§ 4 Der Rungesche Approximationssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subset G$ kompakt. $\mathcal{C}^0(K)$ ist ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, der bezüglich der Supremumsnorm vollständig ist. Die Norm induziert eine Topologie, bezüglich der alle Vektorraum-Operationen stetig sind. Man spricht daher von einem „topologischen Vektorraum“.

Definition. Der Raum der holomorphen Funktionen auf K wird definiert als

$$\mathcal{O}(K) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(K) \;:\; \exists\, U = U(K) \text{ offen}, \widehat{f} \in \mathcal{O}(U) \text{ mit } \widehat{f}|_K = f \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}(K) \subset \mathcal{C}^0(K)$ ein Untervektorraum, versehen mit der Relativtopologie. Im allgemeinen ist $\mathcal{O}(K)$ aber nicht abgeschlossen.

Wir betrachten die Einschränkungsabbildung

$$\varrho : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(K)$$

$$f \mapsto f|_K.$$

Ist $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine Folge von Funktionen, die auf G kompakt gegen eine Funktion f konvergiert, dann konvergiert $(f_n|_K)$ gleichmäßig gegen $f|_K$, d.h. ϱ ist stetig (und natürlich eine lineare Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen). Wir wollen zeigen, dass unter einer weiteren Zusatzbedingung das Bild $\varrho(\mathcal{O}(G)) \subset \mathcal{O}(K)$ dicht ist. Die Aussage ist gleichbedeutend damit, dass jede auf K holomorphe Funktion dort beliebig gut mit Funktion aus $\mathcal{O}(G)$ approximiert werden kann.

Beispiel.

Sei $G := \mathbb{C}$, $K := K_1 \cup K_2$ die Vereinigung zweier disjunkter abgeschlossener Kreisscheiben in G. Der Identitätssatz sagt, dass es keine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ gibt, so dass $f|_{K_1} \equiv 0$ und $f|_{K_2} \equiv 1$ ist.
Ist aber $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $f \in \mathcal{O}(G)$, das auf K bis auf ε diese Forderung erfüllt :

$$|(f|_{K_1})| < \varepsilon \text{ und } |(f|_{K_2}) - 1| < \varepsilon.$$

Dieses Ergebnis liefert der folgende

4.1 Satz von Runge. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt. Keine Zusammenhangskomponente von $G \setminus K$ liege relativ-kompakt in G. Dann gibt es zu jeder Funktion $f \in \mathcal{O}(K)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine rationale Funktion R, so dass gilt:*

1. *R hat nur Pole in $\mathbb{C} \setminus G$,*
2. *$|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ für $z \in K$.*

Bemerkungen.

1. Der Satz gilt für jedes offene G, der Zusammenhang spielt keine Rolle.

2. Eine Zusammenhangskomponente C von $G \setminus K$ ist relativ-kompakt in G, falls $\overline{C}$ kompakt ist und $\overline{C} \subset G$ gilt. Dann darf C nicht an den Rand von G heranreichen. Im Beweis werden wir sehen, wofür diese topologische Forderung gebraucht wird.

Beweis:

1. Wir erinnern zunächst an ein Ergebnis aus der Funktionentheorie 1 : Ist $U = U(K) \subset G$ offene Umgebung von K, so existiert ein Zyklus Γ, der K in U umläuft, d.h. $|\Gamma| \subset U \setminus K$, so dass

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in K, \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus U. \end{cases}$$

2. Wir konstruieren eine rationale Funktion R mit Polen, die nicht in K liegen, so dass gilt:

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon \quad \text{für } z \in K.$$

Dazu seien U und Γ wie in (1) gewählt. Dann können wir Γ als Linearkombination von stetig differenzierbaren Wegen γ_j mit Definitionsbereich $[0, 1]$ schreiben:

$$\Gamma = \sum_j n_j \cdot \gamma_j.$$

Dabei können wir annehmen, dass es zu jedem j eine Kreisscheibe $D_j = D_{r_j}(c_j)$ gibt, so dass gilt:

(a) $\operatorname{dist}(c_j, K) > 2r_j$.

