

### § 3 Randverhalten

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Fortsetzbarkeit von holomorphen Funktion in besonderen Fällen.  $\mathbb{H}$  bezeichne wieder die obere Halbebene.

**3.1 Schwarzsches Spiegelungsprinzip.** *Es sei  $G_+ \subset \mathbb{H}$  ein Gebiet, dessen Rand  $\partial G_+$  ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  enthalte. Es sei*

$$G_- := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G_+\}$$

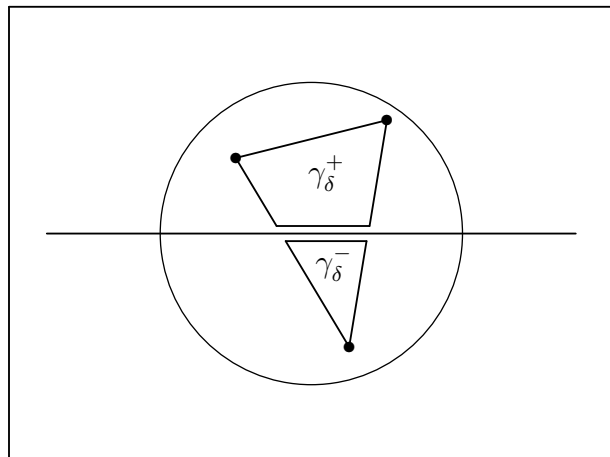
das Spiegelbild von  $G_+$  bezüglich der reellen Achse. Dann gilt :

1. *Ist  $f$  stetig auf der Vereinigung  $G_+ \cup I \cup G_-$  und holomorph im Inneren der beiden Gebiete  $G_+$  und  $G_-$ , so ist  $f$  holomorph auf  $G_+ \cup I \cup G_-$ .*
2. *Ist  $f$  stetig auf  $G_+ \cup I$ , holomorph auf  $G_+$  und zusätzlich noch reellwertig auf dem Intervall  $I$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung  $F$  von  $f$  auf  $G_+ \cup I \cup G_-$ , mit*

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{für alle } z.$$

BEWEIS: Sei zunächst  $f$  stetig auf  $G := G_+ \cup G \cup G_-$ . Es sei  $t$  eine reelle Zahl aus  $I$ ,  $U = U_\varepsilon(t)$  eine Umgebung, die ganz in  $G$  liegt. Wir wollen die Holomorphie von  $f$  in  $U$  mit dem Satz von Morera zeigen. Sei dafür  $\Delta$  ein abgeschlossenes Dreieck in  $U$ ,  $\gamma$  bezeichne den orientierten Rand  $\partial\Delta$ .

Für  $\delta > 0$  seien  $\gamma_\delta^+$  und  $\gamma_\delta^-$  die Ränder der auf der Höhe von  $\delta i$  bzw.  $-\delta i$  abgeschnittenen „Dreiecksstümpfe“.



Geht  $\delta$  gegen Null, so geht die Summe der beiden Wege gegen  $\gamma$  (ein Stück reelle Achse hebt sich weg, da es entgegengesetzt durchlaufen wird):

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta^+ + \gamma_\delta^-} f(z)dz = 0,$$

Im Detail sieht man das folgendermaßen:

Die Strecke zwischen den Schnittpunkten von  $\partial\Delta$  mit der reellen Achse liege zwischen den reellen Zahlen  $a$  und  $b$ . Die untere Kante des oberen Dreiecksstumpfes sei die Strecke zwischen den Punkten  $v_\delta = a_\delta + i\delta$  und  $w_\delta = b_\delta + i\delta$  (mit geeigneten Realteilen  $a_\delta, b_\delta$ ). Ist  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so kann man  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  so klein wählen, dass  $|a - v_\delta| < \varepsilon$  und  $|b - w_\delta| < \varepsilon$  ist. Ist außerdem  $C := \sup_\Delta |f|$ , so ist

$$\left| \int_{v_\delta}^a f(z) dz \right| \leq |a - v_\delta| \cdot C < \varepsilon \cdot C \text{ und analog } \left| \int_b^{w_\delta} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot C.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{v_\delta}^{w_\delta} f(z) dz &= \int_{v_\delta}^a f(z) dz + \int_a^b f(z) dz + \int_b^{w_\delta} f(z) dz \\ &\rightarrow \int_a^b f(z) dz \quad (\text{für } \delta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Morera folgt nun die Holomorphie von  $f$ .

Für den zweiten Teil sei  $f$  stetig auf  $G_+$ . Es wird definiert:

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in G_+ \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } z \in G \setminus G_+ \end{cases}.$$

Weil  $f$  reell auf  $I$  ist, ist  $F$  stetig auf  $G$ . Nach Voraussetzung ist  $F$  holomorph auf  $G_+$ , aber die Holomorphie überträgt sich auf  $G_-$ , denn mit  $c(z) := \bar{z}$  ist  $F(z) = \overline{f \circ c}$  auf  $G_-$ , und die Ableitung nach  $\bar{z}$  ist mittels Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \cdot \frac{\partial c}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} = 0,$$

weil  $(\overline{f})_z = 0$  und  $(\bar{z})_{\bar{z}} = 0$  ist. Deshalb ist der erste Teil anwendbar, d.h.  $F$  ist holomorph auf  $G$ . ■

**Definition.** Eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *reell-analytisch*, falls es für jedes  $t_0 \in [a, b]$  eine konvergente Potenzreihe

$$\Gamma(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (t - t_0)^\nu$$

mit (komplexen) Koeffizienten  $a_\nu$  gibt, so dass  $\Gamma(t) = \gamma(t)$  für  $t$  nahe  $t_0$  ist.

$C = \gamma([a, b])$  heißt *glattes analytisches Kurvenstück*, falls  $\gamma$  reell-analytisch und injektiv und  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t$  aus  $[a, b]$  ist.

Ist  $C = \gamma([a, b])$  ein glattes analytisches Kurvenstück, so gibt es eine Umgebung  $U([a, b]) \subset \mathbb{C}$  und eine Umgebung  $W = W(C)$ , so dass  $\gamma$  zu einer biholomorphen Abbildung  $\hat{\gamma} : U \rightarrow W$  fortgesetzt werden kann. Das sehen wir so ein: jede lokale Potenzreihe konvergiert (als komplexe Potenzreihe gesehen) auf einem Kreis gegen eine holomorphe Funktion. Da zwei solche Potenzreihen auf dem reellen Schnitt übereinstimmen, garantiert der Identitätssatz die Gleichheit auf dem offenen Schnitt der Kreise in  $\mathbb{C}$ . Da die Ableitung  $\gamma'$  auf  $[a, b]$  ungleich Null ist, gilt das auch auf einer (unter Umständen verkleinerten) Umgebung für die Fortsetzung. Unter diesen Umständen führen wir die folgende Redeweise ein:

**Definition.** Zwei Punkte  $z_1, z_2 \in W$  heißen *symmetrisch bezüglich  $C$* , falls

$$\hat{\gamma}^{-1}(z_1) = \overline{\hat{\gamma}^{-1}(z_2)}$$

gilt, falls also die Urbilder bezüglich  $\hat{\gamma}$  symmetrisch zur reellen Achse liegen.

**Bemerkung.** Die Eigenschaft „symmetrisch bezüglich  $C$ “ ist unabhängig von der Parametrisierung von  $\gamma$ . Ist nämlich  $\varrho : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  eine andere Parametrisierung von  $C$  und  $\hat{\varrho}$  die holomorphe Fortsetzung von  $\varrho$  auf eine Umgebung  $U' = U'([c, d])$ , so können wir annehmen, dass  $\hat{\varrho}$  und  $\hat{\gamma}$  die gleiche Bildmenge  $W$  besitzen, sonst verkleinern wir den Definitionsbereich entsprechend. Dann ist

$$\Lambda := \hat{\varrho}^{-1} \circ \hat{\gamma} : U \rightarrow U'$$

auf  $U \cap \mathbb{R}$  reellwertig und die Einschränkung  $\lambda$  von  $\Lambda$  auf  $U \cap \mathbb{R}$  kann um jedes  $t_0 \in [a, b]$  in eine reelle Potenzreihe entwickelt werden,

$$\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(t - t_0)^{\nu}.$$

Da  $\lambda$  reellwertig ist, sind alle  $b_{\nu}$  reell. Die Reihenentwicklung bleibt aber im Komplexen gültig. Deshalb ist

$$\Lambda(\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\bar{z} - t_0)^{\nu} = \overline{\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(z - t_0)^{\nu}} = \overline{\Lambda(z)}.$$

Sind  $w_1 = \hat{\gamma}^{-1}(z_1)$ ,  $w_2 = \hat{\gamma}^{-1}(z_2)$  symmetrisch zu  $\mathbb{R}$ , so ist  $w_1 = \bar{w}_2$ . Dann gilt :

$$\hat{\varrho}^{-1}(z_2) = \hat{\varrho}^{-1} \circ \hat{\gamma} \circ \hat{\gamma}^{-1}(z_2) = \Lambda(w_2) = \Lambda(\bar{w}_1) = \overline{\Lambda(w_1)} = \overline{\hat{\varrho}^{-1} \circ \hat{\gamma} \circ \hat{\gamma}^{-1}(z_1)} = \overline{\hat{\varrho}^{-1}(z_1)}.$$

Deshalb ist die Symmetrie bzgl.  $C$  wohldefiniert.

### Beispiele.

1. Es sei  $\gamma(t) = a + tv$ ,  $v \neq 0$  eine Gerade. Dann ist  $\gamma$  die Einschränkung der affin linearen, holomorphen Funktion  $\hat{\gamma}(z) = a + zv$ . Die Menge  $\hat{\gamma}(\mathbb{H})$  ist eine

der beiden durch  $\gamma$  bestimmten Halbebenen. Die Spiegelung an der Geraden wird beschrieben durch

$$x = a + zv \mapsto x^* = a + \bar{z}v.$$

Setzt man  $z = \frac{x-a}{v}$  in  $x^*$  ein, so erhält man die geschlossene Spiegelformel:

$$x^* = a + \frac{v}{\bar{v}}(\bar{x} - \bar{a}).$$

2. Es sei  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $r > 0$ , ein parametrisierter Kreis. Dann erhalten wir die Fortsetzung wieder durch Ersetzen der reellen Variablen  $t$  durch die komplexe Variable  $z$ . Die Spiegelung am Kreis hat dann die Gestalt

$$x = a + re^{iz} \mapsto x^* = a + re^{i\bar{z}}.$$

Die Auflösung nach  $z$  ergibt  $z = \frac{1}{i} \log\left(\frac{x-a}{r}\right)$  und damit die geschlossene Formel

$$x^* = a + \frac{r^2}{\bar{x} - \bar{a}} \quad \text{für } x \neq a.$$

Anzuwenden ist die Formel auf Punkte  $x$  mit  $0 < |x-a| < r$ . Dann ist  $|x^* - a| > r$ .

**Bemerkung.** Dabei wird das gesamte Innere auf das gesamte Äußere gespiegelt. Der Mittelpunkt  $a$  wird ins Unendliche gespiegelt.

**Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.  $\partial G$  enthält ein glattes analytisches Kurvenstück  $C$  als *freien Randbogen*, wenn es eine reell-analytische Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$  und Umgebungen  $U$  von  $[a, b]$  und  $W$  von  $C$  gibt, so dass die Fortsetzung  $\hat{\gamma} : U \rightarrow W$  biholomorph ist und  $\hat{\gamma}^{-1}(W \cap G)$  ganz in der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  liegt.

**3.2 Großer Spiegelungssatz.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.  $\partial G$  enthalte ein glattes, analytisches Kurvenstück  $C$  als freien Randbogen.  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph und stetig nach  $G \cup C$  fortsetzbar. Das Bild  $C' := f(C)$  sei ein glattes, analytisches Kurvenstück, das im Rand von  $G' = f(G)$  als freier Randbogen enthalten ist. Dann gibt es eine Umgebung  $W = W(C) \subset \mathbb{C}$  und eine holomorphe Fortsetzung  $\hat{f}$  von  $f$  nach  $G \cup W$ , so dass  $\hat{f}$  Punkte, die bezüglich  $C$  symmetrisch liegen, auf Punkte abbildet, die bezüglich  $C'$  symmetrisch liegen.

**BEWEIS:** Seien  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$  und  $\varrho : [c, d] \rightarrow C'$  die Parametrisierungen der freien Randbögen,  $\hat{\gamma} : U \rightarrow W$  und  $\hat{\varrho} : U' \rightarrow W'$  die biholomorphen Fortsetzungen. Dann ist  $F_+ := \hat{\varrho}^{-1} \circ f \circ \hat{\gamma} : U \cap \mathbb{H} \rightarrow U' \cap \mathbb{H}$  holomorph und besitzt eine reellwertige Fortsetzung auf  $U \cap \mathbb{R}$ .

Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip gibt es eine holomorphe Fortsetzung  $F$  (auf das gespiegelte Gebiet) mit  $F(z) = \overline{F_+(\bar{z})}$  für  $z$  in der unteren Halbebene.

Nun sei

$$\widehat{f}(z) := \widehat{\varrho} \circ F \circ \widehat{\gamma}^{-1}(z) \text{ für } z \in W.$$

Ist  $z \in W \cap G$ , so liegt  $\widehat{\gamma}^{-1}(z)$  in  $U \cap \mathbb{H}$ , und es ist

$$\widehat{f}(z) := \widehat{\varrho} \circ F_+ \circ \widehat{\gamma}^{-1}(z) = f(z).$$

Also ist  $\widehat{f}$  eine holomorphe Fortsetzung von  $f$ . Offensichtlich bildet  $\widehat{f}$  symmetrische Punkte auf symmetrische Punkte ab. ■

Wir suchen jetzt nach allgemeineren Kriterien, wann eine Fortsetzung über den Rand hinaus möglich ist.

**Definition.** Ein Punkt  $z_0$  im Rand eines Gebietes  $G$  heißt *einfach* oder *erreichbar*, falls zu jeder Folge  $(a_\nu) \in G$ , die gegen  $z_0$  konvergiert, eine stetige Kurve  $\gamma : [0, 1) \rightarrow G$  existiert, so dass gilt:

1.  $z_0$  ist der Endpunkt  $\gamma(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t)$ .
2. Es gibt eine monoton wachsende Folge  $(t_\nu) \in [0, 1)$  mit  $\gamma(t_\nu) = a_\nu$  und  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = 1$ .

Der folgende Satz charakterisiert die Situation auf andere Weise:

**3.3 Satz.** *Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $z_0 \in \partial G$  ein Randpunkt. Der Punkt  $z_0$  ist genau dann erreichbar, wenn es für jede Folge  $(z_\nu) \in G$ , die gegen  $z_0$  konvergiert, und für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\nu_0$  und genau eine Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $G \cap D_\varepsilon(z_0)$  gibt, so dass für  $\nu > \nu_0$  alle  $z_\nu$  in  $Z$  liegen.*

**BEWEIS:** Sei  $z_0$  erreichbar. Zu gegebener Folge  $(z_\nu) \subset G$ , die gegen  $z_0$  konvergiert sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  die stetige Kurve, die  $z_0$  über die  $z_\nu$  erreicht. Wegen der Stetigkeit von  $\gamma$  in  $t = 1$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $t_0 < 1$ , so dass die Menge

$$A_{t_0} := \gamma([t_0, 1))$$

ganz in  $D_\varepsilon(z_0)$  enthalten ist. Weil es aber eine Folge  $(t_\nu) \in [0, 1)$  mit  $t_\nu \rightarrow 1$  und  $\gamma(t_\nu) = z_\nu$  gibt, existiert ein  $\nu_0$ , so dass alle  $z_\nu$  in  $A_{t_0}$  liegen, für  $\nu > \nu_0$ . Aber  $A_{t_0}$  ist zusammenhängend, deshalb liegen alle  $z_\nu$  für  $\nu > \nu_0$  in der gleichen Zusammenhangskomponente von  $G \cap D_\varepsilon(z_0)$ .

Sei jetzt die Bedingung erfüllt, dass zu jeder Folge  $(z_\nu)$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\nu_0$  existiert, so dass alle  $z_\nu$  in der gleichen Zusammenhangskomponente von  $D_\varepsilon(z_0) \cap G$  liegen. Wir konstruieren den Weg  $\gamma$ :

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $N(n)$  so gewählt, dass für  $\nu \geq N(n)$  alle  $z_\nu$  in der gleichen Zusammenhangskomponente  $Z_n$  von  $G \cap D_{1/n}(z_0)$  liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $N(1) = 1$  und  $N(n+1) \geq N(n)$  ist. Sei  $\gamma_n : [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger Weg, der die Punkte  $z_{N(n)}, z_{N(n)+1}, \dots, z_{N(n+1)}$  in  $Z_n \subset G$  miteinander verbindet. Durch die Vorschrift

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_n(t) & \text{für } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}], \\ z_0 & \text{für } t = 1, \end{cases}$$

wird ein Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert, der offensichtlich auf  $[0, 1)$  stetig ist. Wegen  $|\gamma_n| \subset D_{1/n}(z_0)$  folgt:  $\text{dist}(\gamma(t), z_0) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 1$ . Also ist  $\gamma$  auch in  $t = 1$  stetig. Da  $t_n := 1 - \frac{1}{n}$  monoton wachsend und gegen 1 konvergent ist und  $\gamma$  die Punkte  $z_n = \gamma(t_n)$  verbindet, ist  $z_0$  erreichbar. ■

**3.4 Satz.** *Es seien  $G, G' \subset \mathbb{C}$  beschränkte Gebiete,  $f : G \rightarrow G'$  eine topologische Abbildung. Dann gilt :*

1. *Ist  $(z_n) \subset G$  eine Folge, deren Randabstand  $\text{dist}(z_n, \partial G)$  gegen Null konvergiert, dann gilt das auch für die Folge der Randabstände der Bilder  $f(z_n)$  zum Rand  $\partial G'$ .*
2. *Ist  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$  ein stetiger Weg mit  $\lim_{t \rightarrow 1} \text{dist}(\alpha(t), \partial G) = 0$ , ist auch  $\lim_{t \rightarrow 1} \text{dist}(f(\alpha(t)), \partial G') = 0$ .*

BEWEIS: Die Beweise laufen analog, wir zeigen nur die erste Aussage.

Es sei  $(z_n)$  eine Folge, deren Randabstand zu  $\partial G$  gegen Null konvergiert. Das ist genau dann erfüllt, wenn für jedes Kompaktum  $K \subset G$  ein  $n_0$  existiert, so dass für  $n \geq n_0$  alle  $z_n$  außerhalb von  $K$  liegen. Ist  $K' \subset G'$  kompakt, dann ist  $K := f^{-1}(K') \subset G$  kompakt, da  $f$  ein Homöomorphismus ist. Also existiert ein  $n_0$ , so dass  $z_n$  nicht in  $K$  liegt für alle  $n \geq n_0$ . Dann liegen aber auch die  $f(z_n)$  nicht in  $K'$  für alle  $n \geq n_0$ , d.h. die Randabstände von  $f(z_n)$  zu  $\partial G'$  gehen gegen Null. ■

**Bemerkung.** Abbildungen, deren Urbilder von Kompakta wieder kompakt sind, heißen *eigentliche Abbildungen*. Jede topologische Abbildung zwischen beschränkten Gebieten ist natürlich eigentlich, für beliebige stetige Abbildungen gilt das keineswegs.

**3.5 Satz von Caratheodory.** *Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  beschränkt und einfach zusammenhängend.  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  sei eine biholomorphe Abbildung. Dann gilt*

1. *Ist  $z_0 \in \partial G$  ein erreichbarer Randpunkt, so existiert*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G}} f(z) \in \partial \mathbb{D},$$

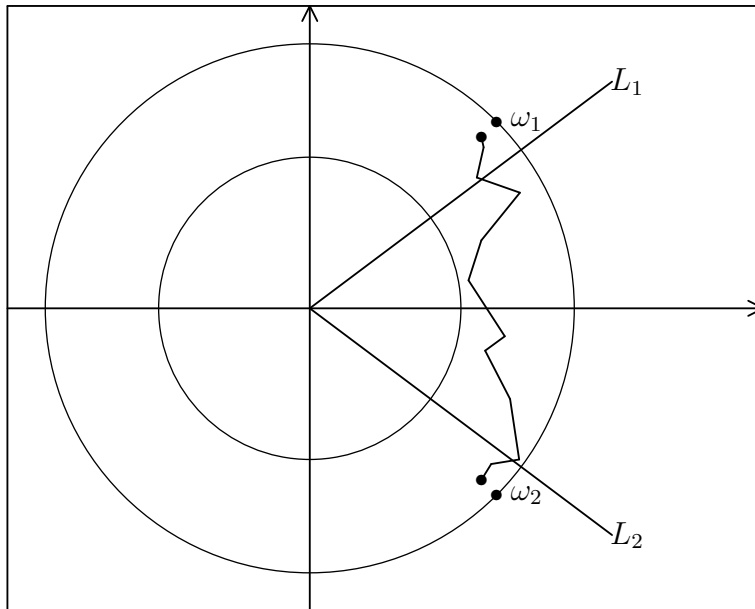
*das heißt:  $f$  lässt sich auf erreichbare Randpunkte stetig fortsetzen.*

2. *Sind  $z_1, z_2 \in \partial G$  erreichbare Randpunkte,  $z_1 \neq z_2$  und  $w_i = \lim_{z \rightarrow z_i} f(z)$ , so ist auch  $w_1 \neq w_2$ . Mit anderen Worten: Die Fortsetzung auf erreichbare Randpunkte von  $G$  bleibt injektiv.*

BEWEIS: 1) Angenommen, der Grenzwert existiert nicht. Da  $\overline{\mathbb{D}}$  kompakt ist, bedeutet das die Existenz einer Folge  $(z_n) \subset G$ , die gegen  $z_0$  konvergiert, so dass die Bilder  $f(z_n)$  nicht konvergieren, also ohne Einschränkung alternierend zwei Grenzwerte ansteuern:

$$\begin{aligned} f(z_{2n}) &\rightarrow w_1 \in \partial\mathbb{D}, \\ f(z_{2n+1}) &\rightarrow w_2 \neq w_1, \quad w_2 \in \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

Weil  $z_0$  erreichbar ist, existiert ein stetiger Weg  $\gamma$ , der  $z_0$  über die  $z_n$  erreicht, wobei  $(t_n)$  die zugehörige Folge von Parametern sei, so dass  $\gamma(t_n) = z_n$  ist. Wir definieren nun eine Folge von stetigen Wegstücken  $\gamma_n := \gamma|_{[t_{2n}, t_{2n+1}]}$  mit zugehörigen Kurvenstücken  $C_n := |\gamma_n|$  und den Bildern  $\tilde{C}_n := f(C_n) \subset \mathbb{D}$ . Ohne Einschränkung liegen die Bilder  $\tilde{C}_n$  außerhalb von  $D_{1-1/n}(0)$ , schließlich nähern sich die Punkte  $z_n$  immer mehr dem Rand von  $G$ .



Seien  $a_n = t_{2n}$  und  $b_n = t_{2n+1}$  die oben schon betrachteten Teilfolgen der Parameterfolge,  $\beta_n := f \circ \gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{D}$ . Dann ist  $\tilde{C}_n = \beta_n([a_n, b_n])$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegen die Punkte  $w_1$  und  $w_2$  symmetrisch zur reellen Achse,  $w_1$  in der oberen Halbebene (sonst müssen wir  $f$  noch mit einer Drehung verketten).

Sei jetzt  $M \in \mathbb{N}$  so groß, dass der zu  $\mathbb{R}$  symmetrische Sektor mit Öffnungswinkel  $2\pi/M$  weder  $w_1$  noch  $w_2$  enthält. Dann treffen die beiden den Sektor begrenzenden Strahlen  $L_1$  und  $L_2$  die Mengen  $\tilde{C}_n$ , jedenfalls für großes  $n$ .

Es sei  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$h(w) := f^{-1}(w) - z_0.$$

Dann ist  $h$  eine holomorphe, beschränkte Funktion (weil  $G$  beschränkt ist). Wir definieren die Zahlen

$$r_n := \sup\{|h(w)| : w \in \tilde{C}_n\} = \sup\{|z - z_0| : z \in C_n\}.$$

Da  $\text{dist}(C_n, z_0)$  gegen Null konvergiert, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ .

Aus dem nachfolgenden Lemma folgt nun, dass  $h(z) \equiv 0$  und damit  $f^{-1}(w) \equiv z_0$  ist. Das ist ein Widerspruch,  $f$  ist nach  $z_0$  fortsetzbar.

2) Es fehlt noch die Injektivität der Fortsetzung: Seien dazu  $z_1 \neq z_2$  erreichbare Randpunkte von  $G$ ,  $w_i := f(z_i)$  die Bilder, wobei wir die Fortsetzung wieder  $f$  genannt haben. Angenommen,  $w_1 = w_2 = -1$  (ohne Beschränkung der Allgemeinheit; sonst verkette  $f$  mit einer entsprechenden Drehung).  $g : \mathbb{D} \rightarrow G$  bezeichne die Umkehrabbildung von  $f$ .  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  seien stetige Kurven mit  $\gamma_i([0, 1)) \subset G$  und  $\gamma_i(1) = z_i$ . Da die Kurven stetig sind und auf verschiedene Punkte zulaufen, existiert ein  $t_0 \in (0, 1)$ , so dass

$$|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)| > K := \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \quad \text{für } t_0 < t_1, t_2 < 1.$$

Es seien  $\beta_i := f \circ \gamma_i : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  die induzierten stetigen Wege. Für die gilt natürlich  $\beta_i([0, 1)) \subset \mathbb{D}$  und  $\beta_1(1) = \beta_2(1) = -1$ .

Wählen wir  $\delta$  genügend klein, so liegen die Kurvenstücke  $\beta_i([0, t_0])$  außerhalb von  $D_\delta(-1)$ . Mit  $A_\delta$  bezeichnen wir den Abschluss des Schnittes von  $\mathbb{D}$  und  $D_\delta(-1)$ :

$$A_\delta = \overline{\mathbb{D} \cap D_\delta(-1)} = \{w = -1 + re^{it} : 0 \leq r \leq \delta; -\varphi(r) \leq t \leq \varphi(r)\},$$

wobei  $\varphi : [0, \delta] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$  jedem Radius den passenden Winkel zuordnet. Wir bestimmen das Lebesgue-Maß der Bildmenge  $g(A_\delta)$ , um einen Widerspruch zur Beschränktheit von  $G$  zu erhalten:

$$\begin{aligned} \mu(g(A_\delta)) &= \int_{g(A_\delta)} dx dy = \int_{A_\delta} |\det J_g(u, v)| du dv \\ &= \int_{A_\delta} |g'(u, v)|^2 du dv = \int_0^\delta \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{it})|^2 \cdot r dt dr. \end{aligned}$$

Ist  $0 < r < \delta$ , so gibt es Punkte  $u_i \in \partial D_r(-1) \cap \beta_i([t_0, 1])$  mit zugehörigen Urbildern  $t_1$  bzw.  $t_2$  von  $\beta_1$  bzw.  $\beta_2$ . Dafür gilt dann

$$|g(u_1) - g(u_2)| = |g(\beta_1(t_1)) - g(\beta_2(t_2))| = |\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)| > K.$$

Andersherum aufgeschrieben schätzen wir damit einen Teil des Integrals von unten ab:

$$K < |g(u_1) - g(u_2)| = \left| \int_{u_1}^{u_2} g'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{it})| \cdot r dt,$$



$$\text{bzw.} \quad \frac{K}{r} \leq \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{it})| dt.$$

Jetzt findet die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung Anwendung und liefert :

$$\frac{K^2}{r^2} \leq \left( \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{it})| dt \right)^2 \leq \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{it})|^2 dt \cdot \underbrace{\int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} dt}_{\leq \pi}.$$

Als entscheidende Abschätzung haben wir damit gewonnen :

$$\frac{K^2}{\pi r^2} \leq \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{it})|^2 dt.$$

Setzen wir das Ergebnis in die Berechnung von  $\mu(g(A_\delta))$  ein, so folgt:

$$\mu(g(A_\delta)) \geq \frac{K^2}{\pi} \int_0^\delta \frac{1}{r} dr = \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch, da  $G$  beschränkt ist, aber  $g(A_\delta)$  darin enthalten ist. ■

**3.6 Lemma (Verallgemeinertes Maximumprinzip).** *Es seien  $L_1, L_2$  zwei vom Nullpunkt ausgehende Strahlen, symmetrisch zur  $x$ -Achse, die einen Winkel der Größe  $2\pi/M$  einschließen. Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gebe es eine Kurve  $\beta_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{D}$ , so dass für die Spuren  $\tilde{C}_n = |\beta_n|$  gilt:*

1.  $\tilde{C}_n \subset \mathbb{D} \setminus D_{1/n}(0)$ .
2. Es gibt Punkte  $p_n \in \tilde{C}_n \cap L_1$  und  $q_n \in \tilde{C}_n \cap L_2$ .

*Ist  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte holomorphe Funktion, so dass die Zahlen  $r_n := \sup\{|h(w)| : w \in \tilde{C}_n\}$  eine Nullfolge bilden, so ist  $h(z) \equiv 0$ .*

**BEWEIS:** Vorbemerkung: Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $h(0) \neq 0$  ist. Ist nämlich  $h(0) = 0$ , aber  $h$  nicht identisch Null, so hat  $h$  eine lokale Normalenform

$$h(z) = z^k \cdot \tilde{h}(z) \quad \text{mit } k \geq 1 \text{ und } \tilde{h}(0) \neq 0,$$

wobei  $\tilde{h}$  ansonsten die gleichen Eigenschaften wie  $h$  hat.

Zu  $n \in \mathbb{N}$  seien  $u_n < v_n$  so aus  $[a_n, b_n]$  gewählt, dass

- $u_n$  der größte Parameter  $s$  ist, so dass  $\beta_n(s)$  in  $L_1$  liegt,

- $v_n$  der kleinste Parameter  $s > u_n$  ist, so dass  $\beta_n(s) \in \mathbb{R}$  ist.

Spiegeln wir  $\beta_n([u_n, v_n])$  an  $\mathbb{R}$ , dann erhalten wir ein stetiges Kurvenstück  $S_n^{(0)}$ , das  $\beta_n(u_n)$  mit  $\overline{\beta_n(u_n)}$  verbindet. Ist  $T$  die Drehung um  $\frac{2\pi}{M}$ , so setzen wir  $S_n^{(k)} := T^k(S_n^{(0)})$ . Die Vereinigung der  $S_n^{(k)}$  ergibt eine geschlossene Kurve  $S_n$  in  $\mathbb{D}$ , die ganz in

$$\{w \in \mathbb{D} : 1 - \frac{1}{n} < |w| < 1\}$$

enthalten ist. Wir definieren weiterhin

$$h^*(w) := h(w) \cdot \overline{h(\overline{w})} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

$$\text{und } H(w) := h^*(w) \cdot h^*(Tw) \cdots h^*(T^{M-1}w) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}).$$

Wir bemerken, dass  $H$  zwar von dem Winkel  $\frac{2\pi}{M}$  abhängt, jedoch nicht von  $n$  oder den Kurven  $C_n$ .

$|h(w)|$  ist nach Voraussetzung durch eine Konstante  $B > 0$  beschränkt. Deshalb ist jeder Faktor von  $H$  beschränkt durch  $B^2$ . Liegt ein Punkt  $w$  in  $S_n$ , so liegt  $T^k w$  in  $S_n^{(0)}$  für ein geeignetes  $k$ , und es ist dann

$$|h^*(T^k w)| \leq r_n \cdot B.$$

Deshalb gilt:

$$|H(w)| \leq (B^2)^{M-1} \cdot r_n \cdot B = r_n \cdot B^{2M-1}$$

auf  $S_n$ , wobei für jedes  $h^*$  ein  $B^2$  in die Abschätzung einging; in einem Fall liegt aber  $T^k w$  im Sektor  $S_n^{(0)}$ , und deshalb ist  $|h(T^k w)|$  nach oben abschätzbar durch  $r_n$ . Sei jetzt  $U_n$  die Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{D} \setminus S_n$ , in der die Null enthalten ist. Wegen des Maximumprinzips muss

$$|H(0)| \leq \sup\{|H(z)| : z \in \partial U_n\} \leq B^{2M-1} \cdot r_n$$

gelten, aber für  $n \rightarrow \infty$  geht die rechte Seite gegen Null. Also ist  $H(0)$  gleich Null. Weil  $H(0) = |h(0)|^{2M}$  ist, muss  $h(z) \equiv 0$  sein. ■

**3.7 Folgerung 1.** *Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  beschränkt und einfach zusammenhängend, so dass jeder Randpunkt erreichbar ist. Dann hat jede biholomorphe Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  eine topologische Fortsetzung  $\hat{f} : \overline{G} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ .*

**BEWEIS:** Nach Caratheodory kann  $f$  auf den Rand von  $G$  fortgesetzt werden. Zeigen wir zuerst die Stetigkeit in Randpunkten:

Sei  $(z_n) \subset \overline{G}$  eine Folge, die gegen einen Punkt  $z_0$  im Rand  $\partial G$  konvergiert. Wir gehen zu einer Folge  $(z'_n) \subset G$  über :

- Ist  $z_n \in G$ , dann setze  $z'_n := z_n$ .

- Ist  $z_n \in \partial G$ , dann wähle  $z'_n$  aus  $G$  so, dass sowohl  $|z'_n - z_n| \leq \frac{1}{n}$  als auch  $|\widehat{f}(z'_n) - \widehat{f}(z_n)| \leq \frac{1}{n}$  erfüllt ist.

Die Folge  $(z'_n)$  liegt dann ganz in  $G$  und konvergiert auch gegen  $z_0$ . Außerdem konvergiert die Folge  $\widehat{f}(z'_n)$  gegen  $\widehat{f}(z_0)$ , da die Folge  $(z'_n)$  in  $G$  liegt. Die Folge  $f(z_n)$  konvergiert aber gegen den gleichen Wert (wie man leicht mittels Dreiecksungleichung zeigen kann), also ist  $\widehat{f}$  in  $z_0$  stetig.

Die Injektivität von  $\widehat{f}$  erhalten wir durch eine Fallunterscheidung:

1.  $\widehat{f}|_G = f$  ist natürlich injektiv auf  $G$ , schließlich ist  $f$  ja biholomorph.
2.  $\widehat{f}$  ist auch injektiv auf  $\partial G$  – das war der zweite Teil der Aussage des Satzes von Caratheodory.
3. Weil  $\widehat{f}$  das Gebietsinnere ins Innere des Einheitskreises und den Rand auf den Rand abbildet, ist  $\widehat{f}$  insgesamt injektiv.

Die Surjektivität folgt noch schneller:  $\widehat{f}(\overline{G})$  ist kompakt, insbesondere abgeschlossen, und wegen  $\mathbb{D} \subset \widehat{f}(\overline{G}) \subset \overline{\mathbb{D}}$  kann kein Punkt aus dem Rand fehlen.

Als letztes bleibt die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu zeigen. Das lösen wir mit dem folgenden allgemeinen Lemma. ■

**3.8 Lemma.** *Es seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige, bijektive Abbildung. Weiterhin sei  $X$  ein kompakter Raum und  $Y$  habe die Hausdorff-Eigenschaft. Dann ist  $f$  topologisch.*

BEWEIS: Es bezeichne  $g := f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Die Stetigkeit von  $g$  ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass für jede offene Menge  $U \subset X$  das Urbild  $g^{-1}(U) \subset Y$  offen ist, oder äquivalenterweise damit, dass für jede abgeschlossene Menge  $A \subset X$  das Urbild  $g^{-1}(A) \subset Y$  abgeschlossen ist. Aber wenn  $A \subset X$  abgeschlossen ist, dann ist auch  $A$  kompakt, da der ganze Raum  $X$  kompakt ist. Deshalb ist auch das stetige Bild  $f(A)$  kompakt, und das bedeutet  $f(A) = g^{-1}(A) \subset Y$  ist abgeschlossen. ■

Das Ergebnis ist direkt auf den Beweis des vorigen Satzes anwendbar, da  $\overline{\mathbb{D}}$  kompakt ist.

**3.9 Folgerung 2.** *Sei  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $G \neq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $C$  ein analytisches Kurvenstück, das ein freier Randbogen von  $G$  ist. Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  eine biholomorphe Abbildung, so lässt sich  $f$  über  $C$  hinaus holomorph fortsetzen.*

BEWEIS: Aus dem Beweis zum Riemannsches Abbildungssatz entnehmen wir die Existenz einer biholomorphen Abbildung  $T \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ , so dass  $G' := T(G)$  beschränkt ist.  $C' := T(C)$  ist dann ein freier analytischer Randbogen von  $G'$ . Die Abbildung  $g := f \circ T^{-1} : G' \rightarrow \mathbb{D}$  ist biholomorph, deshalb kann  $g$  zu einer stetigen

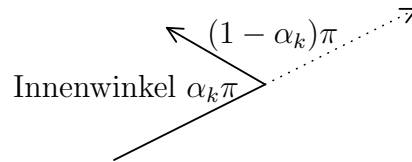
Abbildung  $\widehat{g} : G' \cup C' \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  fortgesetzt werden, wobei  $K := \widehat{g}(C') \subset \partial\mathbb{D}$  wieder analytischer freier Randbogen ist. Deshalb ist der Spiegelungssatz anwendbar, d.h.  $\widehat{g}$  kann über  $C'$  hinaus fortgesetzt werden.  $F := \widehat{g} \circ T$  setzt dann  $f$  fort. ■

Als nächstes wollen wir uns mit einer bestimmten Klasse von Gebieten beschäftigen, und dort, anders als beim Riemannschen Abbildungssatz, eine biholomorphe Abbildung in den Einheitskreis konkret berechnen. Dabei werden wir insbesondere das Spiegelungsprinzip anwenden.

**Definition.** Ein *Polygongebiet* ist ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet  $G$ , zusammen mit einer Menge  $\{w_1, \dots, w_n\} \subset \partial G$  (den *Ecken*), so dass sich der Rand  $\partial G$  aus den Strecken  $S_k = \overline{w_k w_{k+1}}$  (den *Seiten*) zusammensetzt und insbesondere  $w_{n+1} = w_1$  ist. Außerhalb der Ecken seien die  $S_k$  freie Randbögen von  $G$ , die Ecken seien alle erreichbar. Zusätzlich wollen wir fordern, dass die  $S_k$  so orientiert sind, dass  $G$  positiv berandet ist, dass sich also das Gebiet beim Durchlaufen des Randes immer auf der linken Seite befindet.

Die Innenwinkel bei  $w_k$  schreiben wir in der Form  $\alpha_k \pi$  mit  $\alpha_k \in (0, 2)$ .

Ist der Innenwinkel  $\alpha_k \pi$  gegeben, dann entspricht die Richtungsänderung beim Durchlaufen der Ecke genau  $+(1 - \alpha_k)\pi$ .



Dabei ist es egal, ob ein spitzer oder stumpfer Winkel vorliegt (Richtungswechsel nach links) oder ein überstumpfer Winkel (Richtungswechsel nach rechts). Weil das Gebiet genau einmal umlaufen wird, ist die Summe der Richtungsänderungen genau  $2\pi$ , d.h.

$$2\pi = \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k)\pi \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2.$$

Wir untersuchen jetzt die Eigenschaften einer biholomorphen Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{H}$ . Oben hatten wir angekündigt, eine biholomorphe Abbildung in den Einheitskreis zu konstruieren, aber wir können  $G$  auch in die obere Halbebene biholomorph abbilden, denn diese ist biholomorph äquivalent zum Einheitskreis, und eine passende Transformation dafür hatten wir schon gefunden. Sei also  $f$  wie oben gegeben – die Existenz folgt aus dem Riemannschen Abbildungssatz. Mit  $F := f^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow G$  bezeichnen wir die Umkehrabbildung. Nach unserer letzten Folgerung lässt sich  $F$  topologisch auf den Rand fortsetzen zu einer Abbildung  $\overline{F} : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{G}$ . Die Ableitung  $F' : \mathbb{H} \rightarrow G$  ist holomorph und ohne Nullstellen, denn sonst wäre  $F$  nicht umkehrbar. Also besitzt  $F'$  einen Logarithmus, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $\exp(g) = F'$  gilt. Die Ableitung von  $g$ ,

$$g'(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C},$$

ist holomorph. Mit  $\varrho_k$  seien die Bilder der Ecken  $f(w_k)$  bezeichnet. Die  $\varrho_k$  sind alle reell, deshalb ist  $I_k := \overline{\varrho_k \varrho_{k+1}}$  ein Intervall, nämlich genau das Urbild einer Polygonseite:  $S_k = F(I_k)$ .

Nach dem Spiegelungsprinzip kann  $F$  über  $\overset{\circ}{I}_k$  hinaus holomorph fortgesetzt werden. Dabei ist die Ableitung  $F'(z) \neq 0$  für alle  $z \in \overset{\circ}{I}_k$ , da auch die Fortsetzung umkehrbar ist. Deshalb kann  $F|_{\overset{\circ}{I}_k}$  auch als glatte Kurve geschrieben werden: es gibt  $a_0, v_0 \in \mathbb{C}$  und eine stetig-differenzierbare Funktion  $\varphi_k : \overset{\circ}{I}_k \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$F(t) = a_0 + \varphi_k(t) \cdot v_0 \text{ für } t \in \overset{\circ}{I}_k.$$

Dann ist die Ableitung von  $F$  in  $t_0 \in \overset{\circ}{I}_k$  gegeben durch

$$F'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \varphi'_k(t_0) \cdot v_0.$$

Also ist das Argument der Ableitung konstant auf  $\overset{\circ}{I}_k$ . Aber das Argument einer komplexen Zahl  $z$  ist gleich dem Imaginärteil des Logarithmus von  $z$ , also ist  $\text{Im}(\log(F'))$  konstant auf  $\overset{\circ}{I}_k$ . Das bedeutet, dass  $g' = F''/F' = (\log F)'$  reellwertig auf  $\overset{\circ}{I}_k$  ist. Wenn wir nun das Schwarzsche Spiegelungs-Prinzip anwenden, dann klappt das überall, nur nicht in den Bildpunkten der Polygonecken. Immerhin kann  $g' = (\log F)'$  zu einer holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{\varrho_1, \dots, \varrho_n\}$  fortgesetzt werden.

**Behauptung:**  $g'$  hat in den Punkten  $\varrho_k \in \mathbb{R}$  Polstellen erster Ordnung. Außerdem verschwindet  $g'$  im Unendlichen.

Zum BEWEIS betrachten wir Kreisscheiben  $D_\varepsilon(\varrho_k)$  so, dass  $g'$  dort holomorph bis auf eine isolierte Singularität in  $\varrho_k$  ist. Die Abbildung  $\tilde{F}(z) := F(z) - w_k$  ist holomorph in  $D_\varepsilon(\varrho_k) \cap \mathbb{H}$  und stetig auf der reellen Achse, und in  $\varrho_k$  hat sie eine Nullstelle. Weil  $\tilde{F}$  biholomorph ist, ist das Bild  $\tilde{F}(D_\varepsilon(\varrho_k) \cap \mathbb{H})$  einfach zusammenhängend in  $\mathbb{C}^*$ .

Wir wissen noch mehr über diese Menge: Es handelt sich um ein Stück vom Polygongebiet, wobei die Ecke  $w_k$  mit dem Winkel  $\alpha_k$  nach Null verschoben ist. Deshalb existiert die holomorphe Funktion

$$h(z) := (F(z) - w_k)^{1/\alpha_k}$$

auf  $D_\varepsilon(\varrho_k) \cap \mathbb{H}$  und klappt den Winkel zu einem gestreckten Winkel auf. Wie  $F$  kann auch  $h$  auf die Seiten stetig fortgesetzt werden, d.h.  $h$  ist auch auf  $D_\varepsilon(\varrho_k) \cap \mathbb{R}$  definiert und hat natürlich die Nullstelle in  $\varrho_k$ . Das Spiegelungsprinzip setzt  $h$  fort zu einer holomorphen Abbildung

$$\tilde{h} : D_\varepsilon(\varrho_k) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Diese wird nun auf  $D_\varepsilon(\varrho_k)$  in eine Potenzreihe entwickelt:

$$\tilde{h}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - \varrho_k)^\nu.$$

Auf  $D_\varepsilon(\varrho_k)$  ist  $\tilde{h}$  injektiv, da  $h$  vor dem Spiegeln auch injektiv war. Deshalb verschwindet die erste Ableitung nicht in  $\varrho_k$ , und der Koeffizient  $a_1$  ist ungleich Null. Also hat  $\tilde{h}$  die folgende lokale Normalform:

$$\tilde{h}(z) = a_1(z - \varrho_k) \cdot \tilde{g}(z) \text{ mit } \tilde{g}(z) = 1 + \frac{a_2}{a_1}(z - \varrho_k) + \dots$$

Diese Darstellung wollen wir so weit wie möglich auf  $g'$  übertragen. Es ist

$$F(z) - w_k = \tilde{h}^{\alpha_k}(z) = a_1^{\alpha_k} (z - \varrho_k)^{\alpha_k} \cdot \tilde{g}(z)^{\alpha_k}$$

$$\text{und } F'(z) = (z - \varrho_k)^{\alpha_k - 1} [\alpha_k a_1^{\alpha_k} \tilde{g}(z)^{\alpha_k} + a_1^{\alpha_k} (z - \varrho_k) (\tilde{g}^{\alpha_k})'(z)].$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir die eckige Klammer mit  $g^*$ . Das ist eine holomorphe Funktion, die in  $\varrho_k$  den Wert  $\alpha_k a_1^{\alpha_k} \neq 0$  annimmt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} F''(z) &= (\alpha_k - 1)(z - \varrho_k)^{\alpha_k - 2} \left[ g^*(z) + \frac{z - \varrho_k}{\alpha_k - 1} (g^*)'(z) \right] \\ &= (\alpha_k - 1)(z - \varrho_k)^{\alpha_k - 2} \cdot k(z), \end{aligned}$$

wenn  $k(z)$  wiederum für die eckige Klammer steht. In der „Ecke“  $\varrho_k$  nimmt auch  $k(z)$  den Wert  $\alpha_k a_1^{\alpha_k} \neq 0$  an. Die Ableitung  $g'$  hat dann das Aussehen

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{F''(z)}{F'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)(z - \varrho_k)^{\alpha_k - 2} \cdot k(z)}{(z - \varrho_k)^{\alpha_k - 1} \cdot g^*(z)} \\ &= \frac{\alpha_k - 1}{z - \varrho_k} \cdot r(z), \end{aligned}$$

wobei  $r(z) = k(z)/g^*(z)$  holomorph ist, und in  $z = \varrho_k$  den Wert Eins annimmt. Damit hat  $g'$  in  $\varrho_k$  die angekündigte Polstelle erster Ordnung mit Residuum  $\alpha_k - 1$ .

Das Bild einer Ecke muss Unendlich sein, ohne Einschränkung sei  $\varrho_1 = \infty$ , dann ist die Differenz

$$g'(z) - \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - \varrho_k}$$

eine auf  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion, wobei der Grenzwert des hinteren Summanden für  $z \rightarrow \infty$  gegen Null geht. In der Nähe von  $\varrho_1$  ist  $F(z) - w_1 = h(z)^{\alpha_1}$ , wobei  $h(\infty) = 0$  ist. Wir transportieren alles von Unendlich nach Null mit

$$h_0(z) := h\left(\frac{1}{z}\right),$$

dann ist  $h_0(0) = 0$ . Weil  $h_0$  lokal injektiv ist, ist

$$h_0(z) = z \cdot g_0(z) \text{ mit } g_0(0) \neq 0.$$

Einsetzen in  $F$  ergibt

$$F(z) = w_1 + h(z)^{\alpha_1} = w_1 + h_0\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1} = w_1 + \frac{1}{z^{\alpha_1}} \cdot \tilde{g}(z),$$

wobei  $\tilde{g}(z) = g_0(1/z)^{\alpha_1}$  holomorph ist und in  $\infty$  nicht verschwindet. Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\alpha_1 z^{-\alpha_1-1} \cdot \tilde{g}(z) + z^{-\alpha_1} \cdot \tilde{g}'(z) \\ &= z^{-\alpha_1-1} [-\alpha_1 \tilde{g}(z) + z \cdot \tilde{g}'(z)] \\ &= z^{-\alpha_1-1} \cdot g^*(z), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} g^*(z) &= -\alpha_1 \cdot g_0\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1} + z \cdot \alpha_1 \cdot g_0\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1-1} \cdot \left(\frac{-1}{z^2}\right) \\ &= -\alpha_1 \cdot g_0\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{z} \cdot g_0\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1-1}. \end{aligned}$$

Dann ist  $g^*(\infty) = -\alpha_1 g_0(0)^{\alpha_1} \neq 0$ . Weiter folgt:

$$F''(z) = z^{-\alpha_1-2} [(-\alpha_1 - 1)g^*(z) + z \cdot (g^*)'(z)],$$

also

$$g'(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)} = \frac{-\alpha_1 - 1}{z} + \frac{(g^*)'(z)}{g^*(z)}.$$

Die rechte Seite strebt für  $z$  gegen Unendlich gegen Null, denn  $(g^*)'/g^*$  ist nahe  $\infty$  holomorph. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Jetzt folgt aber, dass

$$g'(z) - \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - \varrho_k}$$

eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist, die in einer Umgebung von Unendlich beschränkt ist. Also ist sie auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen des Grenzwertes in Unendlich ist sie  $\equiv 0$ .

Damit wollen wir nun rückwärts auf das Aussehen von  $F$  schließen:

$$g'(z) = (\log F')'(z) = \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - \varrho_k} = \left( \log \prod_{k=2}^n (z - \varrho_k)^{\alpha_k - 1} \right)',$$

und das ergibt

$$F'(z) = C \cdot \prod_{k=2}^n (z - \varrho_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Damit haben wir folgendes Ergebnis bewiesen :

**3.10 Formel von Schwarz-Christoffel.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Polygonebiet mit den Ecken  $\{w_1, \dots, w_n\}$  und den Innenwinkeln  $\alpha_k \pi$  für  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Außerdem sei  $\varrho_2, \dots, \varrho_n$  eine streng monotone Folge reeller Zahlen. Dann gibt es komplexe Zahlen  $A, B$ , so dass die Funktion

$$F(z) := A \int_0^z \prod_{k=2}^n (\zeta - \varrho_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + B$$

die obere Halbebene so biholomorph auf  $G$  abbildet, dass zusätzlich Unendlich auf die Ecke  $w_1$  und jeweils  $\varrho_k$  auf die Ecke  $w_k$  abgebildet wird.

### Beispiele.

1. Es sei  $G$  ein Dreieck mit den Ecken  $a, b$  und  $c$ , wobei wir annehmen, dass die Ecke  $a$  der Nullpunkt ist. Als reelle Zahlen wählen wir die Null für Ecke  $a$  und die Eins für Ecke  $b$ . Das Urbild von der Ecke  $c$  wird Unendlich sein. Der Ansatz ist nun

$$F(z) = A \int_0^z \zeta^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\zeta - 1)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} d\zeta + B,$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Innenwinkel an den Ecken  $a$  und  $b$  sind. Wir bestimmen die Konstanten  $A$  und  $B$ : Setzen wir  $z = 0$  ein, so verschwindet das Integral.  $F(0)$  ist aber per Konstruktion die Ecke  $a = 0$ , also ist  $B = 0$ . Das Bild  $F(1)$  ist die Ecke  $b$ , also können wir nach  $A$  auflösen:

$$A = b \cdot \left( \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (x - 1)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} dx \right)^{-1}.$$

Das reelle Integral lässt sich mit Hilfe der  $\Gamma$ -Funktion lösen, was wir aber nicht durchführen wollen.

2. Sei  $G$  nun ein Rechteck. Wir legen es so, dass die eine Seite auf der reellen Achse liegt und je zwei Ecken symmetrisch zur imaginären Achse sind, d.h. die Ecken sind

$$\left\{ -\frac{a}{2} + bi, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} + bi \right\}.$$

Diesmal wollen wir für jede Ecke einen reellen Punkt wählen. Unendlich wird dann auf einen Punkt auf der Seite zwischen erster und letzter Ecke abgebildet. Sei  $k$  eine reelle Zahl größer Eins. Dann sollen die reellen Werte  $-k, -1, 1, k$  in gleicher Reihenfolge Urbilder der Ecken sein.

Die Winkel sind alle rechte Winkel, d.h. es ist  $\alpha_k = 1/2$  für alle Ecken. Damit ergibt sich für  $F$ :



$$F(z) = A \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^2-\zeta^2)}} d\zeta.$$

Das Integral ist ein „elliptisches Integral“, das nicht elementar berechenbar ist. Nehmen wir allerdings die Umkehrabbildung  $f := F^{-1}$ , so bildet diese das Rechteck nach  $\mathbb{H}$  ab. Dann kann  $f$  mit dem Spiegelungsprinzip zunächst auf ein benachbartes Rechteck, dann Schritt für Schritt auf ganz  $\mathbb{C}$  ohne ein Eckengitter fortgesetzt werden. Die fortgesetzte Funktion wird dabei doppelperiodisch. Man spricht dann auch von einer *elliptischen Funktion*.