Anhang
Komplexe Analysis von mehreren Veränderlichen

§ 1 Holomorphe Funktionen

Definition. Die *euklidische Norm* eines Vektors $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ wird gegeben durch

$$\|\mathbf{z}\| := \sqrt{<\mathbf{z}\,|\,\mathbf{z}>} = \sqrt{(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{z})_n}\,,$$

die *euklidische Distanz* zwischen zwei Vektoren $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ durch

$$\operatorname{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|.$$

Eine äquivalente Norm ist die *Supremumsnorm* or *der Betrag* eines Vektors:

$$|\mathbf{z}| := \max_{\nu=1,\dots,n} |z_\nu|.$$

Diese Norm leitet sich nicht von einem inneren Produkt ab, aber sie definiert die gleiche Topologie auf dem $\mathbb{C}^n$ wie die euklidische Norm.

Definition. Sei $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, alle $r_\nu > 0$, $\mathbf{z}_0 = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$. Dann nennt man

$$\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}| < r_\nu \text{ for } \nu = 1, \dots, n\}$$

den (*offenen*) *Polyzylinder* mit *Polyradius* $\mathbf{r}$ und Zentrum $\mathbf{z}_0$. Ist $r \in \mathbb{R}_+$ und $\mathbf{r} := (r, \dots, r)$, so schreiben wir $\mathsf{P}^n_r(\mathbf{z}_0)$ statt $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r})$. Insbesondere ist $\mathsf{P}^n_r(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0| < r\}$.

$\mathsf{P}^n := \mathsf{P}^n_1(\mathbf{0}) = \underbrace{\mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}}_{n \text{ times}}$ nennt man den *Einheitspolyzylinder* um $\mathbf{0}$.

Wir interessieren uns nicht für den topologischen Rand des Polyzylinders. Der folgende Teil des Randes ist wichtiger:

Definition. Der *ausgezeichnete Rand* des Polyzylinders $\mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r})$ ist die Menge

$$\mathsf{T}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_\nu - z_\nu^{(0)}| = r_\nu \text{ für } \nu = 1, \dots, n\}\,.$$

Der ausgezeichnete Rand ist das kartesische Produkt von n Kreisen, also ein n-dimensionaler *Torus*. Im Falle $n = 1$ reduziert sich ein Polyzylinder auf eine einfache Kreisscheibe, und sein ausgezeichneter Rand stimmt mit seinem topologischen Rand überein.

Ein *Bereich* ist eine offene Menge im $\mathbb{C}^n$, ein *Gebiet* ist ein zusammenhängender Bereich.

Eine reelle Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ zerlegt ein Gebiet in two oder mehr disjunkte offene Stücke. Für komplexe Hyperebenen im $\mathbb{C}^n$ (mit reeller Codimension 2) gilt das nicht.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und

$$E := \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, z_1 = 0\}.$$

Dann ist $G' := G \setminus E$ wieder ein Gebiet.

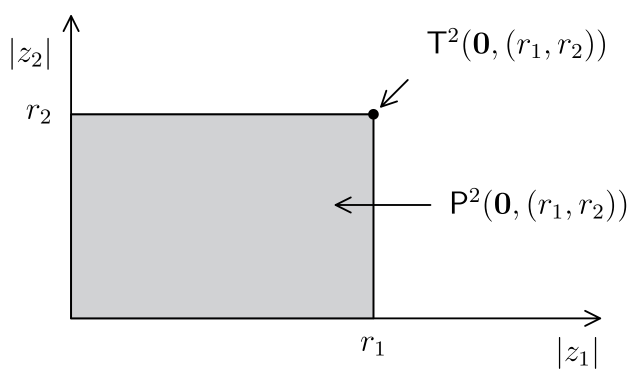
Definition. Die Menge

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, r_\nu \geq 0 \text{ für } \nu = 1, \dots, n\}$$

nennt man den *absoluten Raum*, die Abbildung $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathcal{V}$ mit $\tau(z_1, \dots, z_n) := \big(|z_1|, \dots, |z_n|\big)$ die *natürliche Projektion*.

τ ist stetig und surjektiv. Für $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, ist $\tau^{-1}(\mathbf{r})$ der Torus $\mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$. Für $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ sei $\mathsf{P}_\mathbf{z} := \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \tau(\mathbf{z}))$ und $\mathsf{T}_\mathbf{z} := \mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \tau(\mathbf{z})) = \tau^{-1}(\tau(\mathbf{z}))$.

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Reinhardtsches Gebiet*, falls mit jedem $\mathbf{z} \in G$ der Torus $\mathsf{T}_\mathbf{z}$ ebenfalls in G enthalten ist.

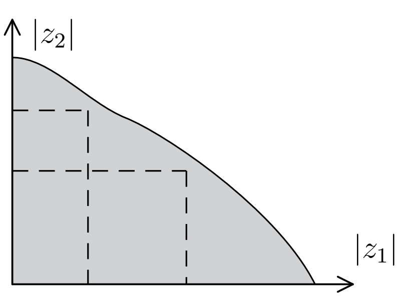


Reinhardtsche Gebiete G werden durch ihre Bilder im absoluten Raum charakterisiert: $\tau^{-1}\tau(G) = G$. Deshalb kann man sie als Gebiete in $\mathcal{V}$ visualisieren. Beispiele sind Kugeln und Polyzylinder um den Nullpunkt.

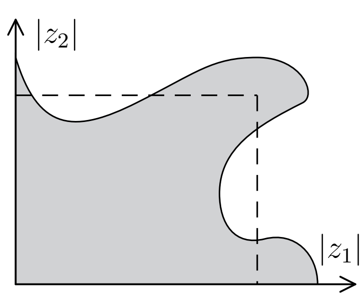
Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Reinhardtsches Gebiet.

1. G heißt *eigentlich*, falls $\mathbf{0} \in G$ ist.

2. G heißt *vollständig*, falls gilt: $\forall\, \mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n \,:\, \mathsf{P}_\mathbf{z} \subset G$.



vollst. Reinhardtsches Gebiet



eigentl. Reinhardtsches Gebiet

Wir führen Multi-Indizes ein.

Für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ sei

$$|\nu| := \sum_{i=1}^{n} \nu_i \quad \text{und} \quad \mathbf{z}^\nu := z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}.$$

Die Schreibweise $\nu \geq 0$ (bzw. $\nu > 0$) bedeutet, dass $\nu_i \geq 0$ für jedes i (bzw. $\nu \geq 0$ und $\nu_i > 0$ für wenigstens ein i) ist.

Eine Funktion der Gestalt

$$\mathbf{z} \mapsto p(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu| \leq m} a_\nu \mathbf{z}^\nu, \text{ mit } a_\nu \in \mathbb{C} \text{ für } |\nu| \leq m,$$

nennt man ein *Polynom* (vom *Grad* $\leq m$). Gibt es ein ν mit $|\nu| = m$ und $a_\nu \neq 0$, so hat $p(\mathbf{z})$ den *Grad* m. Für das Nullpolynom ist kein Grad definiert. Ein Ausdruck der Form $a_\nu \mathbf{z}^\nu$ mit $a_\nu \neq 0$ wird als *Monom* vom Grad $m := |\nu|$ bezeichnet. Ein Polynom $p(\mathbf{z})$ heißt *homogen* vom Grad m, falls es nur aus Monomen vom Grad m besteht.

1.1 Satz. *Ein Polynom $p(\mathbf{z}) \neq 0$ vom Grad m ist genau dann homogen, wenn gilt:*

$$p(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^m \cdot p(\mathbf{z}), \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

BEWEIS: Sei $p(\mathbf{z}) = a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ein Monom vom Grad m. Dann ist

$$p(\lambda \mathbf{z}) = a_\nu (\lambda \mathbf{z})^\nu = \lambda^m \cdot a_\nu \mathbf{z}^\nu = \lambda^m \cdot p(\mathbf{z}).$$

Das Gleiche gilt für endliche Summen von Monomen

Umgekehrt sei $p(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu| \leq N} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ ein beliebiges Polynom mit $p(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^m \cdot p(\mathbf{z})$. Wenn wir alle Monome vom Grad i sammeln, dann erhalten wir ein Polynom $p_i(\mathbf{z}) = \sum_{|\nu|=i} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ mit $p_i(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^i \cdot p_i(\mathbf{z})$. Für festes $\mathbf{z}$ sind die zwei Polynome

$$\lambda \mapsto p(\lambda \mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{N} p_i(\mathbf{z}) \cdot \lambda^i \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto \lambda^m \cdot p(\mathbf{z})$$

gleich. Das ist nur möglich, wenn die Koeffizienten gleich sind, d.h., $p_m(\mathbf{z}) = p(\mathbf{z})$ und $p_i(\mathbf{z}) = 0$ für $i \neq m$. Also ist $p = p_m$ homogen. ∎

Ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ eine komplexe Zahl c_ν gegeben, so kann man die Reihe $\sum_{\nu \geq 0} c_\nu$ bilden und auf Konvergenz untersuchen.

Definition. Die Reihe $\sum_{\nu \geq 0} c_\nu$ heißt *konvergent*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0^n$ gibt, so dass $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{\varphi(i)}| < \infty$ ist. Die komplexe Zahl $\sum_{i=1}^{\infty} c_{\varphi(i)}$ nennt man den *Grenzwert* der Reihe.

Es ist klar, dass dieser Konvergenzbegriff unabhängig von der Abbildung φ ist und dass er absolute Konvergenz bedeutet.

1.2 Satz. *$\sum_{\nu\geq 0} c_\nu$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$\Big\{ \sum_{\nu\in I} |c_\nu| \,:\, I \subset \mathbb{N}_0^n \text{ endlich} \Big\}$$

eine beschränkte Menge ist.

Der BEWEIS ist trivial.

Beispiel.

$q_1, \ldots, q_n$ seien reelle Zahlen mit $0 < q_i < 1$ für $i = 1, \ldots, n$, sowie $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_n)$. Dann ist $\mathbf{q}^\nu = q_1^{\nu_1} \cdots q_n^{\nu_n}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ eine positive reelle Zahl.

Ist $I \subset \mathbb{N}_0^n$ eine endliche Menge, so gibt es eine Zahl N mit $I \subset \{0, 1, \ldots, N\}^n$, und daher ist

$$\Big| \sum_{\nu\in I} \mathbf{q}^\nu \Big| = \sum_{\nu\in I} \mathbf{q}^\nu \leq \prod_{i=1}^n \sum_{\nu_i=0}^N q_i^{\nu_i} \leq \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-q_i}.$$

Da die Partialsummen beschränkt sind, ist die Reihe konvergent. Der Grenzwert ist

$$\sum_{\nu\geq 0} \mathbf{q}^\nu = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-q_i}.$$

Wir sprechen von einer *verallgemeinerten geometrischen Reihe.*

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge und $\{f_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine Familie von komplexwertigen Funktionen auf M. Mit $\|f_\nu\|_M$ sei das Supremum von $|f_\nu|$ auf M bezeichnet.

Definition. Die Reihe $\sum_{\nu\geq 0} f_\nu$ heißt *normal konvergent* auf M, falls die Reihe der positiven reellen Zahlen $\sum_{\nu\geq 0} \|f_\nu\|_M$ konvergent ist.

Ist $\{a_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine Familie von komplexen Zahlen und $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Punkt, so nennt man

$$\sum_{\nu\geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$$

eine *(formale) Potenzreihe* um $\mathbf{z}_0$. Konvergiert die Reihe normal auf einer Menge M gegen eine komplexe Funktion f, so ist f als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen auf M stetig.

1.3 Abelsches lemma. *$P' \subset\subset P \subset \mathbb{C}^n$ seien Polyzylinder um den Nullpunkt. Wenn die Potenzreihe $\sum_{\nu\geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ in einem Punkt des ausgezeichneten Randes von P konvergiert, dann konvergiert sie normal auf P'.*

Beweis: Sei $\mathbf{w} \in \partial_0 P$ ein Punkt, wo $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{w}^\nu$ konvergent ist. Dann gibt es eine Konstante c, so dass $|a_\nu \mathbf{w}^\nu| \leq c$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ gilt.

Wir wählen reelle Zahlen q_i mit $0 < q_i < 1$, so dass $|z_i| \leq q_i |w_i|$ für jedes $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in P'$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt. Es folgt:

$$|a_\nu \mathbf{z}^\nu| \leq \mathbf{q}^\nu \cdot c, \text{ für } \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \; \mathbf{z} \in P', \text{ und } \nu \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dann ist auch $\|a_\nu \mathbf{z}^\nu\|_{P'} \leq \mathbf{q}^\nu \cdot c$, und aus der Konvergenz der verallgemeinerten geometrischen Reihe folgt, dass $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ normal konvergent auf P' ist. ∎

Definition. Die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ *konvergiert kompakt* in einem Gebiet G, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ normal konvergiert.

1.4 Folgerung. *Sei $P \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder um den Nullpunkt und $\mathbf{w}$ ein Punkt des ausgezeichneten Randes von P. Wenn die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ in $\mathbf{w}$ konvergiert, dann konvergiert sie auf P kompakt.*

Beweis: Sei $K \subset P$ kompakt. Dann gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so dass $K \subset q \cdot P \subset\subset P$ ist. Deshalb ist die Reihe auf K normal konvergent. ∎

Sei $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine formale Potenzreihe um den Nullpunkt und

$$B := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \, : \, S(\mathbf{z}) \text{ konvergent}\}.$$

1.5 Satz. *Der offene Kern $\mathring{B}$ ist ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet, und $S(\mathbf{z})$ konvergiert kompakt in $\mathring{B}$.*

Beweis: Sei $\mathbf{w}$ ein Punkt von $\mathring{B}$. Es gibt einen Polyzylinder $\mathsf{P}^n(\mathbf{w}, \varepsilon) \subset \mathring{B}$ und einen Punkt $\mathbf{v} \in \mathsf{P}^n(\mathbf{w}, \varepsilon) \cap (\mathbb{C}^*)^n$, so dass $\mathbf{w} \in P_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})$ ist. Dann ist $T_{\mathbf{w}} \subset \mathring{B}$, und mit $\mathbf{w} \in (\mathbb{C}^*)^n$ ist auch $P_{\mathbf{w}}(\mathbf{0}) \subset \mathring{B}$.

Um zu sehen, dass $\mathring{B}$ ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet ist, müssen wir noch zeigen, dass es zusammenhängend ist. Aber das ist sehr einfach. Jeder Punkt aus $\mathring{B}$ kann mit einem Punkt in $\mathring{B} \cap (\mathbb{C}^*)^n$ verbunden werden, und dann innerhalb eines geeigneten Polyzylinders mit dem Ursprung.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass $\mathring{B}$ eine Vereinigung von relativ kompakten Polyzylindern um den Nullpunkt ist. Deshalb konvergiert $S(\mathbf{z})$ kompakt in $\mathring{B}$. ∎

Die Menge $\mathring{B}$ nennt man das *Konvergenzgebiet* von $S(\mathbf{z})$.

1.6 Satz. *Sei G das Konvergenzgebiet der Potenzreihe $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$. Dann konvergiert auch*

$$S_{z_j}(\mathbf{z}) := \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_j > 0}} a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j - 1} \cdots z_n^{\nu_n}$$

kompakt auf G.

BEWEIS: Sei $\mathbf{w}$ irgend ein Punkt in $(\mathbb{C}^*)^n \cap G$ und $|a_\nu \mathbf{w}^\nu| \leq c$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$. Ist $0 < q < 1$ und $\mathbf{z} = q \cdot \mathbf{w}$, so ist

$$|a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j} \cdots z_n^{\nu_n}| = \frac{\nu_j}{|z_j|} \cdot |a_\nu \mathbf{z}^\nu| \leq \frac{c}{|z_j|} \cdot \nu_j \cdot q^{|\nu|}.$$

Aber

$$\sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_j > 0}} \nu_j q^{|\nu|} = \left(\sum_{\nu_1 = 0}^{\infty} q^{\nu_1} \right) \cdots \left(\sum_{\nu_j = 1}^{\infty} \nu_j q^{\nu_j} \right) \cdots \left(\sum_{\nu_n = 0}^{\infty} q^{\nu_n} \right)$$

ist konvergent. Also ist $S_{z_j}(\mathbf{z})$ konvergent, und es folgt, dass S_{z_j} normal konvergent auf $P_{\mathbf{z}}(\mathbf{0})$ ist. Da jede kompakte Menge $K \subset G$ durch endlich viele Polyzylinder dieser Art überdeckt werden kann, konvergiert S_{z_j} auf P kompakt. ■

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$ und eine Potenzreihe $S(\mathbf{z}) := \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ gibt, die auf U gegen $f(\mathbf{z})$ konvergiert.

Die Menge der holomorphen Funktionen auf B wird mit $\mathcal{O}(B)$ bezeichnet.

Offensichtlich ist jede holomorphe Funktion stetig.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathbf{z}_0 \in B$ ein Punkt. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* in $\mathbf{z}_0$, falls eine Abbildung $\Delta : B \to \mathbb{C}^n$ existiert, so dass gilt:

1. Δ ist stetig in $\mathbf{z}_0$.
2. $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^t$ für $\mathbf{z} \in B$.

