§ 3 Die Γ-Funktion

Gesucht ist eine holomorphe oder meromorphe Funktion, die die Fakultäten interpoliert.

$$f(n) = (n-1)! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Das wird durch die Funktionalgleichung

$$f(z+1) = z \cdot f(z) \quad \text{und} \quad f(1) = 1$$

erreicht.

Bemerkungen.

1. f ist nicht eindeutig bestimmt! Ist f eine Lösung des Problems, dann ist eine weitere Lösung gegeben durch

$$f_1(z) := f(z) \cdot \cos(2\pi z),$$

denn es ist $f_1(z+1) = f(z+1) \cdot \cos(2\pi z + 2\pi) = z \cdot f_1(z)$.

2. Mehrfaches Anwenden der Funktionalgleichung ergibt:

$$f(z+2) = (z+1) \cdot f(z+1) = z \cdot (z+1) \cdot f(z)$$

$$\vdots$$

$$f(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1) \cdot f(z)$$

Setzen wir $m := n-1$, so ergibt sich die Gleichung

$$f(z+m+1) = z(z+1)\cdots(z+m) \cdot f(z),$$

also

$$(z+m) \cdot f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z+1} \cdots \frac{1}{z+m-1} \cdot f(z+m+1),$$

wobei die rechte Seite in der Nähe von $z = -m$ holomorph ist (weil $f(1) = 1$ ist). Das bedeutet, dass f an der Stelle $-m$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt. Außerdem ist

$$\lim_{z \to -m} (z+m) \cdot f(z) = \lim_{z \to -m} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z+1} \cdots \frac{1}{z+m-1} \cdot f(z+m+1) = (-1)^m \cdot \frac{1}{m!}.$$

Also besitzt f an der Polstelle $-m$ das Residuum $\frac{(-1)^m}{m!}$.

Wir versuchen nun, f in der Form $1/g$ zu konstruieren, wobei g eine ganze Funktion sein soll, die einfache Nullstellen in $z = -n$ hat, für alle natürlichen Zahlen inklusive Null. Dazu sei

$$P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp(-\frac{z}{n}).$$

Das unendliche Produkt ist wohldefiniert, da $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{n})^2$ für jedes $r > 0$ konvergent ist. Wir setzen jetzt $g(z) := z \cdot P(z)$. Dann ist g eine ganze Funktion, die genau die geforderten Nullstellen hat.

Als erstes versuchen wir, den Funktionswert für $z = 1$ zu bestimmen:

$$g(1) = P(1) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}) \exp(-\frac{1}{n})$$

ist eine positive, relle Zahl, weil jeder Faktor es ist. Also ist der Logarithmus anwendbar, und es gilt

$$\begin{aligned} -\log P(1) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) - \log(N+1)\right]. \end{aligned}$$

Bemerkung. Da $\log(N+1) - \log N = \log(\frac{N+1}{N})$ für große N gegen Null geht, ändert sich der Grenzwert nicht, wenn man in der Folge $\log(N+1)$ durch $\log(N)$ ersetzt.

Definition.

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) - \log N\right]$$

heißt *Eulersche Konstante* (manchmal auch Euler-Mascheroni-Konstante). Sie wurde 1781 von Euler berechnet. Die ersten Dezimalstellen sind

$$\gamma = 0.57721566490153286\ldots$$

Bisher ist ungeklärt, ob γ eine rationale Zahl ist. Bekannt ist aber, dass der Nenner b – falls $\gamma = a/b$ eine rationale Zahl ist – ziemlich groß sein muss, nämlich $b > 10^{10000}$.

Mit der obigen Definition ist $g(1) = P(1) = \exp(-\gamma)$. Wir arbeiten weiter am Aussehen von g:

$$\begin{aligned} g(z) &= z \cdot P(z) = \lim_{N\to\infty} z \cdot \prod_{n=1}^{N}(\frac{z+n}{n}) \exp(-\frac{z}{n}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N!} \cdot \exp\left(-\sum_{n=1}^{N} \frac{z}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

Den hinteren Faktor formen wir so um, dass beim Grenzübergang die Eulersche Konstante auftritt:

$$\exp\left(-\sum_{n=1}^{N}\frac{z}{n}\right) = \exp\left(-z\Big(\big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\big) - \log N\Big)\right)\cdot\underbrace{\exp(-z\log N)}_{N^{-z}}.$$

Daraus ergibt sich

$$g(z) = \exp(-\gamma z)\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N!\cdot N^z}.$$

Definieren wir nun

$$\Delta(z) := \exp(\gamma z)\cdot g(z) = \lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N!\cdot N^z},$$

dann sind wir dem Ziel schon nahe, denn Δ erfüllt fast die Funktionalgleichung:

$$\Delta(1) = \exp(\gamma)\cdot g(1) = \lim_{N\to\infty}\frac{(N+1)!}{N!\cdot N} = 1 \quad \text{und}$$

$$z\cdot\Delta(z+1) = \lim_{N\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+N+1)}{N!\cdot N^{z+1}} = \Delta(z),$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil der Quotient $\dfrac{z+N+1}{N}$ für großes N gegen 1 geht.

