§ 5 Die Picardschen Sätze

Für eine zweimal stetig differenzierbare reell- oder komplexwertige Funktion f auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist der *Laplace-Operator* definiert durch

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Behauptung: $\Delta = 4\,\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial \overline{z}}$.

Beweis: Es ist

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - \mathrm{i}\,f_y) \quad \text{und} \quad f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i}\,f_y).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f_{z\overline{z}} &= \frac{1}{4}\big((f_x + \mathrm{i}\,f_y)_x - \mathrm{i}\,(f_x + \mathrm{i}\,f_y)_y\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(f_{xx} + \mathrm{i}\,f_{yx} - \mathrm{i}\,f_{xy} + f_{yy}\big) \;=\; \frac{1}{4}\Delta f. \end{aligned}$$

das war die Behauptung. ∎

Beispiel.

Ist f holomorph oder antiholomorph, so ist

$$\Delta f = 4 \cdot f_{z\overline{z}} = 0\,.$$

Ist f holomorph, so ist

$$\Delta \log|f|^2 = \Delta \log f + \Delta\overline{\log f} = 0.$$

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit einer Differentialmetrik ϱ. Dann nennt man

$$\kappa_\varrho(z) := -\frac{\Delta \log \varrho(z)}{\varrho(z)^2}$$

die *Krümmung* von ϱ.

5.1 Satz. *Sei $f : G_1 \to G_2$ holomorph und ϱ eine Differentialmetrik auf G_2. Dann gilt in jedem Punkt $z \in G_1$, in dem $f'(z) \neq 0$ ist, die Gleichung*

$$\kappa_{f^*\varrho}(z) = \kappa_\varrho(f(z)).$$

BEWEIS: Es ist $f^*\varrho(z) = \varrho(f(z)) \cdot |f_z(z)|$. Weil f holomorph ist, ist $f_z = f'$, $f_{\overline{z}} = 0$ und

$$\begin{aligned}
\big[\log(\varrho \circ f)\big]_{z\overline{z}} &= \big[(\log \varrho) \circ f\big]_{z\overline{z}} \\
&= \Big[\big((\log \varrho)_w \circ f\big) \cdot f' + \big((\log \varrho)_{\overline{w}} \circ f\big) \cdot \overline{f}_z\Big]_{\overline{z}} \\
&= \Big[\big((\log \varrho)_w \circ f\big) \cdot f'\Big]_{\overline{z}} \\
&= \big[(\log \varrho)_w \circ f\big]_{\overline{z}} \cdot f' \\
&= \big[(\log \varrho)_{w\overline{w}} \circ f\big] \cdot \overline{f'} \cdot f'.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\kappa_{f^*\varrho}(z) &= -\frac{\Delta \log f^*\varrho(z)}{f^*\varrho(z)^2} \\
&= -\frac{\Delta \log \varrho \circ f(z) + \Delta \log|f'(z)|}{\varrho(f(z))^2 \cdot |f'(z)|^2} \\
&= -\frac{\big((\Delta \log \varrho) \circ f(z)\big) \cdot |f'(z)|^2}{\varrho(f(z))^2 \cdot |f'(z)|^2} \\
&= -\frac{\Delta \log \varrho\,(f(z))}{\varrho(f(z))^2} \;=\; \kappa_\varrho(f(z)).
\end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Ist $\varrho(z) \equiv 1$ die euklidische Metrik, so ist $\kappa_\varrho(z) \equiv 0$.

2. Sei $\sigma(z) := \dfrac{2}{1+|z|^2}$ die „sphärische Metrik". Es ist $\ln \sigma(z) = \ln 2 - \ln(1+|z|^2)$,

$$\text{also} \qquad \begin{aligned}
(\ln \sigma)_{z\overline{z}}(z) &= -\Big(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\Big)_{\overline{z}} \\
&= -\frac{(1+z\overline{z}) - z\overline{z}}{(1+z\overline{z})^2} \;=\; -\frac{1}{(1+z\overline{z})^2}\,.
\end{aligned}$$

   Damit ist

$$\kappa_\sigma(z) = \frac{-\Delta \log \sigma(z)}{\sigma(z)^2} = -\frac{-4}{(1+|z|^2)^2} \cdot \frac{(1+|z|^2)^2}{4} = 1\,.$$

3. Sei $\varrho(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$ die hyperbolische Metrik auf $\mathbb{D}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Delta \log \varrho(z) &= -\Delta \log(1 - z\overline{z}) \;=\; -4\,[\log(1 - z\overline{z})]_{z\overline{z}} \\
&= -4\Big[\frac{-\overline{z}}{1 - z\overline{z}}\Big]_{\overline{z}} \;=\; 4 \cdot \frac{(1 - z\overline{z}) + z\overline{z}}{(1 - z\overline{z})^2} \\
&= \frac{4}{(1 - z\overline{z})^2}\,,
\end{aligned}$$

   also $\kappa_\varrho(z) = -4$.

5.2 Satz (Ahlfors' Version des Schwarzschen Lemmas).

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit einer Differentialmetrik σ und $\kappa_\sigma(z) \le -4$ für alle $z \in G$. Ist $f : \mathbb{D} \to G$ holomorph, so ist

$$f^*\sigma(z) \le \varrho(z), \text{ für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Beweis: Sei $0 < r < 1$. Auf $D_r(0)$ benutzen wir die Metrik $\varrho_r(z) := r/(r^2 - |z|^2)$. Dann ist auch $\kappa_{\varrho_r}(z) \equiv -4$, und ϱ_r ist invariant unter Automorphismen. Nun sei

$$g_r(z) := \frac{f^*\sigma(z)}{\varrho_r(z)} \quad \text{auf } D_r(0).$$

Das ist eine stetige Funktion. Weil $D_r(0)$ relativ-kompakt in $\mathbb{D}$ liegt, bleibt $f^*\sigma$ auf $D_r(0)$ beschränkt. Andererseits strebt $\varrho_r(z)$ gegen Unendlich für $z \to \partial D_r(0)$. Also konvergiert $g_r(z)$ gegen Null für $|z| \to r$, und g_r muss im Innern von $D_r(0)$ in einem Punkt w sein Maximum M annehmen.

Wir zeigen: $M \le 1$ (und damit $f^*\sigma \le \varrho_r$ für jedes r). Mit dem Grenzübergang $r \to 1-$ folgt dann der Satz.

Ist $f^*\sigma(w) = 0$, so ist $g_r(z) \equiv 0$ und nichts mehr zu zeigen. Wir setzen daher voraus, dass $f^*\sigma(w) > 0$ ist (also $\kappa_{f^*\sigma}$ in w definiert).

Wegen der Monotonie von ln hat auch $\log g_r$ ein Maximum in w. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 \ &\ge\ \Delta \log g_r(w) \ =\ \Delta \log f^*\sigma(w) - \Delta \log \varrho_r(w) \\ &=\ -\kappa_{f^*\sigma}(w) \cdot f^*\sigma(w)^2 + \kappa_{\varrho_r}(w) \cdot \varrho_r(w)^2 \\ &\ge\ 4 \cdot f^*\sigma(w)^2 - 4\varrho_r(w)^2, \end{aligned}$$

also $M \le 1$. ∎

Als Spezialfall kann man $G = \mathbb{D}$ mit der Metrik $\sigma = \varrho$ (Poincaré-Metrik) betrachten. Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$, so ist $f^*\varrho(0) \le \varrho(0)$, also

$$|f'(0)| \cdot \varrho(0) = |f'(0)| \cdot \varrho(f(0)) \le \varrho(0) \text{ und damit } |f'(0)| \le 1.$$

Das ergibt das klassische Schwarzsche Lemma.

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ahlfors lautet:

5.3 Satz. *Sei $A > 0$ und ϱ_r^A die durch $\varrho_r^A(z) := \dfrac{2r}{\sqrt{A}(r^2 - |z|^2)}$ definierte Metrik auf $D_r(0)$. Dann hat die Metrik die konstante Krümmung $-A$.*

Ist $B > 0$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit Differentialmetrik σ, $\kappa_\sigma \le -B$ und $f : D_r(0) \to G$ holomorph, so ist

$$f^*\sigma(z) \le \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \cdot \varrho_r^A(z).$$

BEWEIS: a) Ist σ eine Differentialmetrik und $c > 0$, so ist $\kappa_{c\sigma} = \kappa_\sigma / c^2$. Ist $\varrho_r(z) = 1/(r^2 - |z|^2)$, so ist $\Delta \log \varrho_r(z) = 4r^2/(r^2 - |z|^2)^2$ und $\kappa_{\varrho_r}(z) = -4r^2$. Daraus folgt die erste Behauptung.

b) Die Metrik $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \cdot \varrho_r^A$ hat nach (a) die konstante Krümmung $-B$. Damit lässt sich der Beweis des Satzes von Ahlfors nahezu wörtlich übernehmen. Die Krümmung kommt nur an einer einzigen Stelle ins Spiel, da muss -4 durch $-B$ ersetzt werden. ∎

Als wichtige und verblüffende Folgerung ergibt sich:

5.4 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit einer Differentialmetrik σ, und es gebe eine Konstante $B > 0$, so dass $\kappa_\sigma(z) \le -B < 0$ für alle $z \in G$ gilt. Dann ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to G$ konstant.*

BEWEIS: Sei $A > 0$. Für jedes $r > 0$ sei die Scheibe $D_r(0)$ mit der Metrik ϱ_r^A versehen. Weiter sei $f : \mathbb{C} \to G$ holomorph. Dann kann man f für jedes $r > 0$ auch als Abbildung $f : D_r(0) \to G$ auffassen. Für $|z| \le r$ ist dann

$$f^*\sigma(z) \le \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \cdot \varrho_r^A(z).$$

Lässt man nun r gegen Unendlich gehen, so strebt $\varrho_r^A(z)$ bei festem z gegen Null. Das bedeutet, dass $f^*\sigma(z) \le 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Weil andererseits stets $f^*\sigma(z) \ge 0$ ist, folgt $f^*\sigma(z) \equiv 0$, also $f'(z) \equiv 0$. Damit ist f konstant. ∎

5.5 Satz. *Auf dem Gebiet $\mathbb{C}'' := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gibt es eine Differentialmetrik μ mit $\kappa_\mu(z) \le -B < 0$ für alle $z \in \mathbb{C}''$ und eine geeignete Konstante $B > 0$.*

BEWEIS: Für $a \in \{0, 1\}$ sei $\mu_a(z) := \dfrac{(1 + |z - a|^{1/3})^{1/2}}{|z - a|^{5/6}}$. Dann ist $\mu_a \ge 0$ und differenzierbar auf $\mathbb{C}''$. Außerdem ist $\lim\limits_{z \to a} \mu_a(z) = +\infty$.

Weiter ist $\Delta(\log|z - a|^{5/6}) = \dfrac{5}{12}\Delta\big(\log((z - a)(\overline{z} - \overline{a}))\big) = 0$.

Mit $\varphi(a, z) := |z - a|^{1/3} = [(z - a)(\overline{z} - \overline{a})]^{1/6}$ gilt also:

$$\begin{aligned}
\Delta \log \mu_a(z) &= \frac{1}{2}\Delta \log(1 + |z - a|^{1/3}) \\
&= 2 \cdot \big[\log(1 + \varphi(a, z))\big]_{z\overline{z}} \\
&= 2 \cdot \Big[\frac{1}{1 + \varphi(a, z)} \cdot \varphi(a, z)_z\Big]_{\overline{z}} \\
&= 2 \cdot \frac{\varphi(a, z)_{z\overline{z}}(1 + \varphi(a, z)) - \varphi(a, z)_z \cdot \varphi(a, z)_{\overline{z}}}{(1 + \varphi(a, z))^2}\,,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\varphi(a,z)_z &= \frac{1}{6}\varphi(a,z)^{-5}\cdot(\overline{z}-\overline{a}),\\
\varphi(a,z)_{\overline{z}} &= \frac{1}{6}\varphi(a,z)^{-5}\cdot(z-a)\\
\text{und}\quad \varphi(a,z)_{z\overline{z}} &= \frac{1}{6}\Big[(z-a)^{-5/6}\cdot(\overline{z}-\overline{a})^{1/6}\Big]_{\overline{z}}\\
&= \frac{1}{36}\varphi(a,z)^{-5}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\Delta\log\mu_a(z) &= \frac{2[\varphi(a,z)^{-5}(1+\varphi(a,z))-\varphi(a,z)^{-10}\cdot\varphi(a,z)^6]}{36(1+\varphi(a,z))^2}\\
&= \frac{1}{18\cdot\varphi(a,z)^5(1+\varphi(a,z))^2}\,.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\mu(z) := \mu_0(z)\cdot\mu_1(z)$. Dann ist μ eine Differentialmetrik auf $\mathbb{C}''$, und weil