Wie üblich zeigt man: Ist f komplex differenzierbar in $\mathbf{z}_0$, so ist der Wert der Funktion Δ bei $\mathbf{z}_0$ eindeutig bestimmt. Die eindeutig bestimmten Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta(\mathbf{z}_0)^t$$

nennt man die *partiellen Ableitungen* von f in $\mathbf{z}_0$. Der Vektor

$$\nabla f(\mathbf{z}_0) := (f_{z_1}(\mathbf{z}_0), \ldots, f_{z_n}(\mathbf{z}_0)) = \Delta(\mathbf{z}_0)$$

wird als der *komplexe Gradient* von f in $\mathbf{z}_0$ bezeichnet.

Bemerkungen.

1. Ist f in $\mathbf{z}_0$ komplex differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

2. f heißt *komplex differenzierbar* in einem Bereich B, wenn f in jedem Punkt von B komplex differenzierbar ist. Sind alle partiellen Ableitungen in $\mathbf{z}_0$ wieder komplex differenzierbar, so nennt man f in $\mathbf{z}_0$ *zweimal komplex differenzierbar*, und man erhält *zweite Ableitungen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial z_\mu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu z_\mu}(\mathbf{z}_0).$$

   Induktiv definiert man so partielle Ableitungen von beliebiger Ordnung.

3. Summen, Produkte und Quotienten (mit nicht verschwindenden Nennern) von komplex differenzierbaren Funktionen sind wieder komplex differenzierbar.

Eine Funktion f heißt *partiell differenzierbar* in $\mathbf{z}_0$, falls alle partiellen Ableitungen $f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0)$ existieren. Sie heißt *schwach holomorph* auf B, falls sie auf B stetig und partiell differenzierbar ist. Für $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in B$ und $\nu = 1, \ldots, n$ sind die Funktionen

$$\zeta \mapsto f(z_1, \ldots, z_{\nu-1}, \zeta, z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$$

holomorphe Funktionen von einer Variablen.

Ist f komplex differenzierbar auf B, so ist f auch schwach holomorph auf B. Später werden wir sehen, dass schwach holomorphe Funktionen komplex differenzierbar sind.

1.7 Satz. *Sei $P \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder um Null und $S(z) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine Potenzreihe, die auf P kompakt gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f komplex differenzierbar in $\mathbf{0}$, mit*

$$f_{z_1}(\mathbf{0}) = a_{1,0,\ldots,0}\,, \ldots,\; f_{z_n}(\mathbf{0}) = a_{0,\ldots,0,1}.$$

BEWEIS: Wir wählen einen kleinen Polyzylinder $P_\varepsilon \subset\subset P$ um Null, so dass $S(\mathbf{z})$ auf P_ε normal konvergent ist. Dann sind auch alle Reihen normal konvergent, die man durch Umordnung erhält, und sie konvergieren gegen den gleichen Grenzwert. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu \\ &= a_{0,0,\ldots,0} + z_1 \cdot \sum_{\substack{\nu_1 > 0 \\ \nu_2,\ldots,\nu_n \geq 0}} a_\nu z_1^{\nu_1 - 1} z_2^{\nu_2} \cdots z_n^{\nu_n} \\ &\quad + z_2 \cdot \sum_{\substack{\nu_1 = 0,\, \nu_2 > 0 \\ \nu_3,\ldots,\nu_n \geq 0}} a_\nu z_2^{\nu_2 - 1} \cdots z_n^{\nu_n} + \cdots + z_n \cdot \sum_{\substack{\nu_1 = \ldots = \nu_{n-1} = 0 \\ \nu_n > 0}} a_\nu z_n^{\nu_n - 1} \\ &= f(\mathbf{0}) + z_1 \cdot \Delta_1(\mathbf{z}) + \cdots + z_n \cdot \Delta_n(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Da die Reihen $\Delta_1(\mathbf{z}), \ldots, \Delta_n(\mathbf{z})$ auf P_ε normal gegen stetige Funktionen konvergieren, ist f komplex differenzierbar in $\mathbf{0}$, mit $f_{z_\nu}(\mathbf{0}) = \Delta_\nu(\mathbf{0})$. ∎

1.8 Folgerung. *Ist $B \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist f komplex differenzierbar auf B.*

BEWEIS: Sei $\mathbf{z}_0 \in B$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine Potenzreihe $S(\mathbf{w})$, die nahe $\mathbf{0}$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion g konvergiert, so dass

$$f(\mathbf{z}_0 + \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}) = g(\mathbf{0}) + w_1 \cdot \Delta_1(\mathbf{w}) + \cdots + w_n \cdot \Delta_n(\mathbf{w})$$

ist, mit (in $\mathbf{0}$) stetigen Funktionen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Es folgt, dass f komplex differenzierbar in $\mathbf{z}_0$ ist. ∎

Wir wollen jetzt die Cauchysche Integralformel in mehreren Veränderlichen formulieren.

Sei $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, $T = \mathsf{T}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, und f eine stetige Funktion auf T. Dann definiert

$$k_f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}) := \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{(1,\ldots,1)}} = \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}$$

eine stetige Funktion $k_f : P \times T \to \mathbb{C}$.

Definition.

$$\begin{aligned} C_f(\mathbf{z}) &:= \left(\frac{1}{2\pi \mathsf{i}}\right)^n \int_T k_f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})\, d\zeta \\ &:= \left(\frac{1}{2\pi \mathsf{i}}\right)^n \int_{|\zeta_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n| = r_n} f(\boldsymbol{\zeta}) \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)} \cdots \frac{d\zeta_n}{(\zeta_n - z_n)} \end{aligned}$$

nennt man das *Cauchy-Integral* von f über T.

Offensichtlich ist C_f eine stetige Funktion auf P.

1.9 Theorem (Cauchysche Integralformel). *Seien P, T wie oben gegeben, sowie $U = U(\overline{P})$ eine offene Umgebung von $\overline{P}$. Ist f schwach holomorph auf U, so ist $C_{f|T}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$ für jedes $\mathbf{z} \in P$.*

BEWEIS: Ist $P = \Delta(0, r_1) \times \cdots \times \Delta(0, r_n)$, so können wir annehmen, dass $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ ist, mit offenen Umgebungen $U_i = U_i\Big(\overline{\Delta(0, r_i)}\Big)$, für $i = 1, \ldots, n$.

Da f schwach holomorph ist, können wir ein $\mathbf{z}' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in U_1 \times \cdots \times U_{n-1}$ festhalten und die Cauchysche Integralformel in einer Variablen auf $\zeta_n \mapsto f(\mathbf{z}', \zeta_n)$ anwenden. Für $z_n \in \Delta(0, r_n)$ folgt dann:

$$f(\mathbf{z}', z_n) = \frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(\mathbf{z}', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n}\, d\zeta_n.$$

Genauso erhalten wir für die vorletzte Variable z_{n-1} und $\mathbf{z}'' = (z_1, \ldots, z_{n-2}) \in U_1 \times \cdots \times U_{n-2}$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}'', z_{n-1}, z_n) &= \frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int\limits_{|\zeta_{n-1}|=r_{n-1}} \frac{f(\mathbf{z}'', \zeta_{n-1}, z_n)}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}}\, d\zeta_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^2 \int\limits_{|\zeta_{n-1}|=r_{n-1}} \int\limits_{|z_n|=r_n} \frac{f(\mathbf{z}'', \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_n\, d\zeta_{n-1}, \end{aligned}$$

und nach n Schritten erhält man $f(\mathbf{z}) = C_{f|T}(\mathbf{z})$, für $\mathbf{z} \in P$. ∎

1.10 Theorem (Potenzreihenentwicklung). *Sei $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r}) \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder und T sein ausgezeichneter Rand. Ist $f : T \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so gibt es eine Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$, die auf ganz P gegen $C_f(\mathbf{z})$ konvergiert.*

Die Koeffizienten a_ν dieser Reihe sind durch

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_n} = \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^n \int\limits_T \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\zeta_1^{\nu_1+1} \cdots \zeta_n^{\nu_n+1}}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

gegeben.

