) = |T_\alpha(z)|$.

**1.11 Lemma von Schwarz-Pick.** *Sei* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *holomorph. Dann ist*

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \le \delta(z_1, z_2)$$

*und*

$$|f'(z)| \le \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}\,.$$

*Ist sogar* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$*, so gilt in beiden Fällen die Gleichheit. Ist* $f$ *kein Automorphismus, so gilt die strenge Ungleichung.*

Beweis: Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, sowie $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$. Außerdem setzen wir $T := T_{-z_1}$ und $T^* := T_{w_1}$. Dann liegen $T$ und $T^*$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, und

$$g := T^* \circ f \circ T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

ist eine holomorphe Abbildung mit $g(0) = 0$. Aus dem Schwarzschen Lemma folgt:

$$|g(z)| \le |z| \quad \text{und} \quad |g'(0)| \le 1.$$

Dabei gilt jeweils die Gleichheit, wenn $g$ eine Rotation ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\delta(f(z_1), f(z_2)) &= \left|\frac{f(z_2) - w_1}{1 - \overline{w}_1 f(z_2)}\right| \\
&= |T^*(f(z_2))| \ = \ |g(T^{-1}(z_2))| \\
&\leq |T^{-1}(z_2)| \ = \ |-T_{-z_1}(-z_2)| \\
&= \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right| \\
&= \delta(z_1, z_2),
\end{aligned}$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $g$ eine Rotation ist.

Weil $g'(0) = (T^*)'(w_1) \cdot f'(z_1) \cdot T'(0)$ ist, folgt:

$$|f'(z_1)| \leq \frac{1}{|T'(0)| \cdot |(T^*)'(w_1)|} \ .$$

Allgemein ist

$$T'_\alpha(z) = \frac{(1 - \overline{\alpha}z) + \overline{\alpha}(z - \alpha)}{(1 - \overline{\alpha}z)^2} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}z)^2} \ ,$$

speziell also

$$T'(0) = 1 - |z_1|^2 \quad \text{und} \quad (T^*)'(w_1) = \frac{1}{1 - |w_1|^2} \ .$$

Daraus folgt die zweite Behauptung.

Ist $f$ ein Automorphismus, so auch $g$, und wegen $g(0) = 0$ ist $g$ dann eine Rotation. In diesem Falle erhalten wir die Gleichheit.

Ist umgekehrt $|f'(z_1)| = (1 - |f(z_1)|^2)/(1 - |z_1|^2)$, so ist $|g'(0)| = 1$, also $g$ (und damit auch $f$) ein Automorphismus. ■

Wir wollen jetzt die *hyperbolische Geometrie* auf dem Einheitskreis einführen.

**Definition.** Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{D}$ ein Integrationsweg, so heißt

$$l_h(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt$$

die *hyperbolische Weglänge* von $\gamma$.

Ist z.B. $\gamma : [0, 1 - \varepsilon] \to \mathbb{D}$ mit $\gamma(t) = t$ die Verbindungsstrecke von 0 nach $1 - \varepsilon$, so ist

$$l_h(\gamma) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \ .$$

Für $\varepsilon \to 0$, also $1 - \varepsilon \to \partial\mathbb{D}$, strebt $l_h(\gamma)$ gegen $+\infty$.

**1.12 Satz.** *Unter allen Integrationswegen $\mu : [a, b] \to \mathbb{D}$ mit $\mu(a) = 0$ und $\mu(b) = 1 - \varepsilon$ ist die Verbindungsstrecke $\gamma$ der Weg mit der kürzesten hyperbolischen Weglänge.*

*Außerdem ist $l_h(\alpha) \geq l(\alpha)$ für jeden Integrationsweg $\alpha$ in $\mathbb{D}$.*