$$\mu_a(z) = \frac{(1+\varphi(a,z))^{1/2}}{\varphi(a,z)^{5/2}}$$

ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\kappa_\mu(z) &= -\frac{\Delta\log\mu(z)}{\mu(z)^2} = -\frac{\Delta\log\mu_0(z)}{\mu(z)^2} - \frac{\Delta\log\mu_1(z)}{\mu(z)^2}\\
&= -\frac{1}{18}\cdot\Big[\frac{\varphi(0,z)^5\varphi(1,z)^5}{\varphi(0,z)^5(1+\varphi(0,z))^2(1+\varphi(0,z))(1+\varphi(1,z))}\\
&\quad + \frac{\varphi(0,z)^5\varphi(1,z)^5}{\varphi(1,z)^5(1+\varphi(1,z))^2(1+\varphi(0,z))(1+\varphi(1,z))}\Big]\\
&= -\frac{1}{18}\cdot\Big[\frac{\varphi(1,z)^5}{(1+\varphi(0,z))^3(1+\varphi(1,z))} + \frac{\varphi(0,z)^5}{(1+\varphi(1,z))^3(1+\varphi(0,z))}\Big]
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\kappa_\mu(z) < 0$ für alle $z \in \mathbb{C}''$.

Es ist $\varphi(0,0)=0$, $\varphi(0,1)=1$, $\varphi(1,0)=1$ und $\varphi(1,1)=0$, also

$$\lim_{z\to 0}\kappa_\mu(z) = \lim_{z\to 1}\kappa_\mu(z) = -\frac{1}{36}\,.$$

Weiter ist $\varphi(0,1/w) = 1/\varphi(0,w)$ und $\varphi(1,1/w) = \varphi(1,w)/\varphi(0,w)$, also

$$\begin{aligned}
\kappa_\mu(1/w) &= -\frac{1}{18\varphi(0,w)^5}\cdot\Big[\frac{\varphi(1,w)^5\cdot\varphi(0,w)^4}{(\varphi(0,w)+1)^3(\varphi(0,w)+\varphi(1,w))}\\
&\quad + \frac{\varphi(0,w)^4}{(\varphi(0,w)+\varphi(1,w))^3(\varphi(0,w)+1)}\Big]\\
&= -\frac{1}{18\varphi(0,w)}\cdot\Big[\frac{\varphi(1,w)^5}{(\varphi(0,w)+1)^3(\varphi(0,w)+\varphi(1,w))}\\
&\quad + \frac{1}{(\varphi(0,w)+\varphi(1,w))^3(\varphi(0,w)+1)}\Big]\,.
\end{aligned}$$

Für $w \to 0$ strebt der Inhalt der eckigen Klammer gegen 2, $\varphi(0,w)$ gegen 0 und damit $\kappa_\mu(1/w) \to -\infty$.