Beweis: Setzen wir $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}_0^n$, für $\mathbf{z} \in P$ und $\boldsymbol{\zeta} \in T$, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{\mathbf{1}}} &= \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \frac{1}{\zeta_1 \cdots \zeta_n \cdot \left(1 - \dfrac{z_1}{\zeta_1}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{z_n}{\zeta_n}\right)} \\ &= \frac{1}{\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{1}}} \cdot \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{\zeta_1}\right)^{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{\infty} \left(\frac{z_n}{\zeta_n}\right)^{\nu_n}. \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, so gilt für festes $\mathbf{z} \in P$ und beliebiges $\boldsymbol{\zeta} \in T$:

$$\left| \frac{z_j}{\zeta_j} \right| = q_j := \frac{|z_j|}{r_j} < 1, \text{ for } j = 1, \ldots, n.$$

Da T kompakt und f stetig auf T ist, gibt es eine Konstante M mit $|f(\boldsymbol{\zeta})| \leq M$ auf T. Dann wird $\sum_{\nu \geq 0} \big(f(\boldsymbol{\zeta})/\boldsymbol{\zeta}^{\nu+\mathbf{1}}\big)\mathbf{z}^\nu$ auf T von der konvergenten Reihe $(M/\mathbf{r}^{\mathbf{1}}) \sum_{\nu \geq 0} \mathbf{q}^\nu$ majorisiert, wobei $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ ist. Deshalb konvergiert die Reihe auf T normal gegen $f(\boldsymbol{\zeta})/(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{\mathbf{1}}$. Wir können Summation und Integration vertauschen:

$$C_f(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\right)^n \int_T \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^{\mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta} = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu,$$

mit

$$a_\nu := \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^n \int_T \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\boldsymbol{\zeta}^{\nu+\mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta}.$$

Die Reihe konvergiert für jedes $\mathbf{z} \in P$. ∎

1.11 Satz von Osgood. *Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

1. *f ist holomorph.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist schwach holomorph.*

BEWEIS: Wir wissen schon, dass eine holomorphe Funktion f komplex differenzierbar ist, und es ist trivial, dass f dann schwach holomorph ist.

Sei umgekehrt $f : B \to \mathbb{C}$ schwach holomorph und $\mathbf{z}_0 \in B$ ein beliebiger Punkt. Es gibt einen kleinen Polyzylinder P um $\mathbf{z}_0$, der relativ kompakt in B liegt. Ist T sein ausgezeichneter Rand, so ist $f|_P = C_{f|T}$, und das Cauchy-Integral ist die Grenzfunktion einer Potenzreihe. Also ist f holomorph. ∎

Bemerkung. Darüber hinaus gilt: Ist f schwach holomorph auf B, $\mathbf{z}_0 \in B$ ein Punkt und $P \subset\subset B$ ein Polyzylinder um $\mathbf{z}_0$, so gibt es eine Potenzreihe $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$, die auf ganz P gegen f konvergiert.

1.12 Weierstraßscher Konvergenzsatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und (f_k) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f holomorph.*

BEWEIS: Die Grenzfunktion ist stetig. Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Punkt, $P \subset\subset G$ ein Polyzylinder um $\mathbf{z}_0$ und T sein ausgezeichneter Rand. Dann gilt:

$$f|_P = \lim_{k\to\infty} f_k|_P = \lim_{k\to\infty} C_{f_k|T}.$$

Da T kompakt ist, kann man Integral und Grenzwert vertauschen. So gilt für jedes feste $\mathbf{z} \in P$:

$$\lim_{k\to\infty} C_{f_k|T}(\mathbf{z}) = C_{\lim\limits_{k\to\infty} f_k|T}(\mathbf{z}) = C_{f|T}(\mathbf{z}).$$

Da f auf T stetig ist, hat das Cauchy-Integral $C_{f|T}$ eine Potenzreihenentwicklung auf P. Deshalb ist f holomorph in $\mathbf{z}_0$. ∎

1.13 Satz. *Sei $S(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ eine Potenzreihe und G ihr Konvergenzgebiet. Dann ist die Grenzfunktion f von $S(\mathbf{z})$ holomorph auf G, und die formale Ableitung*

$$S_{z_j}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_j > 0}} a_\nu \cdot \nu_j z_1^{\nu_1} \cdots z_j^{\nu_j - 1} \cdots z_n^{\nu_n}$$

konvergiert gegen f_{z_j}. Insbesondere sind auch alle partiellen Ableitungen von f holomorph.

Beweis: Da $S(\mathbf{z})$ auf G kompakt konvergiert, ist f lokal gleichmäßiger Limes einer Folge von Polynomen. Aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß folgt nun, dass f holomorph ist. Aber auch $S_{z_j}(\mathbf{z})$ konvergiert auf G kompakt, und die Grenzfunktion g_j ist dann holomorph auf G.

Sei nun $\mathbf{z}_0$ ein beliebiger Punkt von G. Da G ein vollständiges Reinhardtsches Gebiet ist, gibt es einen Polyzylinder P um den Ursprung mit $\mathbf{z}_0 \in P \subset\subset G$. Wir definieren

$$f^*(\mathbf{z}) := \int_0^{z_j} g_j(z_1, \ldots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \ldots, z_n)\, d\zeta + f(z_1, \ldots, 0, \ldots, z_n).$$

Als Integrationsweg wählen wir die Verbindungsstrecke zwischen 0 und z_j in der z_j-Ebene. Dann ist f^* auf P definiert.

Sei $S(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^\infty p_i(\mathbf{z})$ die Entwicklung in eine Reihe von homogenen Polynomen. Dann ist $S_{z_j}(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^\infty (p_i)_{z_j}(\mathbf{z})$, und diese Reihe konvergiert auf dem oben benutzten kompakten Integrationsweg gleichmäßig. Deshalb können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{z}) &= \sum_{i=0}^\infty \left(\int_0^{z_j} (p_i)_{z_j}(z_1, \ldots, \zeta, \ldots, z_n)\, d\zeta + p_j(z_1, \ldots, 0, \ldots, z_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^\infty p_i(\mathbf{z}) \;=\; f(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

für $\mathbf{z} \in P$. Also ist $f_{z_j}(\mathbf{z}_0) = f^*_{z_j}(\mathbf{z}_0) = g_j(\mathbf{z}_0)$. ∎

1.14 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f : B \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar in G.*

Ist $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ ein Multiindex, so setzen wir $\nu! := \nu_1! \cdots \nu_n!$ und

$$D^\nu f(\mathbf{z}_0) := \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(\mathbf{z}_0).$$

1.15 Identitätssatz für Potenzreihen.

Seien $f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ und $g(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} b_\nu \mathbf{z}^\nu$ zwei konvergente Potenzreihen in einer Umgebung $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$. Gibt es eine Umgebung $V(\mathbf{0}) \subset U$ mit $f|_V = g|_V$, so ist $a_\nu = b_\nu$ für alle ν.

BEWEIS: Wir wissen, dass f und g holomorph sind. Dann gilt $D^\nu f(\mathbf{0}) = D^\nu g(\mathbf{0})$ für alle ν, und sukzessive Differentiation ergibt

$$D^\nu f(\mathbf{0}) = \nu! \cdot a_\nu \quad \text{und} \quad D^\nu g(\mathbf{0}) = \nu! \cdot b_\nu.$$

■

1.16 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Punkt und $f : B \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ist $f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ die (eindeutig bestimmte) Potenzreihenentwicklung nahe $\mathbf{z}_0 \in G$, so gilt*

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot D^\nu f(\mathbf{z}_0), \text{ für jedes } \nu \in \mathbb{N}_0^n.$$

1.17 Cauchysche Ungleichungen. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\mathbf{z}_0 \in G$ ein Punkt und $P = \mathsf{P}^n(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}) \subset\subset G$ ein Polyzylinder mit ausgezeichnetem Rand T. Dann ist*

$$|D^\nu f(\mathbf{z}_0)| \leq \frac{\nu!}{\mathbf{r}^\nu} \cdot \sup_T |f|.$$

BEWEIS: Sei $f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von f in $\mathbf{z}_0$. Dann ist $D^\nu f(\mathbf{z}_0) = \nu! a_\nu$ und $a_\nu = \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^n \int_T \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z}_0)^{\nu + \mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta}$, also

$$\begin{aligned}
|D^\nu f(\mathbf{z}_0)| &\leq \frac{\nu!}{(2\pi)^n} \int_T \frac{|f(\boldsymbol{\zeta})|}{\mathbf{r}^{\nu+\mathbf{1}}}\, d\boldsymbol{\zeta} \\
&= \frac{\nu!}{(2\pi)^n} \int\limits_{[0,2\pi]^n} \frac{|f(z_1^{(0)} + r_1 e^{\mathrm{i}\, t_1}, \ldots, z_n^{(0)} + r_n e^{\mathrm{i}\, t_n})|}{\mathbf{r}^\nu}\, dt_1 \cdots dt_n \\
&\leq \frac{\nu!}{\mathbf{r}^\nu} \cdot \sup_T |f|.
\end{aligned}$$

■

Im Folgenden sei G immer ein **Gebiet** im $\mathbb{C}^n$.