BEWEIS: Wir schreiben $\mu = \mu_1 + \mathrm{i}\,\mu_2$. Dann ist

$$|\mu'(t)| \geq |\mu_1'(t)| \geq \mu_1'(t)$$

und

$$1 - |\mu(t)|^2 = 1 - \mu_1(t)^2 - \mu_2(t)^2 \leq 1 - \mu_1(t)^2.$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} l_h(\mu) &= \int_a^b \frac{|\mu'(t)|}{1-|\mu(t)|^2}\,dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\mu_1'(t)}{1-\mu_1(t)^2}\,dt \\ &= \int_{\mu_1(a)}^{\mu_1(b)} \frac{1}{1-t^2}\,dt \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t^2}\,dt \;=\; l_h(\gamma). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für einen beliebigen Weg $\alpha : [a,b] \to \mathbb{D}$:

$$l_h(\alpha) = \int_a^b \frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}\,dt \geq \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt = l(\alpha).$$

Die hyperbolische Weglänge ist stets größer als die euklidische Weglänge. ∎

Der *hyperbolische Abstand* zwischen zwei Punkten $x$ und $y$ in $\mathbb{D}$ ist die Zahl

$$d_h(x,y) := \inf\{l_h(\gamma)\ :\ \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

Offensichtlich ist stets $d_h(x,y) \geq d(x,y)$, und es ist $d_h(x,x) = 0$.

**1.13 Satz.** *Der hyperbolische Abstand ist eine Metrik auf $\mathbb{D}$, d.h., es gilt:*

1. $d_h(x,y) \geq 0$.
2. *Ist $d_h(x,y) = 0$, so ist $x = y$.*
3. $d_h(x,y) = d_h(y,x)$ *für alle $x, y \in \mathbb{D}$.*
4. *Es gilt die Dreiecks-Ungleichung:*

$$d_h(x,y) \leq d_h(x,z) + d_h(z,y).$$

Der BEWEIS ist einfach.

**1.14 Satz.** *Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann ist $l_h(f \circ \gamma) \leq l_h(\gamma)$ für alle Wege $\gamma$, also $d_h(f(z), f(w)) \leq d_h(z,w)$.*

BEWEIS: Wir verwenden das Lemma von Schwarz-Pick. Danach ist

$$\begin{aligned} l_h(f \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{1 - |f \circ \gamma(t)|^2}\, dt \\ &= \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|}{1 - |f(\gamma(t))|^2}\, dt \\ &\leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt \\ &= l_h(\gamma). \end{aligned}$$

∎

**1.15 Folgerung.** *Jeder Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist eine Isometrie bezüglich $d_h$.*

BEWEIS: Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph, so ist $l_h(f \circ \gamma) = l_h(\gamma)$. ∎

**1.16 Satz.** *Für $z, w \in \mathbb{D}$ ist $d_h(z, w) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \delta(z, w)}{1 - \delta(z, w)}$.*

BEWEIS: Ist $z = 0$ und $w$ reell und positiv, so ist $\delta(z, w) = w$. In diesem Fall kennen wir die Formel schon.

Sind $z, w \in \mathbb{D}$ beliebig, so setzen wir $T := T_z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Dann ist $T(z) = 0$ und $|T(w)| = \delta(z, w)$. Daraus folgt:

$$d_h(z, w) = d_h(T(z), T(w)) = d_h(0, T(w)) = d_h(0, |T(w)|) = d_h(0, \delta(z, w)).$$

Mit der obigen Bemerkung ergibt sich die Behauptung. ∎

**1.17 Satz.** *Die hyperbolische Metrik $d_h$ induziert die Standard-Topologie auf $\mathbb{D}$, und der metrische Raum $(\mathbb{D}, d_h)$ ist vollständig.*

BEWEIS: Für $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\begin{aligned} d_h(0, z) < \varepsilon &\iff \frac{1 + \delta(0, z)}{1 - \delta(0, z)} < e^{2\varepsilon} \\ &\iff \delta(0, z) < \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \\ &\iff |z| < \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \end{aligned}$$

Also stimmen die Umgebungen von 0 in beiden Topologien überein. Ist $z_0 \in \mathbb{D}$ ein beliebiger Punkt, so gibt es einen Automorphismus $T$ von $\mathbb{D}$, der 0 auf $z_0$ abbildet. Da $T$ biholomorph ist, bildet $T$ Umgebungen von 0 (in der Standard-Topologie) auf Umgebungen von $z_0$ ab, und umgekehrt. Als Isometrie bildet $T$ aber auch $\varepsilon$-Umgebungen von 0 (in der hyperbolischen Metrik) auf ebensolche Umgebungen von $z_0$ ab. Also sind die Topologien gleich.