Nimmt κ_μ im Innern von $\mathbb{C}''$ Werte an, die größer als $-1/36$ sind, so muss $\kappa_\mu(z)$ auf $\mathbb{C}''$ ein Maximum < 0 annehmen. Auf jeden Fall gibt es eine Konstante B, so dass $\kappa_\mu(z) \le -B < 0$ auf $\mathbb{C}''$ gilt. ∎

5.6 Folgerung. *Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}''$ holomorph, so gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass $d_\mu(f(z), f(z')) \le c \cdot d_\varrho(z, z')$ für $z, z' \in \mathbb{D}$ gilt.*

BEWEIS: Ist $\kappa_\mu \le -B < 0$, so ist $f^*\mu \le \dfrac{2}{\sqrt{B}}\,\varrho$. Wir setzen $c := \dfrac{2}{\sqrt{B}}$. Dann gilt für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$: $\ell_\mu(f \circ \gamma) = \ell_{f^*\mu}(\gamma) \le \ell_{c\cdot\varrho}(\gamma) = c \cdot \ell_\varrho(\gamma)$.

Die Ungleichung überträgt sich auf die Distanzen, denn das Infimum über die Längen $\ell_\mu(\alpha)$ für beliebige Wege zwischen $f(z)$ und $f(z')$ ist höchstens kleiner als das Infimum über die Wege $f \circ \gamma$, wobei γ die Wege zwischen z und z' in $\mathbb{D}$ durchläuft. ∎

5.7 Kleiner Picardscher Satz. *Sei f eine nicht konstante ganze Funktion. Dann enthält $f(\mathbb{C})$ alle komplexen Zahlen, mit höchstens einer Ausnahme.*

BEWEIS: Ist $p \ne q$, so sind die Gebiete $\mathbb{C} \setminus \{p,q\}$ und $\mathbb{C}''$ biholomorph äquivalent. Aber weil auf $\mathbb{C}''$ eine Differentialmetrik mit strikt negativer Krümmung existiert, ist jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}''$ konstant. ∎

Beispiel.

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nimmt jeden Wert an, mit höchstens einer Ausnahme. Tatsächlich ist $w = 0$ der Ausnahmewert, der nicht vorkommt.

Der Begriff der normalen Familie muss noch erweitert werden.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G. Man sagt, dass (f_n) *kompakt gegen Unendlich* konvergiert, falls gilt:

Für alle kompakten Menge $K \subset G$ und $L \subset \mathbb{C}$ gibt es ein n_0, so dass $f_n(K) \cap L = \varnothing$ für $n \ge n_0$ ist.

Eine Familie $\mathcal{F}$ von holomorphen Funktionen auf G heißt *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion oder gegen Unendlich konvergiert.

Beispiel.

Sei $\mathcal{F} = \{z^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Dies ist eine normale Familie auf $\mathbb{D}$ (wo die Folge kompakt gegen Null konvergiert) und auch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ (wo die Folge kompakt gegen Unendlich konvergiert). Es ist aber keine normale Familie auf einem Gebiet G mit $G \cap S^1 \neq \varnothing$, weil dieses Gebiet Punkte aus $\mathbb{D}$ und aus $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ enthält.

5.8 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\mathcal{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen auf G. Dann gilt:*

$\mathcal{F}$ ist genau dann normal, wenn es zu jedem Punkt $z \in G$ eine Umgebung $U = U(z) \subset G$ gibt, so dass

$$\mathcal{F}_U := \{f|_U \,:\, f \in \mathcal{F}\}$$

normal ist.

Beweis: Die Notwendigkeit ist klar. Eine normale Familie bleibt bei Einschränkung auf ein Teilgebiet normal.

Für die Umkehrung wählen wir eine Folge (U_n) von offenen Teilmengen von G, so dass gilt:

1. $U_n \subset\subset U_{n+1} \subset\subset G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset U_n$.

Die Existenz einer solchen kompakten Ausschöpfung beweist man wie üblich.

Sei nun (f_ν) eine Folge von Elementen von $\mathcal{F}$. Zu jedem Punkt $z \in \overline{U}_n$ gibt es eine Umgebung $V(z) \subset G$, so dass eine Teilfolge von $(f_\nu|_{V(z)})$ gleichmäßig konvergiert. Weil $\overline{U}_n$ kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_l \in \overline{U}_n$, so dass die zugehörigen Umgebungen $V_1, \ldots, V_l$ schon ganz $\overline{U}_n$ überdecken. Daher gibt es eine Teilfolge von (f_ν), die sogar auf $\overline{U}_n$ gleichmäßig konvergiert.