1.18 Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

Seien f_1, f_2 zwei holomorphe Funktionen auf G. Wenn es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset G$ mit $f_1|_U = f_2|_U$ gibt, dann ist $f_1 = f_2$.

BEWEIS: Wir betrachten $f := f_1 - f_2$ und die Menge

$$N := \{\mathbf{z} \in G \,:\, D^\nu f(\mathbf{z}) = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{\nu}\}.$$

dann ist $N \neq \varnothing$, da $U \subset N$ ist. Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt und

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^\nu$$

die Potenzreihenentwicklung von f in einer Umgebung $V = V(\mathbf{z}_0) \subset G$. Wenn $\mathbf{z}_0$ zu N gehört, dann ist $f|_V \equiv 0$ und deshalb $V \subset N$. Das zeigt, dass N offen ist. Weil alle Ableitungen $D^\nu f$ stetig sind, ist N abgeschlossen. Da G ein Gebiet ist, erhalten wir $N = G$ und $f_1 = f_2$. ∎

Bemerkung. Im Gegensatz zu der Theorie der Funktionen von einer komplexen Variablen reicht es nicht aus, wenn f_1 und f_2 auf einer Menge M mit einem Häufungspunkt in G übereinstimmen. Betrachten wir z.B. $G = \mathbb{C}^2$ und $M = \{(z_1, z_2) \,:\, z_2 = 0\}$, so stimmen die holomorphen Funktionen $f_1(z_1, z_2) := z_2(z_1 - z_2)$ und $f_2(z_1, z_2) := z_2(z_1 + z_2)$ auf M überein, es ist aber $f_1(0,1) = -1$ und $f_2(0,1) = 1$.

1.19 Maximumprinzip.

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn $|f|$ in einem Punkt $\mathbf{z}_0 \in G$ ein lokales Maximum annimmt, so ist f konstant.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $\varphi_{\mathbf{w}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi_{\mathbf{w}}(\zeta) = \mathbf{z}_0 + \zeta \mathbf{w}$, für ein beliebiges $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Dann ist $f \circ \varphi_{\mathbf{w}}$ eine holomorphe Funktion von einer komplexen Variablen, definiert nahe $\zeta = 0$. Da $|f \circ \varphi_{\mathbf{w}}|$ ein lokales Maximum im Nullpunkt annimmt, muss diese Funktion in der Nähe des Ursprungs konstant sein. Aber die Richtung $\mathbf{w}$ wurde beliebig gewählt, also muss f in einer Umgebung von $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ konstant sein. Aus dem Identitätssatz folgt, dass f auf G konstant ist. ∎

§ 2 Analytische Mengen

Definition. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt (reell) differenzierbar in $\mathbf{z}_0$, falls es Abbildungen $\Delta', \Delta'' : B \to \mathbb{C}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Δ' und Δ'' sind stetig in $\mathbf{z}_0$.
2. $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta'(\mathbf{z})^t + (\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{z}}_0) \cdot \Delta''(\mathbf{z})^t$ for $\mathbf{z} \in B$.

Die Werte $\Delta'(\mathbf{z}_0)$ und $\Delta''(\mathbf{z}_0)$ sind eindeutig bestimmt. Die Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta'(\mathbf{z}_0)^t$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) = f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) := \mathbf{e}_\nu \cdot \Delta''(\mathbf{z}_0)^t$$

werden die *Wirtinger-Ableitungen* von f in $\mathbf{z}_0$ genannt.

Bemerkung. Ist f reell differenzierbar in $\mathbf{z}_0$, so ist

$$\begin{aligned} f_{z_\nu}(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{2}(f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) - \mathrm{i}\, f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0)), \\ f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{2}(f_{x_\nu}(\mathbf{z}_0) + \mathrm{i}\, f_{y_\nu}(\mathbf{z}_0)). \end{aligned}$$

2.1 Theorem. *Eine reell stetig differenzierbare Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}) \equiv 0$ auf B ist, für $\nu = 1, \ldots, n$.*

BEWEIS: (a) Ist f holomorph, so ist f in jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ komplex differenzierbar. Vergleicht man die beiden Darstellungen

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^t$$

und

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta'(\mathbf{z})^t + (\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{z}}_0) \cdot \Delta''(\mathbf{z})^t,$$

so sieht man, dass $\Delta'(\mathbf{z}_0) = \Delta(\mathbf{z}_0)$ und $\Delta''(\mathbf{z}_0) = 0$ ist. Die zweite Gleichung bedeutet, dass $f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}_0) \equiv 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ ist.

(b) Ist $f_{\overline{z}_\nu}(\mathbf{z}) \equiv 0$, so ist f in jeder Variablen holomorph und daher überhaupt holomorph. ∎

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{C}^m$$

heißt *holomorph* (bzw. *reell differenzierbar*), falls alle Komponenten f_i holomorph (bzw. reell differenzierbar) ist.

2.2 Satz. *Die Abbildung $\mathbf{f} : B \to \mathbb{C}^m$ ist genau dann holomorph, wenn zu jedem $\mathbf{z}_0 \in B$ eine Abbildung $\Delta : B \to M_{m,n}(\mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften existiert:*

1. *Δ ist stetig in $\mathbf{z}_0$.*
2. *$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \cdot \Delta(\mathbf{z})^t$, for $\mathbf{z} \in B$.*

Der Wert $\Delta(\mathbf{z}_0)$ ist eindeutig bestimmt.

Auf den Beweis soll hier verzichtet werden.

Definition. Ist $\mathbf{f} : B \to \mathbb{C}^m$ holomorph, so nennt man $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0) := \Delta(\mathbf{z}_0)$ die *komplexe Jacobi-Matrix* von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{z}_0$. Die zugehörige lineare Abbildung $\mathbf{f}'(\mathbf{z}_0) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ nennt man die *(komplexe) Ableitung* von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{z}_0$. Sie ist gegeben durch

$$\mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)^t.$$

Explizit ist

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} (f_1)_{z_1}(\mathbf{z}) & \cdots & (f_1)_{z_n}(\mathbf{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_m)_{z_1}(\mathbf{z}) & \cdots & (f_m)_{z_n}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

2.3 Satz über inverse Abbildungen. *Sei $\mathbf{z}_0 \in B_1$ und $\mathbf{w}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt offene Umgebungen $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B_1$ und $V = V(\mathbf{w}_0) \subset B_2$, so dass $\mathbf{f} : U \to V$ biholomorph ist.*
2. *$\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0) \neq 0$.*

Beweis: Ist $\mathbf{f}|_U : U \to V$ biholomorph, so ist $(\mathbf{f}|_U)^{-1} \circ \mathbf{f} = \mathrm{id}_U$ und

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(J_{(\mathbf{f}|_U)^{-1}}(\mathbf{w}_0) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) = \det(J_{(\mathbf{f}|_U)^{-1}}(\mathbf{w}_0)) \cdot \det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)),$$

und deshalb $\det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$.

Ähnlich wie im Falle einer Veränderlichen kann man zeigen, dass für die reelle Funktionalmatrix gilt:

$$\det(J_{\mathbb{R},\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0) = |\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)|^2.$$

Ist also $\det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$, so ist auch $\det(J_{\mathbb{R},\mathbf{f}}(\mathbf{z}_0) \neq 0$. Dann folgt aus der reellen Analysis, dass es offene Umgebungen $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B_1$ und $V = V(\mathbf{w}_0) \subset B_2$ gibt, so dass $\mathbf{f}|_U : U \to V$ bijektiv und $\mathbf{g} := (\mathbf{f}|_U)^{-1} : V \to U$ eine stetig reell differenzierbare Abbildung ist. Aber $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathrm{id}_V$ ist holomorph. Ist $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ und $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, so folgt:

$$0 = (f_\nu \circ \mathbf{g})_{\overline{w}_\mu} = \sum_{\lambda=1}^{n} ((f_\nu)_{z_\lambda} \circ \mathbf{g}) \cdot (g_\lambda)_{\overline{w}_\mu}, \text{ für } \nu, \mu = 1, \ldots, n.$$

In der Sprache der Matrizen bedeutet das:

$$\mathbf{0} = J_{\mathbf{f}} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\nabla} g_1 \\ \vdots \\ \overline{\nabla} g_n \end{pmatrix}.$$

Da $J_{\mathbf{f}}$ invertierbar ist, ist $\overline{\nabla} g_\lambda = 0$ für jedes λ. Deshalb ist $\mathbf{g}$ holomorph. ■

2.4 Satz über implizite Funktionen. *Sei $B \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ offen, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{C}^m$ holomorph und $(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) \in B$ ein Punkt mit $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) = 0$ und*

$$\det \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu = 1, \ldots, m \\ \nu = n+1, \ldots, n+m \end{array} \right) \neq 0.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U' \times U'' \subset B$ und eine holomorphe Abbildung $\mathbf{g} : U' \to U''$, so dass gilt:

$$\{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in U' \times U'' \;:\; \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{g}(\mathbf{z})) \;:\; \mathbf{z} \in U'\}.$$

Der BEWEIS wird wie im Reellen geführt.

Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ ein beliebiger Bereich und $U \subset B$ offen. Sind $f_1, \ldots, f_q$ holomorphe Funktionen auf U, so bezeichnet man ihre gemeinsame Nullstellenmenge mit

$$N(f_1, \ldots, f_q) = \{\mathbf{z} \in U \;:\; f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_q(\mathbf{z}) = 0\}.$$

Definition. Eine Teilmenge $A \subset B$ heißt *analytisch*, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in B$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0) \subset B$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf U gibt, so dass $U \cap A = N(f_1, \ldots, f_q)$ ist.

Ist $\mathbf{z}_0$ ein Punkt in $B \setminus A$, so können wir eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf U wählen, so dass

$$\mathbf{z}_0 \in U' := U \setminus N(f_1, \ldots, f_q) \subset U \subset B$$

ist. Da die Nullstellenmenge $N(f_1, \ldots, f_q)$ in U abgeschlossen ist, ist $B \setminus A$ offen und A in B abgeschlossen. Deshalb hätte man eine analytische Menge in B auch als **abgeschlossene** Teilmenge $A \subset B$ definieren können, so dass es zu jedem $\mathbf{z}_0 \in A$ eine Umgebung U und Funktionen $f_1, \ldots, f_q \in \mathcal{O}(U)$ mit $A \cap U = N(f_1, \ldots, f_q)$ gibt.

Definition. Eine Teilmenge M eines Gebietes G heißt *nirgends dicht* in G, falls die abgeschlossene Hülle von M in G keine inneren Punkten besitzt.

Da eine analytische Menge $A \subset G$ in G abgeschlossen ist, ist sie nirgends dicht, falls in jeder Umgebung eines jeden Punktes $\mathbf{z} \in G$ Punkte liegen, die nicht zu A gehören.

2.5 Satz. *Sei A eine analytische Menge in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$. Besitzt A einen inneren Punkt, so ist $A = G$. Ist A nirgends dicht in G, so ist $G \setminus A$ zusammenhängend.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $G = B$ eine Kugel ist und dass es holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ auf B mit $A = N(f_1, \ldots, f_q)$ gibt.

Ist $\mathbf{z}_0 \in B$ ein innerer Punkt von A, so betrachten wir eine beliebige komplexe Gerade L durch $\mathbf{z}_0$. Nach dem Identitätssatz verschwinden alle Funktionen f_i auf $L \cap B$ und deshalb auf B.

Ist A nirgends dicht in B und L eine beliebige komplexe Gerade, so hat entweder $L \cap B \subset A$ oder A nur isolierte Punkte auf $L \cap B$. Deshalb können je zwei Punkte aus $L \cap B$ außerhalb A in $L \cap (B \setminus A)$ miteinander verbunden werden.

Sei jetzt G ein beliebiges Gebiet. Ist $\mathbf{z}_0 \in G$ ein innerer Punkt von A und $\mathbf{w}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt, so können wir diese Punkte durch einen stetigen Weg $\alpha : [0, 1] \to G$ verbunden werden. Das kompakte Bild dieses Weges kann durch endlich viele Kugeln $B \subset G$ überdeckt werden, so dass jeweils $B \cap A$ die Nullstellenmenge von holomorphen Funktionen auf B ist. Sukzessive folgt, dass jede Kugel in A enthalten ist. Also ist $A = G$.

Ist A nirgends dicht in G, so betrachten wir $\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0 \in G \setminus A$ und benutzen den selben stetigen Weg. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass jeder Punkt $\mathbf{z}$ in der ersten Kugel B, der kein Element von A ist, in $B \setminus A$ mit $\mathbf{z}_0$ verbunden werden kann. Sukzessive erhalten wir einen Weg zwischen $\mathbf{z}_0$ und $\mathbf{w}_0$ in $B \setminus A$. ∎

Ist $n = 1$, so besteht eine nirgends dichte analytische Menge nur aus isolierten Punkten.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subset G$ eine echte analytische Teilmenge.

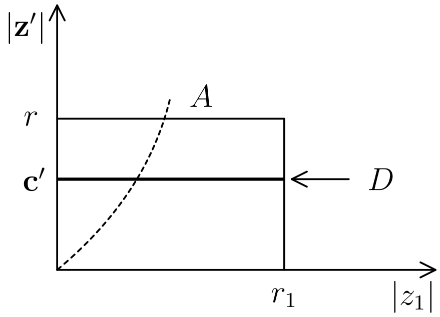
2.6 Riemannscher Fortsetzungssatz. *Ist f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus A$, die in der Nähe von A beschränkt ist, so kann f holomorph nach G fortgesetzt werden.*

Beweis: Weil $A \neq G$ ist, ist A nirgends dicht in G. sei $\mathbf{z}_0 \in A$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine komplexe Gerade L durch $\mathbf{z}_0$, die A in einer Umgebung von $\mathbf{z}_0$ nur in $\mathbf{z}_0$ schneidet.

Nach einer affin-linearen Koordinatentransformation können wir annehmen, dass $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ und $L = \mathbb{C}\mathbf{e}_1$ die z_1-Achse ist. Wir können einen Polyzylinder

$$P = \{\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} : |z_1| < r_1, |\mathbf{z}'| < r\} \subset\subset G$$

finden, so dass $A \cap \{\mathbf{z} : |z_1| = r_1, |\mathbf{z}'| < r\}$ leer ist.



Für jedes $\mathbf{c}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $|\mathbf{c}'| < r$ ist die Menge $D = \{\mathbf{z} : |z_1| \le r_1 \text{ und } \mathbf{z}' = \mathbf{c}'\}$ eine 1-dimensionale Scheibe, so dass $D \cap A$ nur aus isolierten Punkten besteht, da sonst $D \subset A$ ist. Nach dem klassischen Riemannschen Hebbarkeitssatz in einer Variablen kann f zu einer Funktion $\widehat{f}(z_1, \mathbf{z}')$ fortgesetzt werden, die in z_1 holomorph ist. Die klassische Cauchysche Integralformel liefert

$$\widehat{f}(z_1, \mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta, \mathbf{z}')}{\zeta - z_1}\, d\zeta, \text{ for } |z_1| < r_1 \text{ and } |\mathbf{z}'| < r.$$

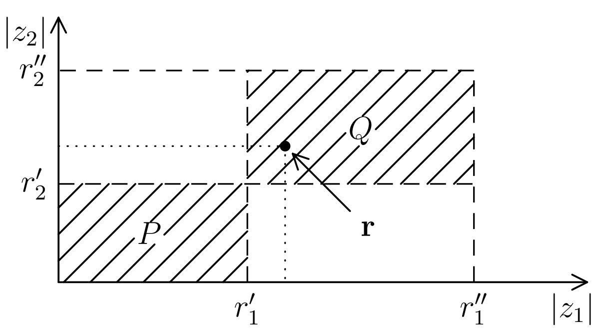
Der Integrand auf der rechten Seite ist holomorph auf P. Folglich ist die linke Seite reell differenzierbar, und da Integration und Differentiation nach $\overline{z}_i$ vertauscht werden können, ist $\widehat{f}$ holomorph auf P. Wenn wir das in jedem Punkt $\mathbf{z}_0 \in A$ ausführen, erhalten wir durch den Identitätssatz die gewünschte globale Fortsetzung von f nach G. ∎

Wir werden nun einen Effekt kennenlernen, der typisch für die Theorie der holomorphen Funktionen von mehreren Variablen ist.

r'_ν, r''_ν seien reelle Zahlen mit $0 < r'_\nu < r''_\nu$ für $1 \le \nu \le n$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P &:= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < r'_\nu \text{ für alle } \nu\}, \\ Q &:= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : r'_\nu < |z_\nu| < r''_\nu \text{ für alle } \nu\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind P und Q Reinhardtsche Gebiete. Sei f eine holomorphe Funktion in Q. Dann ist das Cauchy-Integral $C_{f|\mathsf{T}_\mathbf{r}}$ für alle $\mathbf{r} \in \tau(Q)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathsf{P}_\mathbf{r}$ und daher erst recht in P.