(b) $|\gamma_j| \subset D_j$.

Für $z \in K$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \sum_j n_j \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Da die Summe endlich ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine rationale Funktion R_j mit Polen außerhalb K existiert, so dass

$$|R_j(z) - \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta| < \varepsilon$$

für alle $z \in K$ erfüllt ist.

Nach dem Entwicklungs-Lemma (Funktionentheorie I, Kapitel II, §2) ist

$$f_j(z) := \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma_j|$ holomorph, und es ist $f = \sum_j n_j f_j$. Außerdem verschwindet $f_j(z)$ für $z \to \infty$.

Auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_j}$ besitzt f_j eine Laurententwicklung

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}^{(j)}(z - c_j)^{-\nu}\,,$$

die kompakt (und deshalb auf K gleichmäßig) konvergiert.

Die Folge der rationalen Funktionen

$$R_N(z) = \sum_j n_j \cdot \sum_{\nu=1}^{N} a_{-\nu}^{(j)}(z - c_j)^{-\nu}$$

konvergiert auf K gleichmäßig gegen f, und die Funktionen haben nur Polstellen in den Punkten c_j, also außerhalb von K.

3. Als nächstes führen wir die sogenannte **Polstellenverschiebung** durch:

   Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $a, b \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, $a \neq \infty$. Außerdem seien a, b innerhalb von $U := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ durch einen Integrationsweg verbindbar.

   Behauptung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine rationale Funktion R mit höchstens einem Pol in b, so dass gilt:

$$\left|\frac{1}{z-a} - R(z)\right| < \varepsilon \quad \text{für } z \in K.$$

   Sei zunächst auch $b \neq \infty$. Da a und b in U verbindbar sind, liegen sie in der gleichen Zusammenhangskomponente C von $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Nach der Entfernung von ∞ aus U entsteht wieder ein Gebiet, d.h. a und b sind auch in $\mathbb{C} \setminus K$ mittels eines Weges γ verbindbar.

   Wir konstruieren nun eine Kreiskette $(D_1, \ldots, D_k)$ längs γ, gegeben durch eine Zerlegung des Intervalls $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ und Kreise $D_i = D_r(a_i)$ mit Mittelpunkt $a_i := \gamma(t_i)$ und Radius r. Zusätzlich sei jeweils $a_{i-1} \in D_r(a_i)$ und $D_{2r}(a_i) \cap K = \varnothing$. Dann ist $a = a_0 = \gamma(t_0)$, die rationale Funktion $1/(z-a)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(a_1)}$ und es existiert dort eine Laurententwicklung

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{1,\nu}}{(z-a_1)^{\nu}},$$

wobei der erste Koeffizient direkt ermittelt werden kann:

$$b_{1,1} = \lim_{z\to\infty} \frac{z-a_1}{z-a_0} = 1.$$

Die Laurententwicklung konvergiert auf K gleichmäßig gegen $1/(z-a)$, deshalb gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für

$$h_1(z) := \frac{1}{z-a_1} + \sum_{\nu=2}^{n_1} \frac{b_{1,\nu}}{(z-a_1)^\nu}$$

gilt:

$$|\frac{1}{z-a} - h_1(z)| < \frac{\varepsilon}{k} \qquad \text{für } z \in K.$$

Die Funktion h_1 ist rational und hat höchstens einen Pol in a_1.

Im zweiten Schritt wird h_1 in eine Laurentreihe um a_2 entwickelt:

$$h_1(z) = \frac{1}{z-a_2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{b_{2,\nu}}{(z-a_2)^\nu}.$$

Dann gibt es ein n_2, so dass die endliche Summe

$$h_2(z) = \frac{1}{z-a_2} + \sum_{\nu=2}^{n_2} \frac{b_{2,\nu}}{(z-a_2)^\nu}$$

die Funktion h_1 auf K bis auf $\dfrac{\varepsilon}{k}$ approximiert. h_2 hat höchstens einen Pol in $z = a_2$.

So fährt man fort. Nach k Schritten erhält man eine rationale Funktion $R(z) = h_k(z)$ mit nur einem Pol in $a_k = b$, so dass gilt:

$$|\frac{1}{z-a} - R(z)| \le |\frac{1}{z-a} - h_1(z)| + \cdots + |h_{k-1}(z) - h_k(z)| < \varepsilon.$$

Ist $b = \infty$, so wählen wir auf dem Verbindungsweg $|\gamma|$ ein b_0, so dass $K \subset \{z : |z| < \frac{1}{2}|b_0|\}$ ist. Dann gibt es eine rationale Funktion R_0 mit höchstens einem Pol in b_0, so dass

$$|\frac{1}{z-a} - R_0(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $z \in K$ ist. Die Funktion R_0 wird auf K gleichmäßig durch ihre Taylorreihe approximiert, also gibt es ein Taylorpolynom R, so dass $|R_0(z) - R(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ auf K gilt. Aber dann ist $|\dfrac{1}{z-a} - R(z)| < \varepsilon$ für $z \in K$; R ist ein Polynom, hat also einen Pol in $b = \infty$.

4. Kommen wir zum Schluss des Beweises :

   Von der gegebenen Funktion $f \in \mathcal{O}(K)$ können wir nach Teil (2) annehmen, dass sie rational mit Polen außerhalb von K ist. Mit Partialbruchzerlegung lässt sich f in eine Summe von Funktionen mit genau einem Pol zerlegen. O.B.d.A. besitze f nur eine einzige Polstelle a.

   Ist $a \notin G$, so sind wir fertig. Sonst betrachten wir die Zusammenhangskomponente C von $G \setminus K$, die a enthält.

   Ist C unbeschränkt, so kann a nach Unendlich verschoben und f auf K gleichmäßig mit Polynomen approximiert werden.

   Ist C beschränkt, so ist $\overline{C}$ kompakt. Da es keine relativ-kompakte Zusammenhangskomponente von $G \setminus K$ gibt, existiert ein $b \in \overline{C} \setminus G$. Sei

   $$\delta := \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus G) > 0$$

   der Abstand von K zum Rand ∂G. Für $D := D_{\frac{\delta}{2}}(b)$ ist $D \cap K = \varnothing$, aber $D \cap C \neq \varnothing$. Wählen wir ein $b_0 \in D \cap C$, so kann a mit b_0 in C sowie b_0 mit b in D verbunden werden. Wir erhalten einen Weg, der außerhalb K die Punkte a und b verbindet, und dann verschieben wir den Pol nach $b \notin G$. Damit ist alles gezeigt.

■

4.2 Folgerung (2. Fassung des Satzes von Runge). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :*

1. *Das Bild der Einschränkungsabbildung $\varrho : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(K)$ ist dicht in $\mathcal{O}(K)$.*
2. *Keine Zusammenhangskomponente von $G \setminus K$ liegt relativ-kompakt in G.*
3. *Zu jedem $a \in G \setminus K$ existiert ein $f \in \mathcal{O}(G)$, so dass $|f(a)| > \sup_K |f|$ ist.*

Beweis: Wir führen einen Ringschluss durch:

(2) $\Longrightarrow$ (1): Das ist genau der Satz von Runge.

(3) $\Longrightarrow$ (2): Angenommen, es gibt eine Zusammenhangskomponente C von $G \setminus K$, die relativ-kompakt in G liegt. Dann ist $\overline{C} \subset G$ kompakt.

Behauptung: Es ist $\partial C \subset K$.

Zum Beweis: Angenommen, es gibt ein $z \in \partial C \setminus K$. Dann wähle eine Kreisscheibe $D = D_r(z) \subset G \setminus K$. Das geht, da $G \setminus K$ offen ist. Also ist $G \cap C$ nicht leer und deshalb $D \cup C \subset G \setminus K$ eine zusammenhängende Menge. Also muss $D \cup C \subset C$ sein, da C eine Zusammenhangskomponente ist. Das ist aber ein Widerspruch, da D Umgebung eines Randpunktes von C ist. Also ist $\partial C \subset K$.

Ist $a \in C$, so gibt es nach Vorraussetzung eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $|f(a)| > \sup_K |f|$. Allerdings liefert das Maximumsprinzip :

$$|f(a)| \le \sup_{\partial C} |f| \le \sup_K |f|.$$

Das ist ein Widerspruch !

Der letzte Schritt: (1) $\Longrightarrow$ (3): Sei $a \in G \setminus K$ beliebig. Die Menge $L := K \cup \{a\}$ ist kompakt und liegt in G.

Behauptung: Keine Zusammenhangskomponente von $G \setminus L$ ist relativ-kompakt in G.

Zum Beweis betrachten wir die Zerlegung

$$G \setminus K = \bigcup_{i \in I} C_i$$

in Zusammenhangskomponenten. Es gibt ein $\varrho \in I$, so dass $a \in C_\varrho$ ist. Damit ist aber

$$G \setminus L = (C_\varrho \setminus \{a\}) \cup \bigcup_{i \neq \varrho} C_i$$

auch eine Zerlegung in Zusammenhangskomponenten. Da die Abschlüsse $\overline{C_\varrho \setminus \{a\}} = \overline{C_\varrho}$ gleich sind, kann $G \setminus L$ nur dann eine relativ-kompakte Zusammenhangskomponente besitzen, wenn auch $G \setminus K$ eine besitzt.

Angenommen, es gibt eine relativ-kompakte Zusammenhangskomponente C von $G \setminus K$. Dann wissen wir, dass $\partial C \subset K$ sein muss. Wählen wir ein $z_0 \in C$ und setzen wir $g(z) := 1/(z - z_0)$, so ist $g|_K \in \mathcal{O}(K)$. Nach Annahme existiert dann eine Folge $(g_n) \subset \mathcal{O}(G)$, die auf K gleichmäßig gegen g konvergiert. Es folgt:

$$|g_n - g_m|_{\overline{C}} = |g_n - g_m|_{\partial C} \le |g_n - g_m|_K.$$

Weil die g_n in der Supremumsnorm auf K eine Cauchyfolge bilden, tun sie das wegen des Maximumsprinzips auch auf C. Also konvergieren die g_n auch gleichmäßig auf C gegen eine Funktion $\widetilde{g} \in \mathcal{O}(C)$.

Auf dem Rand ∂C konvergiert $(z - z_0)g_n(z)$ gleichmäßig gegen $(z - z_0)g(z) \equiv 1$. Mit dem Maximumsprinizip folgt außerdem:

$$|(z - z_0)g_n(z) - 1|_C \le |(z - z_0)g_n(z) - 1|_{\partial C},$$

also konvergiert $(z - z_0)g_n(z)$ auf C gleichmäßig gegen 1. Das bedeutet:

$$(z - z_0)\widetilde{g}(z) \equiv 1 \text{ auf } C.$$

Im Punkt $z = z_0 \in C$ ergibt das einen Widerspruch, weil die linke Seite dort verschwindet. Demnach gibt es keine relativ-kompakte Zusammenhangskomponente von $G \setminus K$.

Wir definieren jetzt

$$f_0(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in K \\ 1 & \text{für } z = a \end{cases}$$

Dann ist $f_0 \in \mathcal{O}(L)$, da der Punkt a eine Umgebung hat, die K nicht trifft. Der Satz von Runge ist anwendbar, weil es keine relativ-kompakten Zusammenhangskomponenten gibt. Er liefert die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$, für die $|f - f_0|_L < \frac{1}{2}$ gilt.

Die Funktion f erfüllt die Bedingung $|f(a)| > |f|_K$, denn es gilt

$$|f|_K = |f - f_0|_K \leq |f - f_0|_L < \frac{1}{2},$$

und in a haben wir die Abschätzung

$$\frac{1}{2} > |f(a) - f_0(a)| = |f(a) - 1| \geq 1 - |f(a)|.$$

Damit ist $|f(a)| \geq \frac{1}{2} > |f|_K$. ∎

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt. Dann heißt

$$\widehat{K} := \{z \in G \,:\, |f(z)| \leq |f|_K \text{ für alle } f \in \mathcal{O}(G)\}$$

die *holomorph-konvexe Hülle* von K in G.

Wir beweisen erst einmal einige Eigenschaften der holomorph-konvexen Hülle:

4.3 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subset G$ kompakt. Dann gilt:*

1. *$K \subset \widehat{K} \subset G$.*
2. *$\widehat{K}$ ist kompakt.*
3. *$\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.*
4. *Ist $K_1 \subset K_2$, so gilt $\widehat{K}_1 \subset \widehat{K}_2$.*
5. *$\widehat{K} = K \cup \bigcup_{i \in I_0} C_i$, wobei die C_i alle diejenigen Zusammenhangskomponenten von $G \setminus K$ durchlaufen, die relativ-kompakt in G liegen.*

Beweis:

1. ist klar.
2. Wir zeigen zunächst: $\widehat{K}$ ist abgeschlossen in G.

   Sei $z_0 \in G \setminus \widehat{K}$. Dann gibt es eine Funktion $f_0 \in \mathcal{O}(G)$ mit $|f_0(z_0)| > |f_0|_K$. Wegen der Stetigkeit von f_0 gibt es eine offene Umgebung $U = U(z_0)$, so dass $|f_0(z)| > |f_0|_K$ für alle $z \in U$ ist. Das heißt, $G \setminus \widehat{K}$ ist offen bzw. $\widehat{K}$ ist abgeschlossen in G.

Angenommen, $\widehat{K}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Dann gibt es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \widehat{K}$ und eine Folge $(z_n) \subset \widehat{K}$, die gegen z_0 konvergiert. Da $\widehat{K}$ abgeschlossen in G ist, muss z_0 außerhalb von G liegen. Die Folge (z_n) liegt aber vollständig in $\widehat{K} \subset G$, d.h. $z_0 \in \partial G$ ist ein Randpunkt von G. Deshalb ist die Funktion $f(z) = 1/(z - z_0)$ holomorph auf G. Die Folge der Werte $|f(z_n)|$ strebt gegen Unendlich, aber es ist

$$|f(z_n)| \le |f|_K < \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das ist ein Widerspruch! Also ist $\widehat{K}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

Nun fehlt noch die Beschränktheit von $\widehat{K}$. Da K beschränkt ist, existiert ein $R > 0$, so dass $K \subset \overline{D_R(0)}$ liegt. Die Funktion $g(z) := z$ ist holomorph auf G, deshalb gilt für $z \in \widehat{K}$

$$|z| = |g(z)| \le |g|_K \le R.$$

Damit ist $\widehat{K}$ kompakt.

3. Wegen (1) ist zumindest $\widehat{K} \subset \widehat{\widehat{K}}$. Ist andererseits $z \in \widehat{\widehat{K}}$, so ist

   $$|f(z)| \le |f|_{\widehat{K}} = |f|_K \quad \text{für jedes } f \in \mathcal{O}(G),$$

   d.h. $z \in \widehat{K}$.

4. Es sei $K_1 \subset K_2$ und $z \in \widehat{K}_1$. Dann gilt:

   $$|f(z)| \le |f|_{K_1} \le |f|_{K_2} \quad \text{für jedes } f \in \mathcal{O}(G),$$

   also auch $z \in \widehat{K}_2$.

5. Sei $K^* := K \cup \bigcup_{i \in I_0} C_i$ die Vereinigung von K mit allen relativ-kompakten Zusammenhangskomponenten von $G \setminus K$.

   Behauptung: K^* ist kompakt.

   (a) Da jedes $\overline{C_i}$ kompakt ist, existieren die maximalen Abstände zum Nullpunkt $d_i := |z|_{\overline{C}_i} < \infty$ für jedes $i \in I_0$. Außerdem gibt es jeweils ein $z_i \in \overline{C_i}$, wo der Abstand diesen Wert annimmt, $d_i = |z_i|$. Deshalb ist $z_i \in \partial C_i \subset K$, d.h. alle d_i sind nach oben beschränkt durch ein R, da K beschränkt ist. Also sind alle $C_i \subset \overline{D_R(0)}$, d.h. K^* ist beschränkt.

(b) Ist $G \setminus K = \bigcup_{i \in I} C_i$ die Zerlegung in **alle** Zusammenhangskomponenten, so kann man I zerlegen in $I = I_0 \cup I_1$, mit $I_0 \cap I_1 = \varnothing$. Dann gilt :

$$G \setminus K^* = (G \setminus K) \cap \left(G \setminus \bigcup_{i \in I_0} C_i \right)$$

$$= \bigcup_{i \in I} C_i \setminus \bigcup_{i \in I_0} C_i = \bigcup_{i \in I_1} C_i,$$

was als Vereinigung offener Mengen offen ist. Also ist K^* abgeschlossen in G.

(c) Jetzt zeigen wir noch, dass K^* abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist.

Sei $z \in K^*$. Ist $z \notin K$, so existiert ein $i \in I_0$, so dass $z \in C_i$ ist, und deshalb gilt $|f(z)| \le |f|_{\partial C_i} \le |f|_K$ für alle $f \in \mathcal{O}(G)$, d.h. in jedem Fall $K^* \subset \widehat{K}$.
Damit gilt :

$$\overline{K^*} \subset \overline{\widehat{K}} = \widehat{K} \subset G,$$

und da $\widehat{K}$ in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist, ist es auch K^*. Insgesamt ist damit gezeigt, dass K^* kompakt ist.

Es fehlt noch der Nachweis, dass $\widehat{K} \subset K^*$ ist. Dazu sei $z_0 \notin K^*$. Wir wollen den Satz von Runge in der 2. Fassung auf K^* anwenden. Das geht, weil $G \setminus K^* = \bigcup_{i \in I_1} C_i$ keine relativ-kompakte Zusammenhangskomponente besitzt. Es gibt ein $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $|f(z_0)| > |f|_{K^*} \ge |f|_K$, wobei der letzte Schritt gilt, weil $K \subset K^*$ ist. Damit ist $z_0 \notin \widehat{K}$, und insgesamt gilt: $\widehat{K} = K^*$.

∎

Die Charakterisierung von $\widehat{K}$ als Vereinigung von K und allen relativ-kompakten Zusammenhangskomponenten benutzen wir für eine weitere

4.4 Folgerung (3. Fassung des Satzes von Runge). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt. Dann sind äquivalent :*

1. *Es ist $K = \widehat{K}$.*

2. *Jede auf K holomorphe Funktion ist auf K gleichmäßiger Limes von auf G holomorphen Funktionen.*

Außerdem kann noch ein weiterer Spezialfall formuliert werden:

4.5 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend, so kann jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ auf jedem nicht-leeren Kompaktum $K \subset G$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.*

Beweis: Ist G einfach-zusammenhängend, so ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend. Wir zeigen das im Anschluss an diesen Beweis.

Da $K \subset \widehat{K} \subset G$ ist, können wir f auf $\widehat{K}$ durch rationale Funktionen approximieren, deren Pole außerhalb von G liegen. Die eventuell noch vorhandenen Pole lassen sich nun nach Unendlich verschieben, dann wird f durch Polynome approximiert. ∎

4.6 Lemma. *Ist G einfach-zusammenhängend, so ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend.*

Beweis: Ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ nicht zusammenhängend, so gibt es zwei nichtleere, in der Relativtopologie offene Mengen U_1 und U_2, die disjunkt sind und deren Vereinigung aber ganz $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ist. Die U_i sind abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ und deshalb auch schon in $\overline{\mathbb{C}}$. Ohne Einschränkung sei $\infty \in U_1$, dann setzen wir $A_1 := U_1 \setminus \{\infty\}$, $A_2 := U_2$. Die A_i sind abgeschlossen in $\mathbb{C}$, aber da A_1 aus einer Umgebung von Unendlich hervorgeht und A_2 nicht schneidet, ist die Menge A_2 zusätzlich noch beschränkt, insgesamt also kompakt. Das ist aber nicht möglich (vgl. Funktionentheorie 1, Kap. II, Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Gebiete). ∎