Induktiv konstruieren wir für jedes n eine solche Teilfolge $(f_\nu^{(n)})$, die auf $\overline{U}_n$ gleichmäßig konvergiert. Die Diagonalfolge $(f_n^{(n)})$ konvergiert dann auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig. Also ist $\mathcal{F}$ normal. ∎

Der uns bekannte Satz von Montel besagt: Ist eine Familie lokal beschränkt, so ist sie normal. Dabei kommt kompakte Konvergenz gegen Unendlich nicht vor. Der folgende Satz zeigt, dass man auch unter allgemeineren Bedingungen auf die Normalität einer Familie schließen kann.

5.9 Satz von Montel-Caratheodory. *Die Familie aller holomorphen Funktionen f auf $\mathbb{D}$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}''$ ist normal.*

BEWEIS: Sei $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}''\}$ und (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$. Außerdem sei μ die weiter oben konstruierte Differentialmetrik mit strikt negativer Krümmung auf $G := \mathbb{C}''$.

1. Schritt: Wir zeigen, dass entweder eine Teilfolge von (f_n) existiert, die kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to G$ konvergiert oder dass zu jedem r mit $0 < r < 1$ und jeder kompakten Teilmenge $L \subset \mathbb{C}''$ unendlich viele f_n mit $f_n(\overline{D}_r(0)) \cap L = \varnothing$ existieren.

a) Wenn eine Teilfolge existiert, die bezüglich μ lokal beschränkt ist, dann ist diese Teilfolge auch euklidisch lokal beschränkt (weil die Metrik μ für $z \to \partial G$ gegen Unendlich strebt). Nach Montel können wir dann eine weitere Teilfolge finden, die kompakt gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.

b) Wir können jetzt voraussetzen, dass keine Teilfolge von (f_n) lokal μ-beschränkt ist. Wir nehmen an, es gibt ein r mit $0 < r < 1$ und eine kompakte Menge $L \subset \mathbb{C}''$, so dass $f_n(\overline{D}_r(0)) \cap L = \varnothing$ für höchstens endlich viele n gilt, und führen das zum Widerspruch. Dazu sei $w_0 \in \mathbb{C}''$ ein beliebiger, aber fester Punkt.

Ist $r \le s < 1$, so folgt aus der Annahme, dass $f_n(\overline{D}_s(0)) \cap L \ne \varnothing$ für fast alle n gilt. Weil keine Teilfolge der f_n lokal μ-beschränkt ist, gibt es ein solches s und zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ und ein $z'_j \in D_s(0)$ mit $d_\mu(w_0, f_{n_j}(z'_j)) \ge j$. Setzen wir $Q := \overline{D}_s(0)$, so gibt es zu jedem j einen Punkt $z_j \in Q$ mit $f_{n_j}(z_j) \in L$, und dann eine Konstante $M > 0$, so dass $d_\mu(w_0, f_{n_j}(z_j)) \le M < \infty$ ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} j &\le d_\mu(w_0, f_{n_j}(z'_j)) \\ &\le d_\mu(w_0, f_{n_j}(z_j)) + d_\mu(f_{n_j}(z_j), f_{n_j}(z'_j)) \\ &\le M + c \cdot \varrho_h(z_j, z'_j) \ \le\ M + c \cdot k(s), \end{aligned}$$

mit Konstanten c und $k(s)$. Das ergibt den gewünschten Widerspruch.

2. Schritt: Sei (r_ν) eine Folge von Zahlen mit $0 < r_\nu < 1$, die monoton wachsend gegen 1 konvergiert, und $K_\nu := \overline{D}_{r_\nu}(0)$. Wir können voraussetzen, dass es zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ und jeder kompakten Menge $L \subset \mathbb{C}''$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_n(K_\nu) \cap L = \varnothing$ für $n \ge n_0$ ist.