2.7 Satz. *Die Funktion $f_{\mathbf{r}} : P \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) := C_{f|\mathsf{T}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{z})$, ist unabhängig von $\mathbf{r}$.*

Beweis: Es ist

$$f_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^n \int\limits_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} f(\boldsymbol{\zeta}) \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}\,.$$

In jeder Variablen ζ_ν ist der Integrand $f(\boldsymbol{\zeta})/(\zeta_\nu - z_\nu)$ holomorph auf dem Kreisring $\{\zeta_\nu : r'_\nu < |\zeta_\nu| < r''_\nu\}$. Aus der Cauchyschen Integralformel für eine Variable folgt:

$$\int_{|\zeta_\nu|=r_\nu} \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\zeta_\nu - z_\nu}\, d\zeta_\nu = \int_{|\zeta_\nu|=r^*_\nu} \frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\zeta_\nu - z_\nu}\, d\zeta_\nu\,,$$

wenn $r'_\nu < r_\nu \le r^*_\nu < r''_\nu$ ist. Das ergibt die Behauptung. ∎

2.8 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein eigentliches Reinhardtsches Gebiet und f holomorph auf G. Dann stimmt das Cauchy-Integral $C_{f|\mathsf{T}_{\mathbf{z}}}$ für jedes $\mathbf{z} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ in einer Umgebung des Nullpunktes mit f überein.*

Beweis: $G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ ist ein Reinhardtsches Gebiet. Deshalb ist $G_0 := \tau(G \cap (\mathbb{C}^*)^n)$ ein Gebiet im absoluten Raum.

Sei $B := \{\mathbf{r} \in G_0 : C_{f|\mathsf{T}_{\mathbf{r}}}$ stimmt mit f nahe $\mathbf{0}$ überein$\}$. Dann ist $B \neq \varnothing$, denn es gibt ein kleines $\mathbf{r} \in G_0$, so dass $\overline{P_{\mathbf{r}}(\mathbf{0})} \subset G$ ist.

B is offen: Ist $\mathbf{r}_0 \in B$, so können wir wie oben Mengen P, Q finden, so dass $\mathbf{r}_0 \in Q \subset G_0$ ist. Für $\mathbf{r} \in Q$ ist dann $f_{\mathbf{r}} = C_{f|\mathsf{T}_{\mathbf{r}}}$ eine holomorphe Funktion auf P und unabhängig von $\mathbf{r}$. Aber $f_{\mathbf{r}_0}$ stimmt nahe 0 mit f überein. Daher ist $Q \subset B$.

$G_0 \setminus B$ ist ebenfalls offen, der Beweis geht genauso. Da G_0 zusammenhängend ist, folgt daraus $B = G_0$. ∎

2.9 Folgerung. *Sei G ein eigentliches Reinhardtsches Gebiet, f holomorph auf G. Dann gibt es eine Potenzreihe $S(\mathbf{z})$, die auf G gegen f konvergiert.*

Beweis: Sei $\mathbf{z}_0 \in G$ beliebig gewählt. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{w} \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n$ mit $\mathbf{z}_0 \in P_{\mathbf{w}}$. Die holomorphe Funktion $g := C_{f|\mathsf{T}_{\mathbf{w}}}$ hat eine Potenzreihenentwicklung $g(\mathbf{z}) = \sum_{\nu \ge 0} a_\nu \mathbf{z}^\nu$ in $P_{\mathbf{w}}$. Da g mit f in einer kleinen Umgebung des Nullpunktes übereinstimmt, sind die Koeffizienten a_ν die der Taylorreihe von f um $\mathbf{0}$. Da $\mathbf{z}_0$ beliebig war, konvergiert die Reihe auf ganz G. Nach dem Identitätssatz stimmt ihr Grenzwert mit f überein. ∎

Definition. Ist G ein eigentliches Reinhardtsches Gebiet, so nennt man

$$\widehat{G} := \bigcup_{\mathbf{z}\in G\cap(\mathbb{C}^*)^n} P_{\mathbf{z}}$$

die *vollständige Hülle* von G.

Bemerkungen.

1. Jedes vollständige Reinhardtsche Gebiet ist eigentlich, aber die Umkehrung ist i.a. falsch. Im Eindimensionalen sind Reinhardtsche Gebiete offene Kreisscheiben um 0, und es gibt keinen Unterschied zwischen eigentlichen und vollständigen Gebieten.

2. Die vollständige Hülle $\widehat{G}$ eines eigentlichen Reinhardtschen Gebietes G ist wieder ein Gebiet, das G umfasst. Und es ist Reinhardtsch: Für $\mathbf{z} \in \widehat{G}$ gibt es ein $\mathbf{z}_1$ mit $\mathbf{z} \in \mathsf{P}_{\mathbf{z}_1} \subset \widehat{G}$. Aber dann ist auch $\mathsf{T}_{\mathbf{z}} \subset \mathsf{P}_{\mathbf{z}_1} \subset \widehat{G}$. Das gleiche Argument zeigt, dass $\widehat{G}$ vollständig ist.

3. Sei G_1 ein weiteres vollständiges Reinhardtsches Gebiet mit $G \subset G_1$. Liegt $\mathbf{z}$ in $G \cap (\mathbb{C}^*)^n$, so liegt $\mathbf{z}$ auch in G_1, und aus der Vollständigkeit von G_1 folgt, dass $\mathsf{P}_{\mathbf{z}} \subset G_1$ ist. Also ist $\widehat{G} \subset G_1$, und wir erkennen, dass $\widehat{G}$ dass kleinste vollständige Reinhardtsche gebiet ist, das G umfasst.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich:

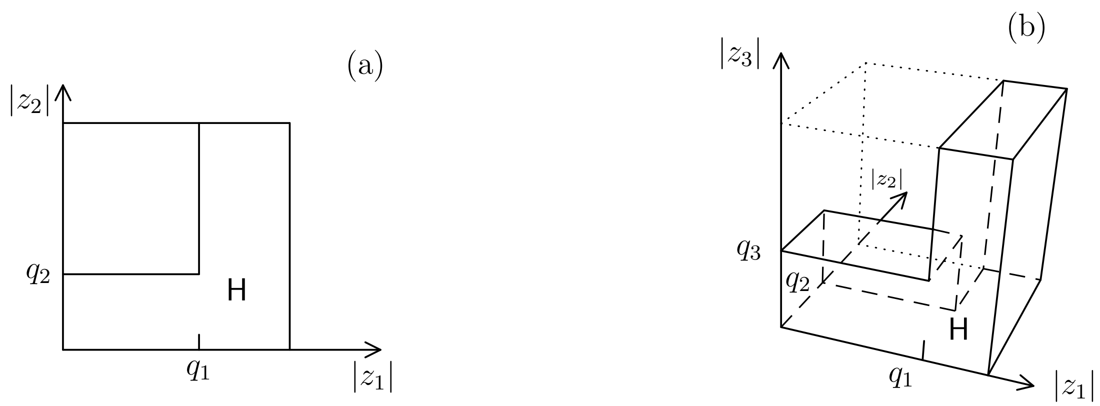
2.10 Theorem. *Sei G ein eigentliches Reinhardtsches Gebiet und f holomorph auf G. Dann gibt es genau eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf $\widehat{G}$ mit $\widehat{f}|_G = f$.*

Im Falle $n = 1$ kann die obige Situation nicht auftreten. Ist $n \geq 2$, so können wir Gebiete G und $\widehat{G}$ im $\mathbb{C}^n$ finden, so dass $G \neq \widehat{G}$ ist. Das demonstriert einen entscheidenden Unterschied zwischen den Theorien von einer und mehreren komplexen Variablen.

Sei nun $n \geq 2$, P^n der Einheitspolyzylinder, $q_1, \ldots, q_n$ reelle Zahlen mit $0 < q_\nu < 1$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}(\mathbf{q}) := \{\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n \,:\, |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\mu| < q_\mu \text{ für } \mu = 2, \ldots, n\}.$$

Dann nennt man das Paar $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine *euklidische Hartogsfigur*. H ist ein eigentliches Reinhardtsches Gebiet und P^n seine vollständige Hülle.



2.11 Satz von Hartogs. *Sei* $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ *eine euklidische Hartogsfigur. Dann besitzt jede holomorphe Funktion* f *auf* H *eine holomorphe Fortsetzung* $\widehat{f}$ *auf* P^n.

Der Satz folgt unmittelbar aus unseren obigen Betrachtungen.

Sei $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogsfigur.

