§ 5 Meromorphe Funktionen auf beliebigen Gebieten

Wir wollen den Satz von Mittag-Leffler verallgemeinern, dazu benötigen wir aber noch ein kleines Hilfsmittel.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Unter einer *kompakten Ausschöpfung* von G versteht man eine Folge (K_n) von kompakten Teilmengen von G, so dass gilt:

1. Für alle n ist $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

2. Die Vereinigung aller K_n ergibt das Gebiet G.

Man überlegt sich dann sofort, dass jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ in einer Menge K_n enthalten ist. Die Existenz solcher Ausschöpfungen ist trivial, man setze z.B.

$$K_n := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \le n\} \cap \{z \in G \,:\, \operatorname{dist}(z, \partial G) \ge 1/n\}.$$

5.1 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gibt es eine kompakte Ausschöpfungsfolge von G, die zusätzlich „Rungesch" ist, d.h. für die gilt: $\widehat{K}_n = K_n$.*

BEWEIS: Sei eine gewöhnliche kompakte Ausschöpfungsfolge gegeben. Wir definieren die gesuchte Folge (K_n^*) induktiv :

1. $K_1^* := \widehat{K}_1$.

2. Seien $K_1^*, \ldots, K_n^*$ gewählt. Weil K_n^* kompakt ist, existiert ein $\lambda_n \in \mathbb{N}$, so dass $K_n^* \subset \overset{\circ}{K}_{\lambda_n}$.
   Setze dann $K_{n+1}^* := \widehat{K}_{\lambda_n}$.

Dann ist die Folge (K_n^*) eine Rungesche Ausschöpfungsfolge. ∎

5.2 Satz von Mittag-Leffler für allgemeine Gebiete. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $P \subset G$ eine in G diskrete Menge, geschrieben als Folge (a_k), mit zugehörigen Hauptteilen*

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{k_j}}{(z-a_k)^j}.$$

Dann gibt es eine auf G meromorphe Funktion, die die Hauptteilverteilung löst.

BEWEIS: Ohne Einschränkung sei P unendlich. Sei K_n eine Rungesche kompakte Ausschöpfungsfolge für G. Zunächst teilen wir die natürlichen Zahlen in eine Familie von Indexmengen auf:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{k \in \mathbb{N} \,:\, a_k \in K_1\}, \\ \text{und} \quad I_n &:= \{k \in \mathbb{N} \,:\, a_k \in K_n \setminus K_{n-1}\} \text{ für } n \ge 2. \end{aligned}$$

Jede Indexmenge I_n ist endlich, weil die Folge (a_k) diskret in G ist. Nun setzen wir

$$f_n(z) := \sum_{k \in I_n} h_k(z)$$

(und insbesondere $f_n := 0$, wenn I_n leer ist). Dann ist f_n jeweils eine rationale Funktion mit Polen höchstens in $K_n \setminus K_{n-1}$.

Für $n \geq 2$ ist f_n auf K_{n-1} holomorph. Deshalb ist der Satz von Runge anwendbar; er liefert die Existenz einer rationalen Funktion R_n mit Polen in $\mathbb{C} \setminus G$, die folgender Abschätzung genügt:

$$|f_n(z) - R_n(z)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für } z \in K_{n-1}.$$

Setze dann

$$f(z) := f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n(z) - R_n(z)) .$$

Die kompakte Konvergenz folgt sofort: Ist $K \subset G$ kompakt, dann gibt es ein n, so dass $K \subset K_n$ gilt. Deshalb ist die Differenz $f_\nu - R_\nu$ holomorph auf K für $\nu > n$. Außerdem wird die Reihe $\sum\limits_{\nu > n} (f_\nu - R_\nu)$ majorisiert durch $\sum\limits_{\nu > n} (\frac{1}{2})^\nu$. Also ist f eine auf G meromorphe Funktion mit gesuchter Hauptteilverteilung. ∎

Bemerkung. Der Beweis für $\mathbb{C}$ lieferte genaues Aussehen und genaue Abschätzungen, sowie eine Konstruktion der meromorphen Funktion. Der allgemeine Beweis ist ein reiner Existenzbeweis.

Unser nächstes Ziel wird es jetzt sein, den Produktsatz für beliebige Gebiete zu beweisen.

5.3 Satz von Weierstraß (für beliebige Gebiete). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist jede Nullstellenverteilung auf G lösbar.*

Beweis: Sei $G \neq \mathbb{C}$, $D \subset G$ diskret, unendlich, aber nicht diskret in $\mathbb{C}$. Dass D in G diskret ist, ist notwendig zur Lösbarkeit der Nullstellenverteilung. Den endlichen sowie den in $\mathbb{C}$ diskreten Fall haben wir schon gelöst.

$(n_a)_{a \in D}$ seien die Vielfachheiten, und $D = \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ sei als Folge geschrieben. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jede Vielfachheit gleich 1 ist, indem wir in der Folge den Punkt entsprechend oft vorkommen lassen.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. Es existiert ein $R > 0$, so dass die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (a) $D \subset D_R(0)$, also D beschränkt,

(b) $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)} \subset G$, d.h. G ist Umgebung von Unendlich.

2. G und D sind beliebig.

Zunächst führen wir den zweiten Fall auf den ersten zurück. Dafür wählen wir ein $a_0 \in G$ und ein $r > 0$, so dass $\overline{D_r(a_0)} \subset G$, aber $\overline{D_r(a_0)} \cap D = \varnothing$ ist.

Dann definieren wir $F(z) := \dfrac{1}{z - a_0}$ und $G' := F(G \setminus \{a_0\})$. Mit $R := 1/r$ ist für G' der erste Fall erfüllt, denn mit $z \in D$ ist $|z - a_0| > r$ und deshalb $|F(z)| = |\frac{1}{z-a_0}| < R$. Also ist $D' := F(D) \subset D_R(0)$ beschränkt und natürlich diskret in G'. Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$, also $|z| > R$, so setze man $w := a_0 + 1/z$. Dann ist $|w - a_0| < r$, $w \neq a_0$ und $F(w) = z$, also $w \in G \setminus \{a_0\}$ und $z \in G'$.

Ist jetzt f eine Lösung für D' auf G' mit der **Zusatzbedingung**

$$\lim_{w \to \infty} f(w) = 1,$$

so ist $\widehat{f} := f \circ F$ holomorph fortsetzbar nach a_0 und nimmt dort den Grenzwert von f in Unendlich an. Weil der aber $\neq 0$ ist, hat $\widehat{f}$ genau die gesuchten Nullstellen in D.

Wenden wir uns deshalb dem ersten Fall zu, ohne zu vergessen, dass wir dort noch für die Zusatzbedingung sorgen werden müssen.

Sei $R > 0$ wie gefordert. Dann ist $\mathbb{C} \setminus G \subset \overline{D_R}$, d.h. $\mathbb{C} \setminus G$ beschränkt. Außerdem ist $\mathbb{C} \setminus G$ nicht leer und abgeschlossen. Das bedeutet aber, dass $\mathbb{C} \setminus G$ kompakt ist. Deshalb gibt es eine Folge b_ν in $\mathbb{C} \setminus G$, so dass $\delta_\nu := \operatorname{dist}(a_\nu, \mathbb{C} \setminus G) = |a_\nu - b_\nu|$ ist. Da D in G diskret ist, streben die δ_ν für $\nu \to \infty$ gegen Null.

Wir erinnern uns an die Funktionen

$$E_n(z) := (1 - z) \cdot \exp\bigl(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\bigr).$$

Ist $|z| \leq 1$, so ist $|1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}$.

Behauptung: Die Funktion

$$f(z) := \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right)$$

konvergiert auf G kompakt, die Grenzfunktion ist holomorph und löst die gegebene Nullstellenverteilung.

Letzteres sehen wir sofort ein, denn falls das Produkt existiert, gilt $f(z) = 0$ genau dann, wenn $z = a_\nu$ für ein ν ist, also $z \in D$.

Zeigen wir nun die kompakte Konvergenz. Dazu sei $K \subset G$ kompakt. Dann gibt es ein ν_0, so dass $|z - b_\nu| > 2|a_\nu - b_\nu| = 2\delta_\nu$ für alle $\nu \geq \nu_0$ und alle $z \in K$ gilt, denn es ist $|z - b_\nu| \geq \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus G) > 0$, die δ_ν aber streben gegen Null. Es folgt

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{für } \nu > \nu_0, z \in K.$$

Dann gilt nach unseren Überlegungen über E_ν :

$$|1 - E_\nu(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu})| \le (\frac{1}{2})^{\nu+1},$$

und deshalb konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - E_\nu(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu})\right)$$

auf K absolut gleichmäßig. Daraus folgt, dass f holomorph auf G ist.

Behauptung: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$.

Zum BEWEIS: Da $|a_\nu - b_\nu|$ als konvergente Folge beschränkt und $|z - b_\nu| \ge \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus G)$ ist, strebt der Bruch $X_\nu(z) := \dfrac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}$ unabhängig von ν für $|z| \to \infty$ gegen Null und $E_\nu(X_\nu(z))$ aus Stetigkeitsgründen gegen 1. Deshalb ist der Logarithmus dort definiert, und es gilt:

$$f(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(\frac{a_\nu - b_\nu}{z - b_\nu}) = \exp \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \log E_\nu(X_\nu(z))\right)}_{\text{z.z.: dies strebt gegen 0}}.$$

Wir benutzen jetzt wieder die früher bewiesene Abschätzung für den Logarithmus:

Ist $|u|$ klein genug, so gilt $|\log(1 + u)| \le \frac{3}{2}|u|$.

Für u setzen wir $u_\nu(z) := E_\nu(X_\nu(z)) - 1$ ein. Zu jedem ε (mit $0 < \varepsilon < 1$) gibt es ein $R = R_\varepsilon > 0$, so dass $|X_\nu(z)| < \varepsilon$ für $|z| > R$ und alle ν gilt. Dann ist $|1 - E_\nu(X_\nu(z))| \le |X_\nu(z)|^{\nu+1} < \varepsilon^{\nu+1}$. Wir wählen ε so, dass $u_\nu(z)$ „genügend klein" ist, also

$$|\log(E_\nu(X_\nu(z)))| \le \frac{3}{2}|E_\nu(X_\nu(z)) - 1| \le \frac{3}{2}\varepsilon^{\nu+1} \text{ für } |z| > R \text{ und alle } \nu.$$

Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\log E_\nu(X_\nu(z))| \le \frac{3}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu+1} = \frac{3}{2}\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon} \text{ für } |z| > R.$$

Zu jedem $\delta > 0$ kann man ein ε finden, so dass $\dfrac{3}{2}\varepsilon^2 \cdot \dfrac{1}{1 - \varepsilon} < \delta$ ist, und dazu ein $R > 0$, so dass dann $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\log E_\nu(X_\nu(z))| \le \delta$ für $|z| > R$ ist. Daraus folgt die

Zusatzbedingung. Nun ist alles gezeigt, da der zweite Fall vollständig auf den ersten zurückgeführt werden konnte. ∎

5.4 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{M}(G)$ eine meromorphe Funktion. Dann gibt es holomorphe Funktionen $g, h \in \mathcal{O}(G)$, so dass $f = \dfrac{g}{h}$ deren Quotient ist.*

BEWEIS: Sei $(h_a)_{a \in D}$ die Hauptteilverteilung von f, (n_a) die Folge der jeweiligen Polstellenordnung. Dann kann $(n_a)_{a \in D}$ auch als Nullstellenverteilung angesehen werden. Nach dem allgemeinen Weierstraßschen Produktsatz gibt es eine passende Funktion $h \in \mathcal{O}(G)$, die die Nullstellenverteilung löst. Dann ist die Funktion $g := h \cdot f$ holomorph, da alle Pole behoben sind. Das bedeutet aber $f = \dfrac{g}{h}$. ∎

Bemerkung. In algebraischer Sprechweise bedeutet die Folgerung: Der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(G)$ ist $\mathcal{M}(G)$.

Wir kehren noch einmal zum Mittag-Leffler-Problem zurück:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $P \subset G$ eine in G diskrete Menge, geschrieben als Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, mit zugehörigen Hauptteilen

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{k_j}}{(z - a_k)^j}.$$

Für jedes k sei U_k eine offene Umgebung von a_k, die keinen anderen Punkt a_j mit $j \neq k$ enthält. Außerdem sei $U_0 := G \setminus P$. Dann ist $\mathcal{U} = \{U_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine offene Überdeckung von G. Für jedes k ist durch h_k eine meromorphe Funktion auf U_k gegeben (wenn man $h_0 := 0$ setzt). Auf $U_i \cap U_j$ ist $f_{ij} := h_j - h_i$ jeweils holomorph.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ eine offene Überdeckung. Unter einem *holomorphen Cozyklus* zur Überdeckung $\mathcal{U}$ versteht man ein System von Funktionen $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j$, so dass gilt:

1. $f_{ji} = -f_{ij}$, für alle i, j.
2. $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Offensichtlich liefert jede Mittag-Leffler-Verteilung einen holomorphen Cozyklus.

Definition. Ein holomorpher Cozyklus (f_{ij}) zur Überdeckung $\mathcal{U}$ wird als *Corand* bezeichnet, wenn es Funktionen $g_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota)$ gibt, so dass $f_{ij} = g_j - g_i$ auf $U_i \cap U_j$ ist.

5.5 Satz. *Eine Mittag-Leffler-Verteilung auf G ist genau dann lösbar, wenn der zugehörige Cozyklus ein Corand ist.*

BEWEIS: Es ist $f_{ij} = h_j - h_i$, mit meromorphen Funktionen h_ι. Ist (f_{ij}) ein Corand, also $f_{ij} = g_j - g_i$ mit holomorphen Funktionen g_ι, so ist

$$h_j - g_j = h_i - g_i \text{ auf } U_i \cap U_j.$$

Durch $h|_{U_i} := h_i - g_i$ wird eine meromorphe Funktion h auf G definiert, die die richtigen Hauptteile besitzt.

Ist umgekehrt eine meromorphe Lösung h gegeben, so ist $f_i := h_i - h$ auf U_i holomorph und $f_j - f_i = h_j - h_i = f_{ij}$. ∎

Bezeichnet man mit $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ den Vektorraum der holomorphen Cozyklen und mit $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ den Unterraum der Coränder, so erhält man als Quotientenvektorraum die *1. Cohomologiegruppe von $\mathcal{O}$ zur Überdeckung $\mathcal{U}$*:

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})/B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

Es gilt:

Ist $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$, so ist jede Mittag-Leffler-Verteilung zur Überdeckung $\mathcal{U}$ lösbar.

Für Gebiete in $\mathbb{C}$ liefert uns diese Aussage nichts Neues, aber sie lässt sich leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Beim Weierstraß-Problem kann man ähnlich vorgehen. Hier sind „Nullstellen“ $f_i(z) = (z - a_i)^{n_i}$ gegeben (bzw. $f_i(z) \equiv 1$, falls in U_i keine Nullstelle liegt). Auf $U_{ij} = U_i \cap U_j$ ist $g_{ij} := f_i/f_j$ holomorph ohne Nullstellen. Diese Funktionen liefern einen *multiplikativen Cozyklus*, also Funktionen $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ mit den Eigenschaften

1. $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$.
2. $g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$ auf $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

Ein *Corand* ist in diesem Fall ein System von Funktionen $g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ mit $g_i g_j^{-1} = g_{ij}$ auf U_{ij}. Eine Weierstraß-Verteilung (f_i) ist genau dann lösbar, wenn der zugehörige Cozyklus $g_{ij} = f_i f_j^{-1}$ ein Corand ist. Dann wird durch $f|_{U_i} := f_i g_i^{-1}$ wird dann eine holomorphe Funktion mit den geforderten Nullstellen gegeben.

Ich verzichte hier auf die Definition der passenden Cohomologiegruppe.