Sei $U_0 := D_{1/4}(0)$, $U_1 := D_{1/4}(1)$ und $W := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 4\}$. Dann ist $L := \mathbb{C} \setminus (U_0 \cup U_1 \cup W) \subset \mathbb{C}''$ kompakt. Es gibt also ein n_0, so dass $f_n(K_1) \cap L = \varnothing$ für $n \ge n_0$ ist.

Da $f_n(K_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist, muss für $n \ge n_0$ jede der Mengen $f_n(K_1)$ in genau einer der Mengen U_0, U_1 oder W liegen. In einer dieser Mengen (o.B.d.A. in U_0) müssen dann unendlich viele (also o.B.d.A. alle) Mengen $f_n(K_1)$ liegen. Wir zeigen, dass (f_n) dann kompakt gegen 0 konvergiert.

Dazu sei $K \subset \mathbb{D}$ kompakt. Es gibt ein ν mit $K \subset K_\nu$. Ist $U = U(0) \subset U_0$ eine beliebige offene zusammenhängende Umgebung, so gibt es ein n_1, so dass $f_n(K_\nu) \cap (\mathbb{C} \setminus (U \cup U_1 \cup W)) = \varnothing$ für $n \ge n_1$ ist. Weil $f_n(K_1)$ in U_0 liegt, trifft

$f_n(K_\nu)$ immer U_0 und muss (als zusammenhängende Menge) in U liegen. Also ist $f_n(K) \subset U$ für $n \geq n_1$ und damit die kompakte Konvergenz gegen 0 bewiesen.

Genauso kann man kompakte Konvergenz gegen 1 oder gegen Unendlich erhalten, wenn die Mengen $f_n(K_1)$ in U_1 bzw. in W liegen. Dabei gilt die Aussage in Wirklichkeit natürlich nur für eine Teilfolge, aber mehr wird auch nicht verlangt. ■

5.10 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet. Dann ist die Familie aller holomorphen Funktionen f auf G mit $f(G) \subset \mathbb{C}''$ normal.*

Der Beweis ist klar, die Einschränkung der Familie auf eine beliebige Kreisscheibe ist nach Montel-Caratheodory normal.

Nun folgt:

5.11 Großer Satz von Picard. *Die holomorphe Funktion f habe eine wesentliche isolierte Singularität in z_0. Dann nimmt f in jeder Umgebung von z_0 jeden Wert aus $\mathbb{C}$ an, mit höchstens einer Ausnahme.*

Beweis: O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Wir nehmen an, f sei auf $\{z : 0 < |z| < \delta\}$ definiert und holomorph und lasse die Werte 0 und 1 aus. Außerdem wählen wir eine monoton fallende und gegen 0 konvergente Folge von Zahlen $\varepsilon_n > 0$.

Dann sind die Funktionen $g_n(z) := f(\varepsilon_n z)$ auf $\{z : 0 < |z| < \delta\}$ holomorph und nehmen die Werte 0 und 1 nicht an. Die Familie (g_n) ist normal. Wir können annehmen, dass schon (g_n) kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion g oder gegen Unendlich konvergiert.

1. Fall: Sei g holomorph.

Ist $0 < r < \delta$ und $|g(z)| < M$ für $|z| = r$, so muss es ein n_0 geben, so dass schon $|g_n(z)| < M$ für $|z| = r$ und $n \geq n_0$ ist. Aber dann ist $|f(z)| < M$ für $|z| = \varepsilon_n r$ und $n \geq n_0$, und nach dem Maximumprinzip ist $|f(z)| < M$ für $\varepsilon_n r \leq |z| \leq \varepsilon_{n_0} r$ und $n \geq n_0$. Das bedeutet, dass $|f|$ nahe 0 beschränkt bleibt, was in der Nähe einer wesentlichen Singularität nicht sein kann.

2. Fall: Sei $g(z) \equiv \infty$. Durch Übergang zu den Kehrwerten kann man sehen, dass in diesem Fall $|f(z)|$ für $|z| \to 0$ gegen $+\infty$ strebt. Aber damit hat f in 0 eine Polstelle, und auch das ist ausgeschlossen.

Also kann f nicht zwei Werte auslassen. ■

Zum Schluss noch die Andeutung eines alternativen Beweises des Satzes von Montel-Caratheodory.

Wir konstruieren eine holomorphe Überlagerung

$$\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{C}'' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Wir beginnen mit dem Gebiet

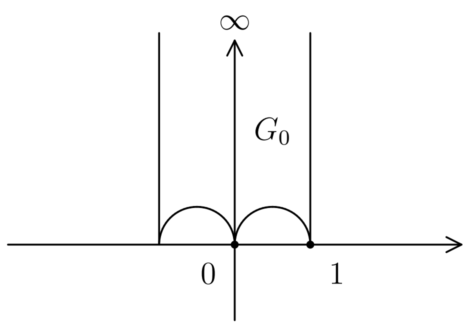
$$G_0 := \{z = x + \mathrm{i}\, y \,:\, 0 < x < 1 \text{ und } |z - 1/2| > 1/2\}.$$

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine biholomorphe Abbildung $\psi_0 : G_0 \to \mathbb{H}$, die sich nach Caratheodory homöomorph auf den Rand fortsetzen lässt. Man kann es so einrichten, dass für die Fortsetzung $\overline{\psi}_0$ gilt:

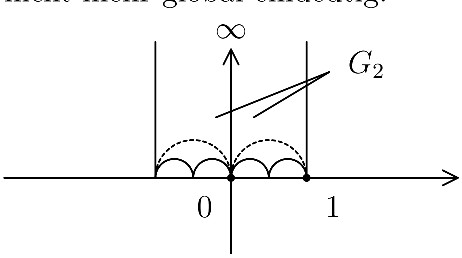
$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(1) = 1 \text{ und } \psi_0(\infty) = \infty.$$

Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip kann man ψ_0 über die glatten Randbögen hinweg holomorph fortsetzen. Es sei

$$G_1 := G_0 \cup \{z = x + \mathrm{i}\, y \,:\, -x \in G_0\} \cup \{\mathrm{i}\, y \,:\, y > 0\}.$$



Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\psi_1 : G_1 \to \mathbb{C}'' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, die ψ_0 fortsetzt und den linken Teil von G_1 in die untere Halbebene abbildet. Als nächstes wird ψ_1 über den rechten Kreisbogen hinweg fortgesetzt. Bei der dabei benutzten Spiegelung geht ∞ auf den Mittelpunkt des Kreises (also auf $1/2$), und die vertikalen Linien $x = 0$ und $x = 1$ auf Kreislinien. Auf der linken Seite verfährt man genauso. Das ergibt ein Gebiet G_2 und eine holomorphe Fortsetzung $\psi_2 : G_2 \to \mathbb{C}''$. Weil die Fortsetzungen nicht länger biholomorph sind, ist die Zuordnung der Ränder auch nicht mehr global eindeutig.



So fährt man fort. Die Vereinigung aller Gebiete G_n ergibt die obere Halbebene $\mathbb{H}$, und man erhält eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{C}''$. Man kann zeigen, dass λ eine Überlagerung (mit unendlich vielen Blättern) ist. Man nennt λ die *Modulfunktion*.

Durch Verknüpfung mit einer biholomorphen Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{H}$ gewinnt man eine Überlagerung $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}''$. Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet und $\mathcal{F}$ die Familie der holomorphen Funktionen f auf G mit $f(G) \subset \mathbb{C}''$. Zu jedem $f \in \mathcal{F}$ gibt es eine holomorphe Liftung $\widetilde{f} : G \to \mathbb{D}$ (mit $\pi \circ \widetilde{f} = f$). Die Familie $\widetilde{\mathcal{F}}$ der Funktionen $\widetilde{f}$ ist global beschränkt (da die Bilder in $\mathbb{D}$ liegen), also normal. Ist (f_ν) eine Folge in $\mathcal{F}$, so besitzt $(\widetilde{f}_\nu)$ eine kompakt konvergente Teilfolge $(\widetilde{f}_{\nu_i})$. Offensichtlich konvergiert auch die Folge der Funktionen $f_{\nu_i} = \pi \circ \widetilde{f}_{\nu_i}$ kompakt. Also ist $\mathcal{F}$ normal.