§ 4 Differentialmetriken

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine *Differentialmetrik* auf G ist eine stetige Funktion $\varrho : G \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $\varrho(z) \geq 0$ auf G.
2. Auf $\{z \in G \, : \, \varrho(z) > 0\}$ ist ϱ zweimal stetig differenzierbar.

Ist $z \in G$ und $w \in \mathbb{C}$ ein „Tangentialvektor“ in z, so nennt man

$$\|w\|_{\varrho,z} = \varrho(z) \cdot |w|$$

die *Länge* von w in z.

Beispiele.

1. Setzt man $\varrho(z) = 1$ in jedem Punkt $z \in G$, so erhält man die *euklidische Metrik*, mit $\|w\|_{\varrho,z} = |w|$.
2. Auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ wird die *Poincaré-Metrik* definiert durch

   $$\varrho(z) := \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

   Damit ist z.B. $\|w\|_{\varrho,0} = |w|$ und

   $$\|w\|_{\varrho,\,0.9\mathrm{i}} = \varrho(0.9\mathrm{i}\,) \cdot |w| = \frac{1}{0.19}\,|w| = 5.2631579 \cdot |w|.$$

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\varrho : G \to \mathbb{R}$ eine Differentialmetrik. Ist $\gamma : [a, b] \to G$ ein stetig differenzierbarer Weg, so bezeichnen wir die Zahl

$$\ell_\varrho(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\varrho,\gamma(t)}\, dt$$

als die *Länge von γ bezüglich ϱ*.

Beispiele.

1. Ist ϱ die euklidische Metrik (auf einem beliebigen Gebiet G), so ist $L(\gamma) := \ell_\varrho(\gamma)$ die gewöhnliche Weglänge.
2. Ist ϱ die Poincaré-Metrik auf dem Einheitskreis, so nennt man

   $$L_h(\gamma) := \ell_\varrho(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt$$

   die *hyperbolische Weglänge* von γ.

Ist z.B. $\gamma : [0, 1-\varepsilon] \to \mathbb{D}$ mit $\gamma(t) = t$ die Verbindungsstrecke von 0 nach $1-\varepsilon$, so ist

$$L_h(\gamma) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \; .$$

Für $\varepsilon \to 0$, also $1-\varepsilon \to \partial\mathbb{D}$, strebt $L_h(\gamma)$ gegen $+\infty$.

4.1 Satz. *Unter allen Integrationswegen $\mu : [a,b] \to \mathbb{D}$ mit $\mu(a) = 0$ und $\mu(b) = 1-\varepsilon$ ist die Verbindungsstrecke γ der Weg mit der kürzesten hyperbolischen Weglänge.*

Außerdem ist $L_h(\alpha) \geq L(\alpha)$ für jeden Integrationsweg α in $\mathbb{D}$.

Beweis: Wir schreiben $\mu = \mu_1 + \mathrm{i}\,\mu_2$. Dann ist

$$|\mu'(t)| \geq |\mu_1'(t)| \geq \mu_1'(t)$$

und

$$1 - |\mu(t)|^2 = 1 - \mu_1(t)^2 - \mu_2(t)^2 \leq 1 - \mu_1(t)^2.$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} L_h(\mu) &= \int_a^b \frac{|\mu'(t)|}{1-|\mu(t)|^2}\, dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\mu_1'(t)}{1-\mu_1(t)^2}\, dt \\ &= \int_{\mu_1(a)}^{\mu_1(b)} \frac{1}{1-t^2}\, dt \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t^2}\, dt \;=\; L_h(\gamma). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für einen beliebigen Weg $\alpha : [a,b] \to \mathbb{D}$:

$$L_h(\alpha) = \int_a^b \frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}\, dt \geq \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt = L(\alpha).$$

Die hyperbolische Weglänge ist stets größer als die euklidische Weglänge. ∎

Der *hyperbolische Abstand* zwischen zwei Punkten x und y in $\mathbb{D}$ ist die Zahl

$$d_h(x,y) := \inf\{L_h(\gamma) \,:\, \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

Offensichtlich ist stets $d_h(x,y) \geq d(x,y)$, und es ist $d_h(x,x) = 0$.

4.2 Satz. *Der hyperbolische Abstand ist eine Metrik auf $\mathbb{D}$, d.h., es gilt:*

1. *$d_h(x,y) \geq 0$.*

2. *Ist* $d_h(x,y) = 0$, *so ist* $x = y$.
3. $d_h(x,y) = d_h(y,x)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{D}$.
4. *Es gilt die Dreiecks-Ungleichung:*

$$d_h(x,y) \le d_h(x,z) + d_h(z,y).$$

Der BEWEIS ist einfach.

Wir führen jetzt die folgende Hilfsgröße ein:

$$\delta(z,w) := \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|.$$

$\delta(z,w)$ ist symmetrisch in z und w, und es ist $\delta(z,0) = |z|$.

Für $\alpha \in \mathbb{D}$ ist $\delta(z,\alpha) = |T_\alpha(z)|$.

4.3 Lemma von Schwarz-Pick. *Sei* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *holomorph. Dann ist*

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \le \delta(z_1, z_2)$$

und

$$|f'(z)| \le \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Ist sogar $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, *so gilt in beiden Fällen die Gleichheit. Ist* f *kein Automorphismus, so gilt die strenge Ungleichung.*

BEWEIS: Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, sowie $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$. Außerdem setzen wir $T := T_{-z_1}$ und $T^* := T_{w_1}$. Dann liegen T und T^* in $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, und

$$g := T^* \circ f \circ T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

ist eine holomorphe Abbildung mit $g(0) = 0$. Aus dem Schwarzschen Lemma folgt:

$$|g(z)| \le |z| \quad \text{und} \quad |g'(0)| \le 1.$$

Dabei gilt jeweils die Gleichheit, wenn g eine Rotation ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\delta(f(z_1), f(z_2)) &= \left|\frac{f(z_2)-w_1}{1-\overline{w}_1 f(z_2)}\right| \\
&= |T^*(f(z_2))| \;=\; |g(T^{-1}(z_2))| \\
&\le |T^{-1}(z_2)| \;=\; |T_{z_1}(z_2)| \\
&= \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_2 z_1}\right| \\
&= \delta(z_1, z_2),
\end{aligned}$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn g eine Rotation ist.

Weil $g'(0) = (T^*)'(w_1) \cdot f'(z_1) \cdot T'(0)$ ist, folgt:

$$|f'(z_1)| \le \frac{1}{|T'(0)| \cdot |(T^*)'(w_1)|} \,.$$

Allgemein ist

$$T'_\alpha(z) = \frac{(1-\overline{\alpha}z) + \overline{\alpha}(z-\alpha)}{(1-\overline{\alpha}z)^2} = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-\overline{\alpha}z)^2} \,,$$

speziell also

$$T'(0) = 1 - |z_1|^2 \quad \text{und} \quad (T^*)'(w_1) = \frac{1}{1-|w_1|^2} \,.$$

Daraus folgt die zweite Behauptung.

Ist f ein Automorphismus, so auch g, und wegen $g(0) = 0$ ist g dann eine Rotation. In diesem Falle erhalten wir die Gleichheit.

Ist umgekehrt $|f'(z_1)| = (1 - |f(z_1)|^2)/(1 - |z_1|^2)$, so ist $|g'(0)| = 1$, also g (und damit auch f) ein Automorphismus. ∎

4.4 Satz. *Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph. Dann ist $L_h(f \circ \gamma) \le L_h(\gamma)$ für alle Wege γ, also $d_h(f(z), f(w)) \le d_h(z, w)$.*

Beweis: Wir verwenden das Lemma von Schwarz-Pick. Danach ist

$$\begin{aligned} L_h(f \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{1 - |f \circ \gamma(t)|^2}\, dt \\ &= \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|}{1 - |f(\gamma(t))|^2}\, dt \\ &\le \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt \\ &= L_h(\gamma). \end{aligned}$$

∎

Definition. Ist $f : G_1 \to G_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die höchstens isolierte Nullstellen besitzt, und $\varrho : G_2 \to \mathbb{R}$ eine Differentialmetrik, so wird die Differentialmetrik $f^*\varrho : G_1 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f^*\varrho(z) := \varrho(f(z)) \cdot |\frac{\partial f}{\partial z}(z)|.$$

Sind Differentialmetriken ϱ_1, ϱ_2 auf den Gebieten G_1, G_2 gegeben, so bezeichnet man eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $f : G_1 \to G_2$ mit $f^*\varrho_2 = \varrho_1$ als *Isometrie*.

4.5 Satz. *Ist f – unter den obigen Voraussetzungen – eine Isometrie und außerdem holomorph, so gilt:*

1. *Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to G_1$ ist $\ell_{\varrho_1}(\gamma) = \ell_{\varrho_2}(f \circ \gamma)$.*
2. *Für $p, q \in G_1$ ist $d_{\varrho_1}(p,q) = d_{\varrho_2}(f(p), f(q))$.*
3. *$f^{-1} : G_2 \to G_1$ ist ebenfalls eine Isometrie.*

Beweis: 1) Weil f holomorph ist, ist $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'$ und $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\ell_{\varrho_2}(f \circ \gamma) &= \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\|_{\varrho_2, f(\gamma(t))}\, dt \\
&= \int_a^b |f'(\gamma(t))| \cdot \varrho_2(f(\gamma(t))) \cdot |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \varrho_1(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\varrho_1, \gamma(t)}\, dt \;=\; \ell_{\varrho_1}(\gamma).
\end{aligned}$$

(2) folgt sofort aus (1), und (3) ist trivial. ∎

Beispiel.

Jeder Automorphismus des Einheitskreises ist eine Isometrie für die Poincaré-Differentialmetrik. Denn aus dem Lemma von Schwarz-Pick folgt für die hyperbolische Metrik ϱ:

$$f^*\varrho(z) = |f'(z)| \cdot \frac{1}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} = \varrho(z).$$

4.6 Satz. *Für $z, w \in \mathbb{D}$ ist $d_h(z,w) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \delta(z,w)}{1 - \delta(z,w)}$.*

Beweis: Ist $z = 0$ und w reell und positiv, so ist $\delta(z,w) = w$. In diesem Fall kennen wir die Formel schon.

Sind $z, w \in \mathbb{D}$ beliebig, so setzen wir $T := T_z \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Dann ist $T(z) = 0$ und $|T(w)| = \delta(z,w)$. Daraus folgt:

$$d_h(z,w) = d_h(T(z), T(w)) = d_h(0, T(w)) = d_h(0, |T(w)|) = d_h(0, \delta(z,w)).$$

Mit der obigen Bemerkung ergibt sich die Behauptung. ∎

4.7 Satz. *Die hyperbolische Metrik d_h induziert die Standard-Topologie auf $\mathbb{D}$, und der metrische Raum $(\mathbb{D}, d_h)$ ist vollständig.*

Beweis: Für $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\begin{aligned} d_h(0,z) < \varepsilon \quad &\iff \quad \frac{1+\delta(0,z)}{1-\delta(0,z)} < e^{2\varepsilon} \\ &\iff \quad \delta(0,z) < \frac{e^{2\varepsilon}-1}{e^{2\varepsilon}+1} \\ &\iff \quad |z| < \frac{e^{2\varepsilon}-1}{e^{2\varepsilon}+1} \end{aligned}$$

Also stimmen die Umgebungen von 0 in beiden Topologien überein. Ist $z_0 \in \mathbb{D}$ ein beliebiger Punkt, so gibt es einen Automorphismus T von $\mathbb{D}$, der 0 auf z_0 abbildet. Da T biholomorph ist, bildet T Umgebungen von 0 (in der Standard-Topologie) auf Umgebungen von z_0 ab, und umgekehrt. Als Isometrie bildet T aber auch ε-Umgebungen von 0 (in der hyperbolischen Metrik) auf ebensolche Umgebungen von z_0 ab. Also sind die Topologien gleich.

Sei nun (z_n) eine Cauchyfolge bezüglich der hyperbolischen Metrik. Dann gibt es ein r mit $0 < r < 1$, so daß alle z_n in

$$\overline{D_r^{(h)}(0)} = \{z \in \mathbb{D} \,:\, d_h(0,z) \le r\}$$

liegen (denn $\partial\mathbb{D}$ ist vom Nullpunkt unendlich weit entfernt). Aber dann konvergiert eine Teilfolge (in der gewöhnlichen Metrik) gegen ein z_0 in dieser abgeschlossenen Kreisscheibe. Diese Teilfolge konvergiert auch in der hyperbolischen Metrik, und weil (z_n) eine Cauchyfolge ist, konvergiert sogar die ursprüngliche Folge gegen z_0. ∎

4.8 Satz. *Sei $\widetilde{\varrho}$ eine Differentialmetrik auf $\mathbb{D}$. Ist jeder Automorphismus von $\mathbb{D}$ eine Isometrie bezüglich $\widetilde{\varrho}$, so stimmt $\widetilde{\varrho}$ bis auf einen konstanten Faktor mit der Poincaré-Metrik überein.*

Beweis: Sei $a \in \mathbb{D}$ und $f(z) := \dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$. Dann ist $f'(z) = \dfrac{1-a\overline{a}}{(1+\overline{a}z)^2}$, also $f'(0) = 1 - a\overline{a}$ und $\widetilde{\varrho}(0) = f^*\widetilde{\varrho}(0) = |f'(0)| \cdot \widetilde{\varrho}(f(0))$. Daraus folgt:

$$\widetilde{\varrho}(a) = \frac{1}{1-|a|^2} \cdot \widetilde{\varrho}(0) = \widetilde{\varrho}(0) \cdot \varrho_h(a),$$

wenn man die Poincaré-Metrik mit ϱ_h bezeichnet. ∎

4.9 Satz. *Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ stetig differenzierbar und eine Isometrie für $(\mathbb{D}, \varrho_h)$, so ist f holomorph.*

BEWEIS: 1) Wir nehmen zunächst an, dass $f(0) = 0$ ist und setzen

$$C_R := \{z \in \mathbb{D} : d_h(z, 0) = R\}, \text{ für } R > 0.$$

Da d_h invariant unter Drehungen ist, ist C_R ein euklidischer Kreis um den Nullpunkt. Weil f eine Isometrie ist, ist $f(C_R) = C_R$, und für $p \in C_R$ ist

$$\frac{|f(p) - f(0)|}{|p - 0|} = \frac{|f(p)|}{|p|} = 1.$$

Der Grenzübergang $R \to 0+$ liefert die Aussage $|f'(0)| = 1$. Daraus folgt, dass f in 0 konform ist.

2) Sei nun $f(0)$ beliebig. Wir wählen einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$ und setzen $w_0 := f(z_0)$. Dann betrachten wir die linearen Transformationen

$$\varphi(z) := \frac{z + z_0}{1 + \overline{z}_0 z} \quad \text{und} \quad \psi(z) := \frac{z - w_0}{1 - \overline{w}_0 z}.$$

Dann ist $g := \psi \circ f \circ \varphi$ eine Isometrie und $g(0) = \psi(f(z_0)) = \psi(w_0) = 0$. Nach Teil (1) ist g konform in 0, also f konform in z_0.

3) Als konforme Abbildung muss f holomorph oder antiholomorph sein. Da aber $f_z \not\equiv 0$ ist (Isometrie!), kann f nicht antiholomorph sein. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Um 300 v.Chr. wurde in Alexandria in Ägypten eine Universität und die größte Bibliothek der damaligen Welt gebaut. Die führenden Gelehrten der Zeit wurden eingeladen, um zu forschen und Vorlesungen zu halten. Einer der ersten Wissenschaftler in Alexandria muß ein Mathematiker mit dem Namen *Euklid* gewesen sein. Über seine Person ist so gut wie nichts bekannt, aber er war es, der die „Elemente“ zusammenstellte, das einflußreichste Lehrbuch in der Geschichte der Zivilisation.

Die „Elemente“ enthalten die wichtigsten mathematischen Fakten, die zu jener Zeit bekannt waren. Die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie.

Nach Einführung der Begriffe stellt Euklid 5 Postulate auf, aus denen er dann die gesamte Geometrie herleitet. Nach unseren Maßstäben enthielten diese Postulate Lücken, die spätestens um 1900 von David Hilbert geschlossen wurden. Eine moderne Version von Euklids Postulaten würde etwa folgendermaßen aussehen:

Postulat I (Inzidenz): Durch je zwei (verschiedene) Punkte geht genau eine Gerade. Jede Gerade enthält wenigstens zwei (verschiedene) Punkte. Die Ebene enthält wenigstens zwei (verschiedene) Geraden.

Postulat II (Anordnung): Von drei (verschiedenen) Punkten auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen. Zu zwei Punkten A, B gibt es einen dritten Punkt C auf der gleichen Geraden, so daß B zwischen A und C liegt.

Man kann dann sagen, daß zwei Punkte A und B auf verschiedenen Seiten einer Geraden ℓ liegen, wenn es einen Punkt C auf ℓ gibt, der zwischen A und B liegt. Es wird noch gefordert, daß eine Gerade immer genau zwei Seiten besitzt.

Postulat III (Bewegungen): Es gibt eine Gruppe von bijektiven Abbildungen der Ebene auf sich (sogenannten *Bewegungen* oder *Kongruenzabbildungen*), die Inzidenzen und Anordnungen respektieren.

Geometrische Figuren heißen *kongruent*, wenn sie durch eine Bewegung aufeinander abgebildet werden. Es wird gefordert, daß es genügend viele Bewegungen gibt, so daß die bekannten Kongruenzsätze (insbesondere SWS) gelten. Man kann dann auch Spiegelungen, Drehungen und Translationen, sowie rechte Winkel definieren.

Postulat IV (Stetigkeit): Geraden sind vollständig im Sinne des Dedekindschen Schnittaxioms.

Bei Euklid lauten die Postulate anders (mit Ausnahme von (I)), aber er benutzt die oben genannten Eigenschaften zumindest implizit. Mit Hilfe von (I) bis (IV) beweist er 31 Sätze, dann benutzt er zum ersten Mal sein letztes Postulat. Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben. Nun wird gefordert:

Postulat V (Parallelenaxiom): Ist ℓ eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf ℓ liegt, so gibt es genau eine Gerade ℓ' durch P, die parallel zu ℓ ist.

Bei Euklid war die Formulierung des 5. Postulates sehr viel komplizierter als die der ersten vier Postulate. Obwohl es gebraucht wurde, um den Satz von der Winkelsumme im Dreieck und den Satz des Pythagoras herzuleiten, sahen es die nachfolgenden Mathematiker als nicht vollwertiges Axiom an und versuchten, es zu beweisen. Zunächst die Griechen, dann die Araber, dann die Italiener, die Engländer und zuletzt die Deutschen, Schweizer und Franzosen. Fast 2000 Jahre lang!

Dann entdeckten im 18. Jahrhundert fast gleichzeitig der Deutsche Carl Friedrich Gauß, der Ungar Johann Bolyai und der Russe Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, daß man mit Hilfe der Postulate (I) bis (IV) und einer abgeänderten Version von Postulat (V) eine ebenfalls in sich schlüssige Geometrie entwickeln konnte, in der z.B. die Winkelsumme im Dreieck stets weniger als 180° beträgt. Die „Nichteuklidische Geometrie“ war gefunden! Damit wurde gleichzeitig offensichtlich, daß man in der Euklidischen Geometrie auf das Parallelenaxiom nicht verzichten konnte.

Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der Nichteuklidischen Geometrie konnte erst Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts mit Hilfe von Modellen nachgewiesen werden. Ein besonders schönes Modell liefert uns die hyperbolische Geometrie im Einheitskreis (nach Poincaré).

Wir haben gezeigt, auf welchen Wegen die hyperbolische Länge jeweils ihr Minimum annimmt, nämlich auf den konformen Bildern von Abschnitten der positiven reellen Achse. Dies können wieder nur Abschnitte von Geraden oder Kreisen sein. Wegen der Konformität müssen die Bildkurven in der Verlängerung den Rand des Einheitskreises unter einem rechten Winkel treffen. Das tun nur Geraden durch den Nullpunkt oder sogenannten *Orthokreise*, die $\partial\mathbb{D}$ unter einem rechten Winkel treffen.

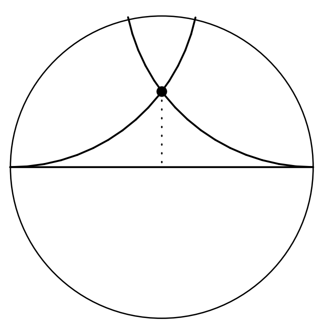
Das Poincaré-Modell sieht nun folgendermaßen aus:

Als „Ebene“ benutzen wir das Innere des Einheitskreises $\mathbb{D}$, als „Geraden“ die Orthokreise (incl. der euklidischen Geraden durch den Nullpunkt). Die Inzidenz- und Anordnungsaxiome sind offensichtlich erfüllt, und da alle hyperbolischen Geraden homöomorph zu einem offenen Intervall und damit zur rellen Achse sind, ist auch das Dedekind-Axiom erfüllt.

Als Bewegungsgruppe dient die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Sie setzt sich zusammen aus den verallgemeinerten Translationen T_α, den Drehungen R_θ um 0 und der Spiegelung $z \mapsto \bar{z}$. Dann kann man zeigen, daß alle Bewegungs-Axiome erfüllt sind.

In der vorliegenden Geometrie ist offensichtlich das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt:

> *Es gibt eine Gerade ℓ und einen Punkt P, der nicht auf ℓ liegt, so daß durch P mindestens zwei Parallelen zu ℓ gehen.*



Man kann auch leicht Dreiecke mit einer Winkelsumme $< 180°$ finden: