§ 2 Holomorphe Fortsetzung

Für eine letzte Charakterisierung der einfach-zusammenhängenden Gebiete sind ein paar topologische Vorbereitungen nötig.

Definition. Es seien $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt $z_0 = \alpha(0) = \beta(0)$ und gleichem Endpunkt $z_1 = \alpha(1) = \beta(1)$. Eine *Homotopie (mit festem Anfangs- und Endpunkt)* zwischen α und β ist eine stetige Abbildung $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, für die gilt:

1. $\Phi(t,0) = \alpha(t)$ und $\Phi(t,1) = \beta(t)$.

2. $\Phi(0,s) = z_0$ und $\Phi(1,s) = z_1$.

Zur Abkürzung wird $\Phi_s(t)$ für $\Phi(t,s)$ geschrieben. $\Phi_s(t)$ ist dann ein gewöhnlicher stetiger Weg von z_0 nach z_1, speziell ist $\Phi_0 = \alpha$ und $\Phi_1 = \beta$.

Zwei Wege heißen *homotop* in G (in Zeichen: $\alpha \simeq \beta$), falls es eine Homotopie zwischen α und β gibt. Ein geschlossener Weg α in G mit $z_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$ heißt *nullhomotop* in G, falls α in G homotop zum konstanten Weg $c(t) \equiv z_0$ ist.

2.1 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ konvex oder homöomorphes Bild einer konvexen Menge, so ist jeder geschlossene Weg in G nullhomotop in G.*

Beweis: Es sei G konvex, $\alpha : [0,1] \to G$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt z_0. Definieren wir

$$\Phi(t,s) := s \cdot z_0 + (1-s) \cdot \alpha(t) \quad \text{auf } [0,1] \times [0,1],$$

so ist Φ stetig, und wegen der Konvexität liegt das Bild von Φ in G. Alle Wege Φ_s haben als Anfangs- und Endpunkte den Punkt z_0. Außerdem ist $\Phi_0 = \alpha$ und $\Phi_1(t) \equiv z_0$, also α nullhomotop in G.

Ist G homöomorphes Bild eines konvexen Gebietes, dann kann der Weg α mittels Umkehrabbildung dorthin transportiert werden. Die Konstruktion der Homotopie lässt sich dann ganz einfach übertragen. ∎

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg. Eine *Kreiskette* längs α besteht aus einer Zerlegung des Defintionsintervalls

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n$ mit $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$.

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\alpha : [a,b] \to G$ ein stetiger Weg, so gibt es eine Kreiskette $\{D_1, \ldots, D_n\}$ längs α mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i \subset G$ für $i = 1, \ldots, n$. Das sieht man so: Da $C := \alpha([a,b])$ kompakt ist, gibt es ein $r > 0$, so dass für jeden Punkt $z \in C$ die Kreisscheibe $D_r(z)$ ganz in G enthalten ist. Und weil α gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|\alpha(t) - \alpha(t')| < r$ für alle t, t' mit $|t - t'| < \delta$ gilt. Zerlegt man nun $[a, b]$ in n gleiche Teile, so dass $(b - a)/n < \delta$ ist, so kann man $z_n := \alpha(t_n)$ setzen. Dann ist $|\alpha(t) - z_i| < r$ für $|t - t_i| \leq (b - a)/n < \delta$, also $\alpha(t) \in D_r(z_i)$ für $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$.

Ist jetzt $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so existiert auf jeder Kreisscheibe D_i eine Stammfunktion F_i von f. Wir können deshalb definiere:

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{n} (F_i(\alpha(t_i)) - F_i(\alpha(t_{i-1})).$$

Bemerkungen.

1. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Kreiskette bzw. von der Wahl der Stammfunktionen. Geht man nämlich von F_i zu einer anderen Stammfunktion $\widetilde{F}_i$ über, so ist $\widetilde{F}_i = F_i + C_i$, mit einer Konstanten C_i. Diese Konstanten fallen in der Summe wieder weg. Man kann sie also so wählen, dass $F_i = F_{i+1}$ auf $D_i \cap D_{i+1}$ ist. Aber dann folgt aus dem Identitätssatz, dass die Funktion F_n durch F_0 eindeutig bestimmt und das Integral von der Kreiskette unabhängig ist.

2. Falls α stückweise stetig-differenzierbar ist, stimmt der neue Integralbegriff mit dem schon vorhandenen überein.

Die Verallgemeinerung des Wegintegrals auf Ketten stetiger Wege erfolgt wie gewohnt :

Ist $\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \alpha_i$ mit stetigen Wegen α_i und natürlichen Zahlen n_i, so definieren wir:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \int_{\alpha_i} f(z)\, dz.$$

2.2 Satz. *Sind die Wege α, β in G homotop zueinander, so ist $\int\limits_{\alpha} f(z)\, dz = \int\limits_{\beta} f(z)\, dz$ für jede holomorphe Funktion f auf G.*

BEWEIS: Es sei $z_0 := \alpha(0) = \beta(0)$ der Anfangspunkt, $z_n := \alpha(1) = \beta(1)$ der Endpunkt. Weiter sei Φ die Homotopie, $s_0 \in [0, 1]$ und $\{D_1, \ldots, D_n\}$ eine Kreiskette längs $\gamma_0 := \Phi_{s_0}$ (zur Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$) in G. Dann ist $\Phi(t, s_0) \in D_i$ für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Ist s nahe bei s_0, so verläuft auch noch $\gamma := \Phi_s$ im Innern der Kreiskette, und man kann eine Zerlegung $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = 1$ finden, so dass $\Phi(t, s) \in D_i$ ist, für $u_{i-1} \leq t \leq u_i$.