Sei nun $(z_n)$ eine Cauchyfolge bezüglich der hyperbolischen Metrik. Dann gibt es ein $r$ mit $0 < r < 1$, so daß alle $z_n$ in

$$\overline{D_r^{(h)}(0)} = \{z \in \mathbb{D} : d_h(0, z) \leq r\}$$

liegen (denn $\partial\mathbb{D}$ ist vom Nullpunkt unendlich weit entfernt). Aber dann konvergiert eine Teilfolge (in der gewöhnlichen Metrik) gegen ein $z_0$ in dieser abgeschlossenen Kreisscheibe. Diese Teilfolge konvergiert auch in der hyperbolischen Metrik, und weil $(z_n)$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert sogar die ursprüngliche Folge gegen $z_0$. ∎

Um 300 v.Chr. wurde in Alexandria in Ägypten eine Universität und die größte Bibliothek der damaligen Welt gebaut. Die führenden Gelehrten der Zeit wurden eingeladen, um zu forschen und Vorlesungen zu halten. Einer der ersten Wissenschaftler in Alexandria muß ein Mathematiker mit dem Namen *Euklid* gewesen sein. Über seine Person ist so gut wie nichts bekannt, aber er war es, der die „Elemente“ zusammenstellte, das einflußreichste Lehrbuch in der Geschichte der Zivilisation.

Die „Elemente“ enthalten die wichtigsten mathematischen Fakten, die zu jener Zeit bekannt waren. Die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie.

Nach Einführung der Begriffe stellt Euklid 5 Postulate auf, aus denen er dann die gesamte Geometrie herleitet. Nach unseren Maßstäben enthielten diese Postulate Lücken, die spätestens um 1900 von David Hilbert geschlossen wurden. Eine moderne Version von Euklids Postulaten würde etwa folgendermaßen aussehen:

**Postulat I (Inzidenz):** Durch je zwei (verschiedene) Punkte geht genau eine Gerade. Jede Gerade enthält wenigstens zwei (verschiedene) Punkte. Die Ebene enthält wenigstens zwei (verschiedene) Geraden.

**Postulat II (Anordnung):** Von drei (verschiedenen) Punkten auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen. Zu zwei Punkten $A, B$ gibt es einen dritten Punkt $C$ auf der gleichen Geraden, so daß $B$ zwischen $A$ und $C$ liegt.

Man kann dann sagen, daß zwei Punkte $A$ und $B$ auf verschiedenen Seiten einer Geraden $\ell$ liegen, wenn es einen Punkt $C$ auf $\ell$ gibt, der zwischen $A$ und $B$ liegt. Es wird noch gefordert, daß eine Gerade immer genau zwei Seiten besitzt.

**Postulat III (Bewegungen):** Es gibt eine Gruppe von bijektiven Abbildungen der Ebene auf sich (sogenannten *Bewegungen* oder *Kongruenzabbildungen*), die Inzidenzen und Anordnungen respektieren.

Geometrische Figuren heißen *kongruent*, wenn sie durch eine Bewegung aufeinander abgebildet werden. Es wird gefordert, daß es genügend viele Bewegungen gibt, so daß die bekannten Kongruenzsätze (insbesondere SWS) gelten. Man kann dann auch Spiegelungen, Drehungen und Translationen, sowie rechte Winkel definieren.