Definition. Ist $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung, $\widetilde{P} := \mathbf{g}(\mathsf{P}^n)$ und $\widetilde{H} := \mathbf{g}(\mathsf{H})$. Dann nennt man $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big)$ eine *allgemeine Hartogsfigur.*

2.12 Der Kontinuitätssatz. *Sei* $G \subset \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet,* $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big)$ *eine allgemeine Hartogsfigur mit* $\widetilde{H} \subset G$*,* f *eine holomorphe Funktion auf* G*. Ist* $G \cap \widetilde{P}$ *zusammenhängend, so kann* f *auf eindeutige Weise holomorph nach* $G \cup \widetilde{P}$ *fortgesetzt werden.*

Beweis: Sei $\mathbf{g} : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung, so dass $\widetilde{P} := \mathbf{g}(\mathsf{P}^n)$ und $\widetilde{H} := \mathbf{g}(\mathsf{H})$ ist. Die Funktion $h := f \circ \mathbf{g}$ ist holomorph in H. Deshalb gibt es genau eine holomorphe Funktion $\widehat{h}$ auf P^n mit $\widehat{h}|_{\mathsf{H}} = h$. Da $\mathbf{g} : \mathsf{P}^n \to \widetilde{P}$ biholomorph ist, ist die Funktion $f_0 := \widehat{h} \circ \mathbf{g}^{-1}$ auf $\widetilde{P}$ definiert, und sie ist eine holomorphe Fortsetzung von $f|_{\widetilde{H}}$. Wir definieren

$$\widehat{f}(\mathbf{z}) := \begin{cases} f(\mathbf{z}) & \text{für } \mathbf{z} \in G, \\ f_0(\mathbf{z}) & \text{für } \mathbf{z} \in \widetilde{P}. \end{cases}$$

Da $G \cap \widetilde{P}$ zusammenhängend und $f = f_0$ auf $\widetilde{H}$ ist, folgt aus dem Identitätssatz, dass $\widehat{f}$ eine wohl-definierte holomorphe Funktion auf $G \cup \widetilde{P}$. Dies ist die gewünschte Fortsetzung von f. ∎

Beispiel.

Sei $n \geq 2$, sowie $P' \subset\subset P$ zwei konzentrische Polyzylinder um den Nullpunkt im $\mathbb{C}^n$. Dann kann jede holomorphe Funktion f auf $P \setminus \overline{P'}$ eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf P fortgesetzt werden.

Für den Beweis können wir annehmen, dass $P = \mathsf{P}^n$ der Einheitspolyzylinder und $P' = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ ist, mit $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ und $0 < r_\nu < 1$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Es ist klar, dass $G := P \setminus \overline{P'}$ ein Gebiet ist.

Ist ein Punkt $\mathbf{z}_0 = \big(z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}\big) \in G$ mit $|z_n^{(0)}| > r_n$ gegeben, so wählen wir reelle Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ wie folgt: Für $\nu = 1, \ldots, n-1$ seien q_ν beliebige Zahlen, mit $r_\nu < q_\nu < 1$. Um ein geeignetes q_n zu erhalten, definieren wir einen Automorphismus T der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ durch

$$T(\zeta) := \frac{\zeta - z_n^{(0)}}{\overline{z}_n^{(0)}\zeta - 1}\,.$$

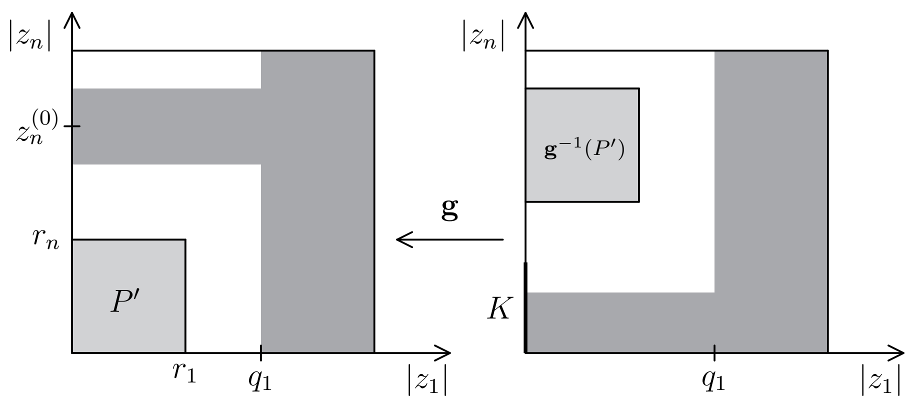
Diese Automorphismen bilden $z_n^{(0)}$ auf 0 und eine kleine Kreisscheibe $D \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, r_n < |\zeta| < 1\}$ um $z_n^{(0)}$ auf eine Scheibe $K \subset \Delta$ mit $0 \in K$ ab. Man beachte, dass 0 nicht das Zentrum von K zu sein braucht. Wir wählen $q_n > 0$ so, dass $D_{q_n}(0) \subset K$ ist.

Setzen wir $\mathsf{H} := \{\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n \,:\, |z_1| > q_1 \text{ oder } |z_\nu| < q_\nu \text{ für } \nu = 2, \ldots, n\}$, so ist $(\mathsf{P}^n, \mathsf{H})$ eine euklidische Hartogsfigur. Die durch

$$\mathbf{g}(z_1, \ldots, z_n) := (z_1, \ldots, z_{n-1}, T^{-1}(z_n))$$

definierte Abbildung $\mathbf{g} : \mathsf{P}^n \to \mathsf{P}^n$ ist biholomorph, und $\big(\widetilde{P}, \widetilde{H}\big) = (\mathsf{P}^n, \mathbf{g}(\mathsf{H}))$ ist eine allgemeine Hartogsfigur, mit

$$\widetilde{H} \subset \{\mathbf{z} \in \mathsf{P}^n \,:\, |z_1| > r_1 \text{ oder } |z_n| > r_n\} \subset G.$$



Da $\widetilde{P} \cap G = G$ zusammenhängend ist, kann der Kontinuitätssatz angewandt werden.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Ist $A \subset G$ analytisch und f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus A$, die längs A lokal beschränkt ist, dann hat f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine holomorphe Fortsetzung nach G. Ist $n \geq 2$ und A ein komplex-linearer Unterraum der Codimension ≥ 2, so besitzt **jede** holomorphe Funktion auf $G \setminus A$ eine solche Fortsetzung.

2.13 Zweiter Riemannscher Hebbarkeitssatz. *Sei* $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}^n(\mathbf{0}, 1)$ *der Einheitspolyzylinder im* $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, $k \geq 2$ *und*

$$E := \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, z_{n-k+1} = \cdots = z_n = 0\}.$$

Dann kann jede holomorphe Funktion f *auf* $\mathsf{P}^n \setminus E$ *holomorph nach* P^n *fortgesetzt werden.*

Beweis: Sei $P' := \{\mathbf{z}' := (z_1, \ldots, z_{n-k}) \,:\, |\mathbf{z}'| < 1\}$. Für $0 < r \leq 1$ setzen wir $P''_r := \{\mathbf{z}'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \,:\, |\mathbf{z}''| < r\}$.

Es sei $P'' := P''_1$ und ein ε mit $0 < \varepsilon \ll 1$ festgehalten. Dann ist

$$\mathsf{P}^n \cap E \subset P' \times P''_\varepsilon,$$

und für $\mathbf{w} \in P'$ ist die Funktion $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}'') := f(\mathbf{w}, \mathbf{z}'')$ holomorph auf $P'' \setminus \overline{P''_\varepsilon}$. Von dem obigen Beispiel wissen wir, dass $f_{\mathbf{w}}$ eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f}_{\mathbf{w}}$ nach P'' besitzt. Dann definieren wir $\widehat{f} : \mathsf{P}^n \to \mathbb{C}$ by $\widehat{f}(\mathbf{w}, \mathbf{z}'') := \widehat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}'')$. Auf $\mathsf{P}^n \setminus E$ stimmt $\widehat{f}$ mit f überein und ist daher holomorph.

Für $\mathbf{w} \in P'$ wählen wir eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{w}) \subset\subset P'$. Dann ist $K := \overline{U} \times \partial P''_\varepsilon$ kompakt. Mit dem Maximumprinzip folgern wir:

$$\big|\, \widehat{f}(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \,\big| = \big|\, \widehat{f}_{\mathbf{z}'}(\mathbf{z}'') \,\big| \leq \|f_{\mathbf{z}''}\|_{\partial P''_\varepsilon} \leq \|f\|_K < \infty, \text{ für } (\mathbf{z}', \mathbf{z}'') \in U \times P''_\varepsilon \setminus E.$$

Aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt, dass $\widehat{f}$ holomorph auf P^n ist. ■

2.14 Folgerung. *Ist $n \geq 2$, so ist jede isolierte Singularität einer holomorphen Funktion von $z_1, \ldots, z_n$ hebbar.*