Nun sei F_i eine Stammfunktion von f in D_i. Auf $D_i \cap D_{i+1}$ ist $c_i := F_{i+1} - F_i$ konstant. Daher ist

$$F_{i+1}(\gamma(u_i)) - F_{i+1}(\gamma_0(t_i)) = F_i(\gamma(u_i)) - F_i(\gamma_0(t_i))$$

für $i = 1, \ldots, n-1$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \ &= \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big[F_i(\gamma(u_i)) - F_i(\gamma(u_{i-1}))\big] - \sum_{i=1}^{n} \big[F_i(\gamma_0(t_i)) - F_i(\gamma_0(t_{i-1}))\big] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big[F_i(\gamma(u_i)) - F_i(\gamma_0(t_i))\big] - \sum_{i=0}^{n-1} \big[F_{i+1}(\gamma(u_i)) - F_{i+1}(\gamma_0(t_i))\big] \\
&= \big(F_n(z_n) - F_n(z_n)\big) - \big(F_1(z_0) - F_1(z_0)\big) \ = \ 0.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun so kleine Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$, dass das Bild des Rechtecks $Q_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ unter Φ jeweils in einer geeigneten Kreisscheibe $D_{ij} \subset G$ enthalten ist, für alle i und j. Für festes j liegen dann die Wege $\Phi_{s_{j-1}}$ und Φ_{s_j} jeweils so dicht beieinander, dass sie durch die gleiche Kreiskette überdeckt werden und die Integrale darüber gleich sind. Aber dann stimmen auch die Integrale über α und β überein. ∎

2.3 Folgerung. *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und α ein geschlossener Weg in G, der nullhomotop in G ist. Dann gilt $\int_\alpha f(z)dz = 0$.*

Beweis: α ist homotop zu einem konstanten Weg $c(t) \equiv z_0$, und das Integral längs c verschwindet offensichtlich. ∎

Jetzt kommen wir endlich zur gewünschten Charakterisierung der einfach-zusammenhängenden Gebiete:

2.4 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt : G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.*

Beweis: Es sei G einfach zusammenhängend. Dann ist $G = \mathbb{C}$ oder G biholomorph äquivalent zum Einheitskreis – die sind aber beide konvexe Gebiete, d.h. dort ist jeder geschlossene Weg nullhomotop. Die Homotopie kann dann nach G übertragen werden.

Wenn umgekehrt jeder geschlossene Weg nullhomotop ist, dann verschwindet das Integral über jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ und jeden geschlossenen Weg α in G. Ist Γ ein Zyklus in G, so zerfällt Γ in geschlossene Wege α_i. Also ist das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion f auf G. Daraus folgt, dass G einfach zusammenhängend ist. ∎

Definition. X, Y seien zwei Hausdorffsche topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\pi : X \to Y$ heißt *Überlagerung*, falls gilt:

Zu jedem $y \in Y$ gibt es eine Umgebung $V = V(y) \subset Y$, so dass $\pi^{-1}(V)$ eine Vereinigung von paarweise disjunkten offenen Teilmengen ist, die durch π homöomorph auf V abgebildet werden.

Ist $\pi^{-1}(y)$ immer eine d-elementige Menge, so spricht man von einer d-blättrigen Überlagerung.

Eine *verallgemeinerte Überlagerung* (oder *verzweigte Überlagerung*) ist eine stetige Abbildung $\pi : X \to Y$, die offen und diskret ist.

Bemerkung. Eine Überlagerung ist auch immer eine verallgemeinerte Überlegung. Die Umkehrung gilt natürlich nicht. Ist $\pi : X \to Y$ eine verallgemeinerte Überlagerung, so versteht man unter einem *Verzweigungspunkt* einen Punkt $x_0 \in X$, zu dem es keine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt, so dass $\pi|_U$ injektiv ist. Besitzt π keinen Verzweigungspunkt, so spricht man von einer unverzweigten (verallgemeinerten) Überlagerung. Das ist genau dann der Fall, wenn π lokal-topologisch ist.

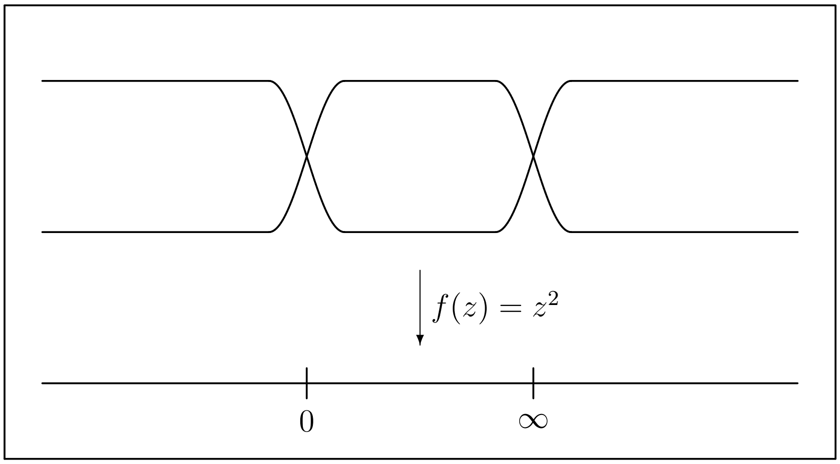
Beispiele.

1. Sei $\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ definiert durch $\pi(t) := e^{2\pi \mathrm{i}\, t}$. Ist $z_0 = e^{2\pi \mathrm{i}\, t_0} \in S^1$ und $W = W(t_0)$ eine kleine offene Umgebung, etwa ein Intervall der Länge $2\varepsilon < 1$, so ist $V = \{z = e^{2\pi \mathrm{i}\, t} : t \in W\}$ eine offene Umgebung von z_0 in S^1, und $\pi^{-1}(V)$ ist disjunkte Vereingung der Mengen $U_k = k + W$, $k \in \mathbb{Z}$. Offensichtlich ist π eine Überlagerung.

   Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist ebenfalls eine Überlagerung. Über einer geschlitzten Ebene liegen jeweils unendlich viele Parallelstreifen.

2. Sei $f(z) := z^n$, $n \geq 2$. Die Ableitung $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$ verschwindet genau für $z = 0$. Also ist f in jedem Punkt $z \neq 0$ ein lokaler Isomorphismus. Im Nullpunkt liegt ein Verzweigungspunkt (der Ordnung n) vor. Damit ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine verzweigte Überlagerung.

   Wir wollen daraus eine Überlagerung $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ machen. Um das Verhalten in $z = \infty$ zu studieren, benutzen wir die Inversion I. Es ist $I \circ f \circ I(z) = z^n$, für $z \neq 0$, also ist $f(\infty) = \infty$, und f besitzt in ∞ einen Verzweigungspunkt mit Vielfachheit n. Damit wird f zu einer verzweigten n-blättrigen Überlagerung $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit Verzweigungsmenge $Z := \{0, \infty\}$. Im Fall $n = 2$ ergibt sich folgendes Diagramm:



2.5 Lemma (Eindeutigkeit der Liftung). *Sei $\pi : X \to Y$ eine unverzweigte verallgemeinerte Überlagerung, Z ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : Z \to Y$ eine stetige Abbildung. Sind $g_1, g_2 : Z \to X$ zwei stetige „Liftungen" von f, d.h. stetige Abbildungen mit $\pi \circ g_i = f$ für $i \in \{1, 2\}$, mit $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ für ein $z_0 \in Z$, dann gilt $g_1(z) = g_2(z)$ für alle $z \in Z$.*

Beweis: Setze $T := \{z \in Z : g_1(z) = g_2(z)\}$. Dann ist $T \subset Z$ abgeschlossen, da die g_i stetig sind. T ist nicht leer, da $z_0 \in T$ ist. Also bleibt zu zeigen: T ist offen. Dann folgt $T = Z$, da Z zusammenhängend ist.

Sei $z \in T$, $x := g_1(z)$ und $y := \pi(x)$. Da π eine unverzweigte verallgemeinerte Überlagerung ist, gibt es Umgebungen $U = U(x)$ und $V = V(y)$, so dass $\pi|_U : U \to V$ topologisch ist. Außerdem gibt es eine Umgebung $W = W(z) \subset Z$, so dass $g_1(W) \subset U$ und $g_2(W) \subset U$ ist, da beide g_i stetig sind. Sei $\varphi := (\pi|_U)^{-1} : V \to U$. Dann gilt $\varphi \circ f|_W = g_i|_W$ für $i = 1, 2$, also $g_1 = g_2$ auf W, d.h. $W \subset T$. Damit ist T offen. ∎

2.6 Satz (Existenz der Liftung von Kurven). *Sei $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung (im engeren Sinne). Dann gibt es zu jeder stetigen Kurve $\alpha : [0, 1] \to Y$ und jedem Punkt $x_0 \in X$ mit $\pi(x_0) = \alpha(0)$ genau eine Liftung $\widehat{\alpha} : [0, 1] \to X$ von α mit $\widehat{\alpha}(0) = x_0$.*

Beweis: Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ gibt es eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

und offene Mengen $V_k \subset Y$, so dass für $k = 1, \ldots, n$ gilt:

1. $\alpha([t_{k-1}, t_k]) \subset V_k$,
2. $\pi^{-1}(V_k) = \bigcup_{j \in J_k} U_{k,j}$, mit paarweise disjunkten offenen Mengen $U_{k,j}$, die durch π homöomorph auf V_k abgebildet werden.

Die Liftung $\widehat{\alpha}$ wird nun induktiv konstruiert.

Ist $x_0 \in U_{1,j_1}$, so setzen wir $\varphi_1 := (\pi|_{U_{1,j_1}})^{-1}$ und $\widehat{\alpha}(t) := \varphi_1 \circ \alpha(t)$, für $t \in [0, t_1]$.

Ist $k \geq 2$, $\widehat{\alpha}$ auf $[0, t_{k-1}]$ schon konstruiert und $x_{k-1} := \widehat{\alpha}(t_{k-1}) \in U_{k,j_k}$, so setzen wir $\varphi_k := (\pi|_{U_{k,j_k}})^{-1}$ und $\widehat{\alpha}(t) := \varphi_k \circ \alpha(t)$, für $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Nach endlich vielen Schritten ist man fertig. ∎

Wir wollen jetzt die „Garbe der holomorphen Funktionskeime" einführen.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir betrachten Paare (U, f) mit

1. $U = U(z_0)$ ist offene Umgebung von z_0.
2. f ist holomorph auf U.

Jedes solche Paar heißt dann ein „holomorphes Funktionselement" in z_0. Auf der Menge dieser Paare führen wir eine Äquivalenzrelation ein:

$(U, f) \sim (V, g)$ genau dann, wenn es $W = W(z_0) \subset U \cap V$ gibt, auf der f und g übereinstimmen.
Eine Äquivalenzklasse nennen wir einen Funktionskeim in z_0, die Klasse von (U, f) bezeichnen wir mit f_{z_0}. $\mathcal{O}_{z_0}$ sei die Menge aller holomorphen Funktionskeime in z_0. Dann ist $\mathcal{O}_{z_0}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra.

Die „kanonische Abbildung"

$$\varrho_{U,z_0} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{z_0}$$

definieren wir durch $f \mapsto f_{z_0}$. Damit ist ϱ_{U,z_0} ein $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus.

Bezeichnen wir mit $\mathbb{C}\{T\}$ die $\mathbb{C}$-Algebra der konvergenten Potenzreihen, dann gibt es einen Algebra-Homomorphismus

$$\tau_{U,z_0} : \mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}\{T\}, \quad \tau_{U,z_0}(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} T^n.$$

τ anzuwenden bedeutet das Entwickeln einer holomorphen Funktion in eine Potenzreihe um z_0. Wir können jetzt den induzierten Algebra-Homomorphismus $\varphi : \mathbb{C}\{T\} \to \mathcal{O}_{z_0}$ betrachten, der definiert wird durch $\varphi(\tau_{U,z_0}(f)) := f_{z_0}$.

Bemerkung. Jede Potenzreihe konvergiert gegen eine holomorphe Funktion, deren Taylorreihe wieder die Potenzreihe ist. Deshalb ist τ_{U,z_0} surjektiv, und insbesondere ist φ wohldefiniert.

2.7 Behauptung. *φ ist Algebra-Isomorphismus, d.h. $\mathcal{O}_{z_0} \cong \mathbb{C}\{T\}$.*

BEWEIS: Ist $\varphi(\tau_{U,z_0}(f)) = 0$, dann ist der Funktionskeim $f_{z_0} = 0$. Also gibt es eine Umgebung $V = V(z_0) \subset U$ mit $f_{|V} \equiv 0$. Der Identitätssatz sagt dann, dass

$f \equiv 0$ auf der Zusammenhangskomponente von U, die z_0 enthält. Jedenfalls ist die Taylorentwicklung von f in z_0 identisch 0, da alle Ableitungen in z_0 verschwinden. Also ist φ injektiv.

Ist $\sigma \in \mathcal{O}_{z_0}$, dann nehme einen Repräsentanten (V, f). Dann ist $\varphi(\tau_{U,z_0}(f)) = f_{z_0} = \sigma$, d.h. φ ist surjektiv. ∎

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen. Die Menge $\mathcal{O}_B := \dot{\bigcup}_{z \in B} \mathcal{O}_z = \bigcup_{z \in B} \{z\} \times \mathcal{O}_z$ heißt die *Garbe der holomorphen Funktionskeime* auf B, die Teilmenge $\mathcal{O}_z$ der *Halm der Garbe* in z. Außerdem bezeichne $\pi_B : \mathcal{O}_B \to B$ die Projektion auf B, mit $\pi_B(f_z) := z$.

Wir wollen nun $\mathcal{O}_B$ mit einer Topologie versehen, und zwar so, dass Potenzreihenentwicklungen einer Funktion in verscheidenen Punkten „nahe beieinander liegen".

Sei $U \subset B$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann bezeichnen wir $S_{U,f} := \{f_z | z \in U\}$ als eine *Elementarumgebung* für jeden Funktionskeim f_{z_0} mit $z_0 \in U$.

Definition. Eine Menge $M \subset \mathcal{O}_B$ heißt *offen*, wenn für alle $\sigma \in M$ eine Elementarumgebung $S_{U,f}$ existiert mit $\sigma \in S_{U,f} \subset M$.

Wir müssen noch prüfen, dass mit der Definition die Eigenschaften einer Topologie erfüllt sind:

1. Die leere Menge und $\mathcal{O}_B$ sind trivialerweise offen.

2. Sind M, N offen, und ist $\sigma \in M \cap N$, $z_0 := \pi_B(\sigma)$, dann gibt es, weil M und N offen sind, Umgebungen U und V von z_0, die in B enthalten sind, und holomorphe Funktionen $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$, mit $\sigma = f_{z_0} = g_{z_0}$ und $S_{U,f} \subset M$, $S_{V,g} \subset N$.

   Ist $W = W(z_0) \subset U \cap V$ zusammenhängend, dann gilt wegen des Identitätssatzes $f_{|W} = g_{|W}$. Aber damit gilt $\sigma \in S_{W,f} \subset S_{U,f} \cap S_{V,g} \subset M \cap N$, d.h. $M \cap N$ ist offen.

3. Die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen, denn ein Element σ der Vereinigung ist in einer der offenen Mengen enthalten. Diese enthält eine Elementarumgebung um σ, die dann auch ganz in der Vereinigung liegt.

2.8 Satz.

1. *Ist $U \subset B$ offen, und $f \in \mathcal{O}(U)$, so ist $\{f_z : z \in U\}$ offen in $\mathcal{O}_B$.*

2. *Für jedes $z \in B$ ist $\mathcal{O}_z$ diskret in $\mathcal{O}_B$.*

3. *$\mathcal{O}_B$ ist ein Hausdorffraum.*

4. $\pi_B : \mathcal{O}_B \to B$ *ist stetig, surjektiv und lokal-topologisch.*

BEWEIS: 1) Klar, da $S_{U,f} = \{f_z | z \in U\}$.

2) Sei $\sigma \in \mathcal{O}_{z_0}$. Wir zeigen, dass σ eine Umgebung in $\mathcal{O}_B$ hat, in der außer σ kein Element aus $\mathcal{O}_{z_0}$ enthalten ist. Sei (U, f) ein Repräsentant von σ, dann ist $S_{U,f}$ offene Umgebung von σ, hat aber nur einen Funktionskeim im Halm $\mathcal{O}_{z_0}$, nämlich $f_{z_0} = \sigma$ selbst.

3) Seien $\sigma \neq \sigma'$ zwei Funktionskeime aus $\mathcal{O}_B$, $z := \pi_B(\sigma)$, $z' := \pi_B(\sigma')$ seien die zugehörigen Punkte in B.

a) Ist $z \neq z'$, dann wähle disjunkte Umgebungen $U = U(z)$ und $U' = U'(z')$ in $\mathbb{C}$, so klein, dass es Repräsentanten (U, f) und (U', g) gibt mit $f_z = \sigma$ und $g_{z'} = \sigma'$. Dann sind aber $S_{U,f}$ und $S_{U',g}$ disjunkt und enthalten σ bzw. σ'.

b) Ist $z = z'$, dann wähle $U = U(z)$ und zwei holomorphe Funktionen $f, g \in \mathcal{O}(U)$, so dass $f_z = \sigma$ und $g_z = \sigma'$.

Angenommen, es gibt keine Umgebung $V = V(z)$ mit $S_{V,f} \cap S_{V,g} = \varnothing$. Dann gibt es eine Folge $(z_n) \subset U$ konvergent gegen z, auf der die Keime f_{z_n} und g_{z_n} übereinstimmen. Dann sind insbesondere die Funktionswerte $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Identitätssatz gibt es dann eine zusammenhängende Umgebung $W = W(z)$, so dass $f_{|W} = g_{|W}$, aber das heißt $\sigma = f_z = g_z = \sigma'$. Das ist ein Widerspruch!

Also existiert $V = V(z) \subset U$, mit $f_z \neq g_z$ für alle z aus V, aber das bedeutet genau $S_{V,f} \cap S_{V,g} = \varnothing$.

> **Bemerkung:** Für die Hausdorffeigenschaft geht der Identitätssatz wesentlich ein. Betrachten wir analog die Garbe der reell-differenzierbaren Funktionen, so geht die Eigenschaft tatsächlich verloren.

4a) π_B ist stetig:

Sei $U \subset B$ offen, $\sigma \in \pi_B^{-1}(U)$, $z := \pi_B(\sigma) \in U$. Dann gibt es eine Umgebung $V = V(z) \subset U$ und eine holomorphe Funktion f auf V, so dass (V, f) ein Repräsentant von σ ist. Dann gilt $\sigma \in S_{V,f} \subset \pi_B^{-1}(U)$, also ist $\pi_B^{-1}(U)$ offen.

4b) π_B ist lokal-topologisch:

Zu zeigen: Ist $\sigma \in \mathcal{O}_B$, $z = \pi_B(\sigma)$, so gibt es Umgebungen $V = V(\sigma) \subset \mathcal{O}_B$ und $U = U(z) \subset B$, so dass $\pi_{B|V} : V \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Sei nun (U, f) ein Repräsentant von σ, d.h. U ist Umgebung von z und $f \in \mathcal{O}(U)$. Die Einschränkung $\pi_{B|S_{U,f}} \to U$ ist bijektiv, die Umkehrabbildung lässt sich direkt angeben: $s_f = (\pi_{B|S_{U,f}})^{-1} : U \to S_{U,f}$ kann definiert werden durch $z' \mapsto f_{z'}$. Damit bleibt zu zeigen: s_f ist stetig auf U. Sei dazu $z_0 \in U$ und $\sigma_0 := s_f(z_0) = f_{z_0} \in s_f(U) = S_{U,f}$. Ist $M \subset s_f(U)$ eine Umgebung von σ_0, so gibt es eine Umgebung $W = W(z_0) \subset U$ mit $S_{W,f} \subset M$. Dann ist aber $s_f(W) \subset M$, also s_f stetig in z_0. ∎

Exkurs über Garben:

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* von Gruppen (Ringen, $\mathbb{C}$-Algebren etc.) ordnet jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ eine Gruppe (einen Ring, eine $\mathbb{C}$-Algebra etc.) $\mathcal{F}(U)$ zu, sowie je zwei offenen Mengen $U, V \subset X$ mit $U \subset V$ einen Homomorphismus

$$\varrho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U),$$

so dass gilt:

1. $\varrho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$, für alle offenen Mengen $U \subset X$.
2. Ist $U \subset V \subset W$, so ist $\varrho_{W,V} \circ \varrho_{V,U} = \varrho_{W,U}$.

Beispiel.

Sei $\mathcal{C}(U)$ die $\mathbb{C}$-Algebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf U. Für $U \subset V$ sei $\varrho_{V,U} : \mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(U)$ definiert durch $\varrho_{V,U}(f) := f|_U$.

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ wird *Garbe* genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

G1 Sei $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von offenen Mengen in X und U die Vereinigung der U_ι. Es seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Ist $\varrho_{U,U_\iota}(s) = \varrho_{U,U_\iota}(t)$ für alle $\iota \in I$, so ist $s = t$.

G2 Wieder sei $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von offenen Mengen in X und U die Vereinigung der U_ι. Ist für jedes $\iota \in I$ ein $s_\iota \in \mathcal{F}(U_\iota)$ gegeben und $\varrho_{U_\iota,U_{\iota\kappa}}(s_\iota) = \varrho_{U_\kappa,U_{\iota\kappa}}(s_\kappa)$ für alle ι, κ, so gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varrho_{U,U_\iota}(s) = s_\iota$ für alle ι.

Die Prägarbe der stetigen Funktionen ist offensichtlich eine Garbe.

Ist eine Prägarbe $U \to \mathcal{F}(U)$ gegeben, so kann man *Keime* definieren, wie im Falle der holomorphen Funktionen (an Stelle der Einschränkung von V auf eine Teilmenge U verwendet man den „Restriktions-Homomorphismus“ $\varrho_{V,U}$). Und dann kann man $\mathcal{F}$ als unverzweige verallgemeinerte Überlagerung definieren. Ist die Prägarbe eine Garbe, so stimmt $\mathcal{F}(U)$ jeweils mit der Menge der stetigen „Schnitte“ in $\mathcal{F}$ über U überein.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg mit $z_0 := \alpha(0) \in G$ und $f \in \mathcal{O}(G)$. f heißt *längs α holomorph fortsetzbar* nach $w_0 := \alpha(1)$, falls es eine Kreiskette $(D_1, \dots, D_n)$ längs α gibt, sowie holomorphe Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(D_i)$ mit

1. $f_1|_{D_1 \cap G} = f|_{D_1 \cap G}$.
2. $f_i|_{D_i \cap D_{i+1}} = f_{i+1}|_{D_i \cap D_{i+1}}$.

Beispiel.

Es sei $G = D_1(1)$, $f(z) := \log z$ der Hauptzweig des Logarithmus auf G. Ist $\alpha(t) = e^{2\pi \mathsf{i}\, t}$ der orientierte Rand des Einheitskreises, dann kann f entlang α holomorph fortgesetzt werden. Allerdings existiert keine holomorphe Funktion F auf der Vereinigung der Kreisscheiben der Kreiskette, die auf G mit f übereinstimmt, denn die Fortsetzung entlang α im Punkt 1 unterscheidet sich von f um $2\pi\mathsf{i}$.

2.9 Behauptung. *Es sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg, $(D_1, \ldots, D_n)$ eine Kreiskette längs α, $(f_1, \ldots, f_n)$ die zugehörige holomorphe Fortsetzung eines in $z_0 = \alpha(0)$ gegebenen Funktionselementes (U, f). Für $t \in [0,1]$ und $\alpha(t) \in D_i$ sei jeweils $\sigma_t := (f_i)_{\alpha(t)} \in \mathcal{O}_{\alpha(t)}$. Dann gilt:*

1. *Durch $\widehat{\alpha}(t) := \sigma_t$ wird ein stetiger Weg $\widehat{\alpha} : [0,1] \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ definiert, für den $\pi_{\mathbb{C}} \circ \widehat{\alpha} = \alpha$ gilt, d.h. $\widehat{\alpha}$ ist eine stetige Liftung von α in die Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.*

2. *Der Funktionskeim $\sigma_1 := (f_n)_{\alpha(1)}$ aus $\mathcal{O}_{\alpha(1)}$ hängt nur vom Funktionskeim $\sigma_0 := (f)_{z_0}$ aus $\mathcal{O}_{z_0}$ ab (und natürlich von α).*

BEWEIS: 1) Zunächst ist $\widehat{\alpha}$ wohldefiniert, da f_i und f_{i+1} auf dem Durchschnitt $D_i \cap D_{i+1}$ übereinstimmen. Die Abbildung

$$s_i : D_i \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}, \quad s_i(z) := (f_i)_z$$

ist stetig, es ist eine lokale Umkehrung von π. Ist das Intervall $[0,1]$ unterteilt mit $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, so dass $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset D_i$ ist, so gilt

$$\widehat{\alpha}|_{[t_i,t_{i+1}]} = s_i \circ \alpha|_{[t_i,t_{i+1}]},$$

aber die rechte Seite ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Also ist auch $\widehat{\alpha}$ stetig.

2) $\widehat{\alpha}$ ist also eine stetige Liftung von α. Der Anfangspunkt ist $\widehat{\alpha}(0) = f_{z_0}$, und weil das Intervall $[0,1]$ zusammenhängend ist, muss wegen der Eindeutigkeit der Liftung $\widehat{\alpha}$ auf $[0,1]$ eindeutig bestimmt sein. Insbesondere ist $\widehat{\alpha}(1) = \sigma_1$ eindeutig bestimmt. ∎

Wir fragen, was passiert, wenn wir die Fortsetzung eines Funktionselementes (U, f) in einen Punkt z entlang verschiedener Wege bestimmen. Das Beispiel das Logarithmus zeigte, dass der Wert der Fortsetzung vom Weg abhängen kann. Wir wollen untersuchen, in welchen Fällen das so ist.

2.10 Monodromie-Lemma. *Sei $p : Y \to X$ unverzweigte verallgemeinerte Überlagerung, $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie, $\overline{a} \in Y$, $\Phi(0,s) = a = p(\overline{a})$ für alle $s \in [0,1]$.*

Jede Kurve φ_s (mit $\varphi_s(t) := \Phi(t,s)$) lasse sich zu einer Kurve $\overline{\varphi_s} : [0,1] \to Y$ liften mit Anfangspunkt $\overline{a}$. Dann haben $\overline{\varphi_0}$ und $\overline{\varphi_1}$ den gleichen Endpunkt und sind homotop.

Beweis: Definiere $\overline{\Phi}(t,s) := \overline{\varphi_s}(t)$. Wir müssen zeigen, dass $\overline{\Phi}$ stetig ist.

a) Zunächst zeigen wir die Stetigkeit für alle Wege nahe $\overline{a}$, also die Existenz eines $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\overline{\Phi}_{|[0,\varepsilon_0)\times[0,1]}$ stetig ist.

Da p eine unverzweigte verallgemeinerte Überlagerung ist, existieren Umgebungen $V = V(\overline{a})$ und $U = U(a)$, so dass $p_{|V} : V \to U$ topologisch ist. Da Φ stetig ist und $\Phi(0,s) = a$ für alle $s \in [0,1]$ gilt, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $\Phi([0,\varepsilon_0) \times [0,1]) \subset U$.

Aber $\overline{\varphi_s}$ und $(p_{|V})^{-1} \circ \varphi_s$ sind beides Liftungen von φ_s auf $[0,\varepsilon_0)$. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung müssen sie auf dem ganzen Intervall übereinstimmen. Weil dieses Argument auf alle $s \in [0,1]$ zutrifft, gilt $\overline{\Phi}(t,s) = (p_{|V})^{-1} \circ \Phi(t,s)$ für $(t,s) \in [0,\varepsilon_0) \times [0,1]$. Die rechte Seite ist stetig, also auch die linke.

b) Jetzt zeigen wir: $\overline{\Phi}$ ist stetig auf $[0,1] \times [0,1]$.

Angenommen nicht, dann gibt es ein $(t_0,s_0) \in [0,1] \times [0,1]$, so dass $\overline{\Phi}$ nicht stetig in (t_0,s_0) ist. Sei

$$t_0^* := \inf\{t \in [0,1] \,:\, \overline{\Phi} \text{ ist nicht stetig in } (t,s_0)\}.$$

Wegen a) ist $t_0^* > \varepsilon_0$. Sei $x_0 := \Phi(t_0^*, s_0)$, $y_0 := \overline{\Phi}(t_0^*, s_0) = \overline{\varphi_{s_0}}(t_0^*)$. Wähle nun wie bei a) Umgebungen $V = V(y_0)$ und $U = U(x_0)$, so dass $p|_V$ topologisch ist.

Dann gibt es wegen der Stetigkeit von Φ ein $\varepsilon > 0$, so dass $\Phi(U_\varepsilon(t_0^*) \times U_\varepsilon(s_0)) \subset U$ gilt. Erneut sind $\overline{\varphi_{s_0}}$ und $(p|_V)^{-1} \circ \varphi_{s_0}$ beides Liftungen von φ_{s_0} auf $U_\varepsilon(t_0^*)$, beide nehmen in t_0^* den Wert y_0 an. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung ist damit $\overline{\varphi_{s_0}} = (p|_V)^{-1} \circ \varphi_{s_0}$ auf $U_\varepsilon(t_0^*)$.

Sei jetzt $t_1 \in U_\varepsilon(t_0^*)$, $0 < t_1 < t_0^*$. Dann ist $\overline{\varphi_{s_0}}(t_1) = (p|_V)^{-1} \circ \varphi_{s_0}(t_1) \in V$. Aber $\overline{\Phi}$ ist stetig in (t_1, s_0), also gibt es ein $\delta > 0$ mit $\overline{\Phi}(t_1, s) \in V$ für $s \in U_\delta(s_0)$, ohne Einschränkung sei $\delta < \varepsilon$.

Dann ist $\overline{\varphi_s}|_{U_\varepsilon(t_0^*)} = (p|_V)^{-1} \circ \varphi_s|_{U_\varepsilon(t_0^*)}$ für $|s - s_0| < \delta$. Also ist $\overline{\Phi} = (p_{|V}^{-1}) \circ \Phi$ auf $U_\varepsilon(t_0^*) \times U_\delta(s_0)$, aber die rechte Seite ist stetig. Das ist ein Widerspruch, denn wir können eine Folge (t_ν) finden, so dass (t_ν) monoton fallend gegen t_0^* konvergiert und $\overline{\Phi}$ in (t_ν, s_0) nicht stetig ist.

Bemerkung: Das t_1 wird benötigt, um den Anfangspunkt für die Eindeutigkeit der Liftung zu haben.

c) Es ist $p \circ \overline{\Phi} = \Phi$, und Φ bildet $\{1\} \times [0,1]$ auf einen Punkt $b \in X$ ab, d.h. $\overline{\Phi}(\{1\}\times[0,1]) \subset p^{-1}(b)$. Nun ist aber $\{1\}\times[0,1]$ zusammenhängend, und damit auch das stetige Bild unter $\overline{\Phi}$ zusammenhängend. Weil es gleichzeitig in einer diskreten Menge enthalten ist, muss es ein einzelner Punkt sein, d.h. es gibt ein $\overline{b} \in p^{-1}(b)$, so dass $\overline{\Phi}(\{1\} \times [0,1]) = \{\overline{b}\}$ ist. ∎

2.11 Monodromiesatz. *Es seien $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetige Wege, und Φ eine Homotopie zwischen α und β. $z_0 := \Phi(0,s)$ sei der Anfangspunkt und $w_0 := \Phi(1,s)$ der Endpunkt. Weiterhin sei $\sigma \in \mathcal{O}_{z_0}$ ein holomorpher Funktionskeim, der längs jedes Weges φ_s holomorph fortsetzbar ist zu einem Keim $\sigma_s \in \mathcal{O}_{w_0}$.*

Dann ist $\sigma_0 = \sigma_1$, d.h. das Ergebnis der Fortsetzung ist unabhängig vom Weg.

BEWEIS: $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ ist unverzweigte, verallgemeinerte Überlagerung.

Die Fortsetzbarkeit längs jeden Weges φ_s bedeutet : jeder Weg φ_s ist liftbar. Ist $\overline{\varphi_s}$ die Liftung, dann gilt $\overline{\varphi_s}(0) = \sigma$ für jedes $s \in [0,1]$. Außerdem ist $\sigma_s = \overline{\varphi_s}(1)$. Dann folgt mit Hilfe des Monodromie-Lemmas : $\overline{\Phi}$ ist eine Homotopie, insbesondere ist $\sigma_0 = \sigma_1$. ∎

Denken wir an das Beispiel des Logarithmus. Natürlich sind zwei Wege in $\mathbb{C}$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten immer in $\mathbb{C}$ homotop, aber die Homotopie lässt sich nur liften, wenn keiner der Wege in der Homotopie durch Null geht, denn sonst ist der Logarithmus entlang dieses Weges nicht fortsetzbar.