**Postulat IV (Stetigkeit):** Geraden sind vollständig im Sinne des Dedekindschen Schnittaxioms.

Bei Euklid lauten die Postulate anders (mit Ausnahme von (I)), aber er benutzt die oben genannten Eigenschaften zumindest implizit. Mit Hilfe von (I) bis (IV) beweist er 31 Sätze, dann benutzt er zum ersten Mal sein letztes Postulat. Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben. Nun wird gefordert:

**Postulat V (Parallelenaxiom):** Ist $\ell$ eine Gerade und $P$ ein Punkt, der nicht auf $\ell$ liegt, so gibt es genau eine Gerade $\ell'$ durch $P$, die parallel zu $\ell$ ist.

Bei Euklid war die Formulierung des 5. Postulates sehr viel komplizierter als die der ersten vier Postulate. Obwohl es gebraucht wurde, um den Satz von der Winkelsumme im Dreieck und den Satz des Pythagoras herzuleiten, sahen es die nachfolgenden Mathematiker als nicht vollwertiges Axiom an und versuchten, es zu beweisen. Zunächst die Griechen, dann die Araber, dann die Italiener, die Engländer und zuletzt die Deutschen, Schweizer und Franzosen. Fast 2000 Jahre lang!

Dann entdeckten im 18. Jahrhundert fast gleichzeitig der Deutsche Carl Friedrich Gauß, der Ungar Johann Bolyai und der Russe Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, daß man mit Hilfe der Postulate (I) bis (IV) und einer abgeänderten Version von Postulat (V) eine ebenfalls in sich schlüssige Geometrie entwickeln konnte, in der z.B. die Winkelsumme im Dreieck stets weniger als 180° betrug. Die „Nichteuklidische Geometrie“ war gefunden! Damit wurde gleichzeitig offensichtlich, daß man in der Euklidischen Geometrie auf das Parallelenaxiom nicht verzichten konnte.

Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der Nichteuklidischen Geometrie konnte erst Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts mit Hilfe von Modellen nachgewiesen werden. Ein besonders schönes Modell liefert uns die hyperbolische Geometrie im Einheitskreis (nach Poincaré).

Wir haben gezeigt, auf welchen Wegen die hyperbolische Länge jeweils ihr Minimum annimmt, nämlich auf den konformen Bildern von Abschnitten der positiven reellen Achse. Dies können wieder nur Abschnitte von Geraden oder Kreisen sein. Wegen der Konformität müssen die Bildkurven in der Verlängerung den Rand des Einheitskreises unter einem rechten Winkel treffen. Das tun nur Geraden durch den Nullpunkt oder sogenannten *Orthokreise*, die $\partial\mathbb{D}$ unter einem rechten Winkel treffen.

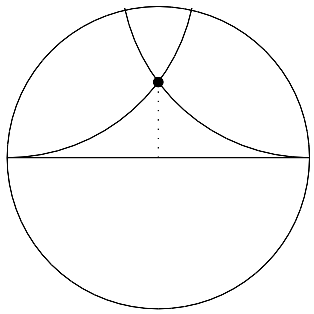
Das Poincaré-Modell sieht nun folgendermaßen aus:

Als „Ebene“ benutzen wir das Innere des Einheitskreises $\mathbb{D}$, als „Geraden“ die Orthokreise (incl. der euklidischen Geraden durch den Nullpunkt). Die Inzidenz- und Anordnungsaxiome sind offensichtlich erfüllt, und da alle hyperbolischen Geraden homöomorph zu einem offenen Intervall und damit zur rellen Achse sind, ist auch das Dedekind-Axiom erfüllt.

Als Bewegungsgruppe dient die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{D})$. Sie setzt sich zusammen aus den verallgemeinerten Translationen $T_\alpha$, den Drehungen $R_\theta$ um 0 und der Spiegelung $z \mapsto \bar{z}$. Dann kann man zeigen, daß alle Bewegungs-Axiome erfüllt sind.

In der vorliegenden Geometrie ist offensichtlich das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt:

> *Es gibt eine Gerade $\ell$ und einen Punkt $P$, der nicht auf $\ell$ liegt, so daß durch $P$ mindestens zwei Parallelen zu $\ell$ gehen.*



Man kann auch leicht Dreiecke mit einer Winkelsumme $< 180°$ finden: