Kapitel 2 Konforme Abbildungen

§ 1 Der Riemannsche Abbildungssatz

Es soll zunächst an einige Fakten aus Funktionentheorie 1 erinnert werden:

1.1 Schwarzsches Lemma. *Sei $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann ist $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, und daher $|f'(0)| \le 1$.*

Ist sogar $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \ne 0$, so ist $f(z) = e^{\mathrm{i}\,\lambda} \cdot z$ mit einem festen $\lambda \in \mathbb{R}$.

Unter einer *Möbiustransformation* versteht man eine gebrochen-lineare Transformation

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } ad - bc \ne 0.$$

Für $\alpha \in \mathbb{D}$ sei

$$T_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\ .$$

Dann ist T_α eine Möbius-Transformation, die in $z = 1/\overline{\alpha}$ nicht definiert ist. Weiter gilt:

1.2 Satz. *Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $f(\alpha) = 0$. Dann gibt es ein θ mit*

$$f(z) = e^{\mathrm{i}\,\theta} \cdot \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\ .$$

Beispiel.

Die Menge $\mathbb{H} := \{z = x + \mathrm{i}\,y \ : \ y > 0\}$ nennt man die *obere Halbebene*. Die Abbildung $f(z) := \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ bildet $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ ab. Daraus folgt: Die Abbildung $z \mapsto \dfrac{z^2-\mathrm{i}}{z^2+\mathrm{i}}$ bildet den ersten Quadranten biholomorph auf $\mathbb{D}$ ab.

Das ist klar, denn $z \mapsto z^2$ bildet den ersten Quadranten biholomorph auf die obere Halbebene ab.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ heißt *(lokal) beschränkt*, falls es zu jedem $z \in G$ eine offene Umgebung $U = U(z) \subset G$ und eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $|f(z)| \le c$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt.

Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ heißt *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt. Dann gilt:

1.3 Satz von Montel. *Jede beschränkte Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ ist normal.*

Die Beweise finden sich in der Ausarbeitung zu Funktionentheorie 2 vom WS 02/03, in Kapitel I, §1 und 2.

Definition. Sei $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, $\infty \in G$. Eine *holomorphe oder meromorphe Funktion* f auf G ist eine holomorphe (bzw. meromorphe) Funktion auf $G \setminus \{\infty\}$, so dass $z \mapsto f(1/z)$ im Nullpunkt holomorph fortsetzbar ist (bzw. dort eine Polstelle besitzt).

Bemerkung. In beiden Fällen besitzt f in ∞ eine isolierte Singularität. Das bedeutet insbesondere, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass f auf

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

holomorph ist. Außerdem kann man f zu einer stetigen Abbildung $\widehat{f} : G \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen. An Stelle von $\widehat{f}$ schreiben wir meistens wieder f. Die Menge der holomorphen Funktionen auf G bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(G)$.

1.4 Satz. *Jede auf $\overline{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}})$. Dann ist $|f|$ stetig auf dem kompakten Raum $\overline{\mathbb{C}}$, nimmt also sein Maximum in einem $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ an. Ist z_0 in $\mathbb{C}$, so liefert das Maximumsprinzip, dass f konstant auf ganz $\mathbb{C}$ ist. Ist $z_0 = \infty$, so ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, und der Satz von Liouville liefert das gleiche Ergebnis. Wegen der Stetigkeit muss f auch konstant auf $\overline{\mathbb{C}}$ sein. ∎

1.5 Satz. *Jede auf $\overline{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion ist rational, d.h. Quotient zweier Polynome.*

Beweis: Sei f meromorph auf $\overline{\mathbb{C}}$, P_f die Polstellenmenge von f. Dann ist P_f diskret, also endlich. Für jedes z_μ aus $P_f \setminus \{\infty\}$ sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_μ. Dann ist h_μ rational und holomorph auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_\mu\}$. Sind $z_1, \ldots, z_N$ alle Polstellen in $\mathbb{C}$, dann setzen wir

$$p(z) := f(z) - \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu(z).$$

$p(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$, hat aber eventuell noch einen Pol in Unendlich. In $\mathbb{C}$ kann p aber in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für alle } z \text{ aus } \mathbb{C}.$$

Sei $I(z) = 1/z$ die Inversion. Wir untersuchen $p \circ I$ nahe Null:

$$p \circ I(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Liegt in Null ein Pol vor, so müssen ab einem n_0 alle a_n verschwinden, d.h., p ist ein Polynom. Damit folgt :

$$f(z) = p(z) + \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu(z)$$

ist eine rationale Funktion. ∎

Sei jetzt f eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ und $a \in \mathbb{C}$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Ist f in a holomorph, so hat f eine Darstellung als Potenzreihe :

   $$f(z) = f(a) + \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

   mit $c_k \neq 0$. Die natürliche Zahl k heißt dann die *Vielfachheit* oder *Multiplizität* der $f(a)$-Stelle in a, und wir sagen auch, f hat in a die Vielfachheit k.

2. Hat f in a eine Polstelle, so ist

   $$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

   mit $c_{-k} \neq 0$. In diesem Fall sagen wir, f hat in a die Vielfachheit $-k$.

Ist $a = \infty$, so betrachtet man $f(1/z)$ im Nullpunkt und erklärt die Vielfachheit genauso.

1.6 Satz. *Sei $f = p/q$ eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$, wobei p, q teilerfremde Polynome sind. Außerdem sei $d := \max(\deg(p), deg(q))$. Dann gilt:*

1. *d ist genau dann gleich Null, wenn f konstant ist.*
2. *Ist $d > 0$, so nimmt f jeden Wert c aus $\overline{\mathbb{C}}$ genau d-mal an (mit Vielfachheiten gezählt).*

BEWEIS: 1) Trivial.

2) Sei zunächst $c = \infty$. Weil p und q teilerfremd sind, ist ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ genau dann eine Polstelle von f, wenn $q(z) = 0$ ist. Nach dem Fundamentalsatz der

Algebra ist $\deg(q)$ genau die Summe der Vielfachheiten, mit denen Unendlich in Punkten $z \in \mathbb{C}$ angenommen wird.

a) Ist $\deg(p) \leq \deg(q)$, so existiert $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$, d.h. f hat keine weiteren Polstellen.

b) Ist $\deg(p) > \deg(q)$, so hat f in $z = \infty$ einen Pol der Ordnung $\deg(p) - \deg(q)$, also ist die Vielfachheit von Unendlich in beiden Fällen gleich d.

Sei jetzt $c \in \mathbb{C}$ und f nicht konstant. Wir definieren

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - c \cdot q(z)}.$$

Die Polstellen von g sind genau die c-Stellen von f. Weil p und q teilerfremd sind, gilt das auch für q und $p - c \cdot q$. Außerdem ist

$$\max(\deg(q), \deg(p - c \cdot q)) = \max(\deg(q), \deg(p)) = d.$$

Also gilt die Behauptung. ∎

1.7 Satz. *Sei $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Dann ist eine nicht-konstante meromorphe Funktion $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Abbildung.*

Beweis: Ist f eine (nicht-konstante) holomorphe Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$, so wissen wir schon, dass f offen ist. Da die Inversion I ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich ist, gilt diese Aussage auch für meromorphe Funktionen. ∎

Jede Möbius-Transformation

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0$$

ist eine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$, und – weil Zähler und Nenner einen Grad ≤ 1 haben – konstant oder ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich. Nicht-konstante lineare Transformationen sind also Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$.

Wieviele *Fixpunkte* hat $T(z)$, wenn T nicht konstant ist?

1. Es sei T affin-linear, $T(z) = az + b \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Dann ist Unendlich ein Fixpunkt. Ist $a = 1$, so liegt eine Translation vor und die Abbildung hat keinen weiteren Fixpunkt. Ist $a \neq 1$, so stellt $z = \dfrac{-b}{a-1}$ einen weiteren Fixpunkt dar. Mehr gibt es nicht.

2. Ist $c \neq 0$, so ist $T(\infty) = a/c$, also Unendlich kein Fixpunkt! Es gilt $T(z) = z$ genau dann, wenn $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ ist, und da es für eine quadratische Gleichung höchstens zwei verschiedene Lösungen gibt, hat T höchstens zwei Fixpunkte.

1.8 Folgerung.

1. *Sei T eine lineare Transformation mit mehr als zwei Fixpunkten.*
   Dann ist $T = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$.
2. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden.*
   Dann ist T durch die Bilder $T(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ eindeutig festgelegt.

BEWEIS:

1. ist klar!
2. Es gebe $S, T \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ mit $S(z_i) = T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist auch $S^{-1}T \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, hat aber mindestens drei Fixpunkte. Also muss $S = T$ sein!

■

Man kann sogar zu drei beliebigen Punkten und drei vorgegebenen Bildern die passende lineare Transformation konkret bestimmen.

Dazu suchen wir zunächst zu beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 eine Möbiustransformation T mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ und $T(z_3) = \infty$. Eine leichte Überlegung ist, dass

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

schon die Punkte z_1 und z_3 richtig abbildet. Allerdings ist

$$T(z_2) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Dividieren wir $T(z)$ noch durch diesen Bruch, so erhalten wir die gewünschte Transformation.

Definition. Als *Doppelverhältnis* der Punkte z, z_1, z_2, z_3 bezeichnen wir die Größe

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Bemerkung. Ist einer der ausgewählten Punkte gleich Unendlich, so vereinfacht sich die Formel. Im Falle $z_1 = \infty$ gilt z.B.

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Der fehlende Bruch

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\frac{z}{z_1} - 1}{\frac{z_2}{z_1} - 1}$$

geht gegen Eins, wenn z_1 nach Unendlich geht.

1.9 Satz. *Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils paarweise verschieden, so gibt es genau eine gebrochen lineare Transformation T mit $T(z_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Beweis: Seien $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ und $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$. Dann erfüllt die Verkettung

$$T(z) := T_2^{-1} \circ T_1(z)$$

die Forderung. Dass die Transformation T eindeutig bestimmt ist, haben wir schon gesehen. ∎

1.10 Satz. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Ein Punkt $z \in \overline{\mathbb{C}}$ liegt genau dann auf der durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreislinie (alle $z_i \in \mathbb{C}$) oder Geraden (ein $z_i = \infty$), falls das Doppelverhältnis $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine reelle Zahl oder Unendlich ist.*

Beweis: Sei $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$, K die Gerade oder Kreislinie durch die z_i. Dann ist $T(K)$ Kreis oder Gerade durch 0, 1 und Unendlich, also $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und damit ist $z \in K$ genau dann, wenn $T(z)$ reell ist oder Unendlich. ∎

1.11 Folgerung. *Das Gebiet $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ werde von einer Geraden oder einer Kreislinie berandet. Dann gibt es eine lineare Transformation T mit $T(G) = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.*

Beispiel.

Die Abbildung

$$T(z) := \mathsf{i}\,(\frac{1+z}{1-z}) = DV(z, -1, -\mathsf{i}\,, 1)$$

bildet die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ab, denn -1, $-\mathsf{i}$ und 1 liegen alle auf $\partial\mathbb{D}$, und es ist $T(0) = \mathsf{i}$. Also ist $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$. Wir kennen diese Transformation schon, es ist

$$T^{-1}(w) = \frac{w - \mathsf{i}}{w + \mathsf{i}}\,.$$

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ soll *speziell* genannt werden, wenn gilt:

Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, dann gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g^2 = f$.

Zur Erinnerung: Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls jeder Zyklus in G nullhomolog in G ist. In Funktionentheorie 1 wurde gezeigt, dass ein Gebiet G genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden Zyklus Γ und jede holomorphe Funktion f in G.
- Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion.
- Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen, so gibt es eine holomorphe Funktion q auf G mit $\exp \circ q = f$.
- Ist $\mathbb{C} \setminus G = A' \cup A''$ eine Zerlegung in zwei disjunkte nicht-leere in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Teilmengen, so kann keine der beiden kompakt sein.

1.12 Satz.

1. *Ist G einfach zusammenhängend, so ist G speziell.*
2. *Seien $G, G' \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $\varphi : G \to G'$ biholomorphe Abbildung. Dann gilt: G ist speziell genau dann, wenn G' speziell ist.*

Beweis:

1. Ist G einfach zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(G)$ eine nullstellenfreie Funktion, so existiert eine Funktion $q \in \mathcal{O}(G)$ mit $\exp(q) = f$, also ein Logarithmus von f (Folgerung aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz, Funktionentheorie 1).

   Setzen wir $g := \exp(q/2) \in \mathcal{O}(G)$, dann ist $g^2 = \exp(q/2)^2 = \exp(q) = f$.

2. Es sei $\varphi : G \to G'$ biholomorph, G ein spezielles Gebiet. Ist $f \in \mathcal{O}(G')$ nullstellenfrei, so ist $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(G)$ auch nullstellenfrei. Da G speziell ist, existiert $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g^2 = f \circ \varphi$. Dann ist $g \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(G')$, und es gilt :

   $$(g \circ \varphi^{-1})^2 = g^2 \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = f.$$

   Also ist auch G' speziell. Die andere Richtung geht analog.

■

Bemerkung. Die Eigenschaft „speziell“ ist also eine biholomorphe Invariante.

Sei nun $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Wir wollen Äquivalenzlassen von Gebieten klassifizieren, wobei wir mit „äquivalent“ biholomorph äquivalent meinen.

1. Ist $G = \overline{\mathbb{C}}$, so ist G kompakt. Das ist ein Sonderfall.
2. Ist $G \neq \overline{\mathbb{C}}$, so gibt ein $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Wir können ohne Einschränkung verlangen, dass $z_0 = \infty \notin G$ ist, sonst bilden wir G mittels $1/(z - z_0)$ biholomorph auf ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ab. Also reicht es, wenn wir Gebiete in $\mathbb{C}$ betrachten.

Wir kommen jetzt zum zentralen Resultat dieses Paragraphen:

1.13 Riemannscher Abbildungssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$. Dann ist G biholomorph äquivalent zum Einheitskreis $\mathbb{D}$.*

BEWEIS: Wir zeigen genauer: *Ist $G \subset \mathbb{C}$ speziell, so gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine biholomorphe Abbildung $T : G \to \mathbb{D}$ mit $T(z_0) = 0$, deren Ableitung $T'(z_0)$ reell und > 0 ist.*

Der Punkt z_0 sei fest gewählt. Dann wird der Beweis in drei Schritten geführt :

1. Konstruiere injektive, holomorphe Abbildung $T_1 : G \to \mathbb{D}$ mit $T_1(z_0) = 0$, $T_1'(z_0)$ reell und größer Null. Das Gebiet $G_1 := T_1(G)$ ist dann auch speziell.

2. Betrachte die Familie

$$\mathcal{F} := \{f : G_1 \to \mathbb{D} \mid f \text{ holomorph und injektiv, } f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

   Wir zeigen: es gibt eine Abbildung $T_0 \in \mathcal{F}$ mit maximaler Ableitung im Nullpunkt.

3. T_0 bildet G_1 surjektiv auf $\mathbb{D}$ ab. (Dann ist $T := T_0 \circ T_1$ die gesuchte, biholomorphe Abbildung $T : G \to \mathbb{D}$.)

Wir kommen nun zur Ausführung. $G \subset \mathbb{C}$ sei das gegebene spezielle Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$.

1) o.B.d.A. sei $G \subset \mathbb{C}^*$, sonst verschieben wir G entsprechend.

Wenn jetzt der Nullpunkt nicht in G liegt, ist die Funktion identisch z holomorph und nullstellenfrei auf G. Weil G speziell ist, existiert eine holomorphe Quadratwurzel $q(z) = \sqrt{z}$ auf G. Die Funktion q ist injektiv, deshalb ist das Gebiet $G' := q(G) \subset \mathbb{C}^*$ biholomorph äquivalent zu G. Aber das Komplement von G' enthält eine ganze Kreisscheibe, denn mit $w \in G'$ ist $-w \notin G'$, sonst wäre die Wurzel auf G' nicht umkehrbar. Nehmen wir nun ein $w_0 \in G'$, dann gibt es wegen der Offenheit ein $\varepsilon > 0$, so dass die Menge $\overline{D_\varepsilon(w_0)}$ in G' liegt. Also muss der Kreis mit gleichem Radius um $-w_0$ ganz im Komplement G' liegen.

Betrachte nun den Automorphismus $g(z) := \dfrac{\varepsilon}{z + w_0}$ von $\overline{\mathbb{C}}$. Dann ist $g(\infty) = 0$ und $|g(z)| < 1$ für $|z + w_0| > \varepsilon$. Also bildet g die Menge $\overline{\mathbb{C} \setminus D_\varepsilon(-w_0)}$ nach $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ab, d.h. es gibt ein Gebiet $G'' \subset \mathbb{D}$, so dass $g \circ q : G \to G''$ eine biholomorphe Abbildung ist.

Sei $a := g(q(z_0))$ das Bild von dem ausgewählten Punkt z_0. Die Transformation

$$T_a(z) := \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

schickt a auf den Nullpunkt, oder hintereinandergeschaltet schickt die Abbildung $T_a \circ g \circ q$ den Punkt z_0 dorthin. Ist jetzt $(T_a \circ g \circ q)'(z_0) = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$ mit $r > 0$, $t \in [0, 2\pi)$, so wenden wir noch die Drehung $R_t(z) := e^{-\mathrm{i}\,t} \cdot z$ an, um den Punkt auf die positive relle Achse zu drehen. Dann erfüllt $T_1 := R_t \circ T_a \circ g \circ q$ die Forderungen des ersten Schrittes.

2) Sei $G_1 := T_1(G)$. Dann ist G_1 auch speziell. Wir benutzen die Familie

$$\mathcal{F} := \{f : G_1 \to \mathbb{D} \mid f \text{ holomorph und injektiv}, \, f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

Wir suchen ein $T_0 \in \mathcal{F}$, so dass $T_0'(0)$ maximal ist. $\mathcal{F}$ ist lokal-beschränkt, sogar gleichmäßig beschränkt. $\mathcal{F}$ ist nicht leer, da $\mathrm{id}_\mathbb{D}$ in $\mathcal{F}$ liegt.

Sei $\alpha := \sup\{f'(0) \mid f \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da $(\mathrm{id}_\mathbb{D})'(0) = 1$ gilt, ist $\alpha \geq 1$. α ist das Supremum, d.h. es gibt eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{F}$, deren Ableitungen im Nullpunkt gegen α konvergieren. Wegen der lokalen Beschränktheit und des Satzes von Montel erhält die Folge eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f_0 \in \mathcal{O}(G_1)$ konvergiert. Ohne Einschränkung sei (f_n) diese Teilfolge. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß konvergieren auch die Ableitungen (f_n') gegen f_0', deshalb gilt $f_0'(0) = \alpha < \infty$. Wegen $\alpha \geq 1$ ist f_0 nicht konstant. Nun liefert der Satz von Hurwitz, da alle f_n injektiv sind, und die Grenzfunktion f_0 nicht konstant ist, dass f_0 selbst injektiv ist. Da $|f_n| < 1$ für alle n ist, ist $|f_0| \leq 1$. Nach dem Maximumsprinzip muss $|f_0| < 1$ sein. Außerdem ist $f_0(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ und damit gezeigt : $f_0 \in \mathcal{F}$. Definiere nun $T_0 := f_0$, und der zweite Schritt ist fertig.

3) Behauptung: T_0 ist surjektiv (dann sind wir fertig, weil die Verkettung $T_0 \circ T_1 : G_1 \to \mathbb{D}$ biholomorph ist). Angenommen, $G_2 := T_0(G_1) \neq \mathbb{D}$, d.h. T_0 nicht surjektiv. Sei c ein Punkt aus $\mathbb{D} \setminus G_2$. Wir betrachten den Automorphismus

$$T_c(z) := \frac{z - c}{1 - \overline{c}z}.$$

T_c bildet den Nullpunkt nach $-c$ und den Punkt c nach Null ab. Definieren wir $G_3 := T_c(G_2)$, dann ist G_3 ein spezielles Gebiet, weil es biholomorphes Bild von G_1 ist. Außerdem ist der Nullpunkt nicht in G_3. Deshalb existiert eine holomorphe Quadratwurzel auf G_3, $p(z) = \sqrt{z}$, die natürlich injektiv ist. Auch das Bild $p(G_3)$ ist vollständig im Einheitskreis enthalten. Wir setzen jetzt eine Transformation an:

$$T_{\lambda,d}(z) := e^{\mathrm{i}\,\lambda} \cdot \frac{z - d}{1 - \overline{d}z}, \text{ mit } d := p(-c).$$

Den Parameter λ wollen wir später wählen. Die Verkettung

$$S := T_{\lambda,d} \circ p \circ T_c : G_2 \to \mathbb{D},$$

ist auch injektiv. Jetzt wählen wir λ so, dass die Ableitung $S'(0)$ reell und größer Null ist. Das geht, da die Ableitung wegen der Injektivität ungleich Null ist; λ muss den Wert dann noch entsprechend auf die reelle Achse drehen. Definieren wir $p^*(z) := z^2$ und damit

$$S^* := T_c^{-1} \circ p^* \circ T_{\lambda,d}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D},$$

so ist $S^* \circ S|_{G_2} = \mathrm{id}_{G_2}$. Weil $S^*(0) = 0$ ist, ist das Schwarzsche Lemma auf S^* anwendbar, und es folgt

$$|(S^*)'(0)| \leq 1.$$

Wäre der Betrag der Ableitung in Null gleich Eins, also S^* eine Drehung, dann wäre

$$p^*(z) = T_c \circ S^* \circ T_{\lambda,d}$$

ein Automorphismus des Einheitskreises, was aber nicht der Fall ist.

Also ist $|(S^*)'(0)| < 1$. Dann ist aber $|S'(0)| > 1$, und weil $S'(0)$ reell und > 0 ist, ist sogar $S'(0) > 1$. Damit definieren wir eine Abbildung

$$h := S \circ T_0 : G_1 \to \mathbb{D}.$$

h ist eine holomorphe, injektive Abbildung, die den Nullpunkt fix lässt. Für die Ableitung h' gilt aber

$$h'(0) = S'(0) \cdot T_0'(0) > T_0'(0).$$

Das ist ein Widerspruch ! Also ist T_0 surjektiv und wir sind fertig. ∎

1.14 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent :*

1. *G ist gleich $\mathbb{C}$ oder biholomorph äquivalent zum Einheitskreis.*
2. *G ist einfach zusammenhängend.*
3. *Das Komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend.*
4. *Für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ und jeden Zyklus Γ in G gilt :*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

5. *Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ hat auf G eine Stammfunktion.*
6. *Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei, so besitzt f einen Logarithmus.*
7. *G ist speziell.*

Beweis: Von dem Ringschluss haben wir schon einige Schritte in Funktionentheorie 1 gezeigt.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Jede sternförmige Menge (und jedes biholomorphe Bild einer solchen Menge) ist einfach zusammenhängend.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Sei G einfach zusammenhängend. Angenommen, $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, in der Relativtopologie offene Mengen U_1 und U_2, die disjunkt sind, deren Vereinigung aber ganz $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist. Die U_i sind

abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ und deshalb auch schon in $\overline{\mathbb{C}}$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung sei $\infty \in U_1$, dann setzen wir $A_1 := U_1 \setminus \{\infty\}$, $A_2 := U_2$. Die A_i sind abgeschlossen in $\mathbb{C}$, und die Menge A_2 ist zusätzlich noch beschränkt, insgesamt also kompakt. Das ist aber ein Widerspruch !

(3) $\implies$ (4): Sei jetzt $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend, Γ ein Zyklus in G und C die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma|$. Die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend und enthalten in $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma|$, deshalb muss $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ganz in der unbeschränkten Komponente C enthalten sein. Das bedeutet aber, dass jeder innere Punkt von Γ schon in G liegen muss. Γ ist nullhomolog in G.

(4) $\implies$ (5): Schon gezeigt!

(5) $\implies$ (6): Schon gezeigt!

(6) $\implies$ (7): Schon gezeigt!

(7) $\implies$ (1) ist der Riemannsche Abbildungssatz. ∎