Definition.

$$\Gamma(z) := \frac{1}{\Delta(z)} = \frac{1}{z\cdot\exp(\gamma z)\cdot P(z)}$$

heißt die *Gamma-Funktion* und ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

3.1 Satz.

1. *Die einzigen Singularitäten von Γ sind einfache Pole in $z=-n$, $n\in\mathbb{N}_0$, mit Residuum $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.*
2. $\Gamma(1) = 1$ *und* $\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z)$ *außerhalb der Singularitäten.*
3. $\Gamma(n) = (n-1)!$ *für n aus $\mathbb{N}$.*
4. *Es gilt die „Ergänzungsformel“:* $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ *für $z\notin\mathbb{Z}$.*
5. *Es gilt die Multiplikationsformel von Gauß/Euler:*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Beweis: 1) Ist z Polstelle von Γ, dann ist z eine Nullstelle von Δ. Das bedeutet aber $z = 0$, oder z ist Nullstelle von P, insgesamt $z = -n$ mit n aus $\mathbb{N}_0$. Die Residuen erhalten wir nach unseren Vorüberlegungen, sobald wir die Funktionalgleichung geprüft haben.

2) Die Gültigkeit der Funktionalgleichung ergibt sich direkt aus den Eigenschaften von Δ:

$$\Gamma(1) = \frac{1}{\Delta(1)} = 1 \text{ ist klar, und es gilt } \Gamma(z+1) = \frac{1}{\Delta(z+1)} = \frac{z}{\Delta(z)} = z \cdot \Gamma(z).$$

3) Folgt unmittelbar aus der Funktionalgleichung.

4) Zunächst untersuchen wir, wie sich $g(z) \cdot g(-z)$ verhält:

$$\begin{aligned} -g(z) \cdot g(-z) &= z^2 \cdot P(-z) \cdot P(z) \\ &= z^2 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (\frac{z}{n})^2) = \frac{z}{\pi} \cdot \sin(\pi z), \end{aligned}$$

wobei wir das unendliche Produkt schon als Folgerung des Weierstraßschen Produktsatzes ausgerechnet hatten. Damit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \Delta(z) \cdot \Delta(1-z) &= \Delta(z) \cdot \frac{\Delta(-z)}{-z} \\ &= \exp(\gamma z) \cdot g(z) \cdot \frac{1}{z} \cdot \exp(-\gamma z) \cdot (-g(-z)) \\ &= \frac{1}{z} \cdot g(z) \cdot (-g(-z)) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \end{aligned}$$

also $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

5) Die Multiplikationsformel ist klar, da der Ausdruck auf der rechten Seite genau dem Kehrwert von Δ entspricht. ∎

3.2 Folgerung. *Es gilt:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis:

$$\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Die Multiplikationsformel ergibt aber nach Erweitern mit 2^{n+1}:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \sqrt{n} \cdot 2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)},$$

wobei alle Partialprodukte positiv sind. Also muss auch der Grenzwert positiv sein.

∎

3.3 Legendresche Verdopplungsformel.

Es sei z nicht aus $\{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots\}$. Dann gilt:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(z + \frac{1}{2}).$$

Beweis: $G := \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots\}$ ist ein Gebiet. Weil auf G beide Seiten der Behauptung holomorph sind, genügt es, die Behauptung auf der einfach-zusammenhängenden rechten Halbebene nachzurechnen und dann den Identitätssatz anzuwenden.

In der rechten Halbebene hat Γ keine Nullstellen, also existiert dort $\log \Gamma$. Wir betrachten die logarithmische Ableitung

$$\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z).$$

Dazu benötigen wir zunächst eine Darstellung von $\log \Gamma$:

$$\log \Gamma(z) = -[\log(z) + \gamma z + \log P(z)].$$

Dabei ist der letzte Ausdruck

$$\log P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1 + \frac{z}{n}) - \frac{z}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(z+n) - \log n - \frac{z}{n}),$$

und wir können Ψ ausdrücken als

$$\Psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}),$$

also Ψ' als

$$\Psi'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Jetzt starten wir mit einer Abwandlung eines Teils der Verdopplungsformel:

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \left(\Gamma(z) \cdot \Gamma(z + \frac{1}{2}) \right) = \Psi'(z) + \Psi'(z + \frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z + \frac{1}{2} + n)^2}$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+n)^2} = 4\Psi'(2z) = \frac{d^2}{dz^2} \log \left(\Gamma(2z) \right).$$

Zwei Funktionen, deren zweite Ableitungen gleich sind, unterscheiden sich höchstens um eine affin-lineare Funktion:

$$\log\left(\Gamma(z)\cdot\Gamma(z+\frac{1}{2})\right) - \log\Gamma(2z) = az+b, \qquad \text{also}$$

$$\frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)} = e^{az+b}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten a und b setzen wir $z=1$ ein und erhalten

$$e^{a+b} = \Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Setzen wir hingegen $z=\frac{1}{2}$ ein, dann ergibt sich als zweite Gleichung für a und b:

$$e^{\frac{a}{2}+b} = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Die Auflösung der Bedingungen nach a und b ergibt

$$e^a = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad e^b = 2\sqrt{\pi}.$$

Daraus folgern wir

$$e^{-(az+b)} = \frac{1}{(e^a)^z e^b} = \frac{1}{(\frac{1}{4})^z\cdot 2\sqrt{\pi}} = \frac{4^z}{2\sqrt{\pi}} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}},$$

was die fehlenden Faktoren für die Verdopplungsformel liefert. ■

3.4 Satz (Integraldarstellung der Γ-Funktion). *In der rechten Halbebene gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

BEWEIS: 1) Zuerst zeigen wir die Existenz des Integrals: Ist $z=x+\mathrm{i}y$, so zerlegen wir

$$F(t,z) := e^{-t}t^{z-1} = e^{-t}e^{(z-1)\log t} = e^{-t}e^{(x-1)\log t}e^{\mathrm{i}\,y\log t} \qquad (\text{für } t\in(0,\infty))$$

in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{array}{rrcl} & \operatorname{Re}F(t,z) & = & e^{-t}t^{x-1}\cdot\cos(y\log t) \\ \text{und} & \operatorname{Im}F(t,z) & = & e^{-t}t^{x-1}\cdot\sin(y\log t). \end{array}$$

Die Integrale über Real- und Imaginärteil von F existieren im Lebesgueschen Sinne (bzw. als uneigentliche Integrale im Riemannschen Sinne), falls das Integral über die Majorante

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

für jedes $x > 0$ existiert. Aber das ist aus der Reellen Analysis bekannt.

2) Wir definieren jetzt

$$f(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \quad \text{und} \quad f_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Die Existenz des linken Integrals ist äquivalent zur punktweisen Konvergenz der Folge f_n gegen f. Die Konvergenz ist aber sogar lokal gleichmäßig, denn für $0 < x_1 < x < x_2 < \infty$ und $z = x + \mathsf{i}\, y$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f_n(z)| &\le \int_{1/n}^n e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt \\
&\le \int_o^1 e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt \\
&\le \int_o^1 e^{-t} \cdot t^{x_1-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{x_2-1}\, dt \\
&\le \int_o^\infty e^{-t} \cdot t^{x_1-1}\, dt + \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x_2-1}\, dt \\
&= f(x_1) + f(x_2).
\end{aligned}$$

Also ist die Folge (f_n) lokal beschränkt, und zusammen mit der punktweisen Konvergenz liefert das die kompakte Konvergenz (Beweis zum Satz von Montel). Aus den Sätzen über Parameterintegrale folgt nun, dass f holomorph ist.

Behauptung: Für reelles $x > 1$ ist

$$\Gamma_n(x) := \int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\, dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Beweis dafür:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\,dt \\
&= (1-\frac{t}{n})^n \cdot \frac{t^x}{x}\Big|_{t=0}^{t=n} - \int_0^n \frac{t^x}{x}\cdot n\cdot(1-\frac{t}{n})^{n-1}\cdot(\frac{-1}{n})\,dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^{n-1} t^x\,dt \\
&= \frac{1}{x}\left[(1-\frac{t}{n})^{n-1}\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_{t=0}^{t=n} - \int_0^n \frac{t^{x+1}}{x+1}(n-1)(\frac{-1}{n})(1-\frac{t}{n})^{n-2}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{n-1}{n}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^{n-2}t^{x+1}\,dt \\
&\ \vdots \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\cdot\frac{n!}{n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\,dt \\
&= \frac{n!\cdot n^{x+n}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)\cdot n^n\cdot(x+n)} \\
&= \frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \Gamma(x), \quad \text{für } x > 1.$$

3) Bekanntlich konvergiert $(1-\frac{t}{n})^n$ gegen e^{-t}. Außerdem gilt:

$$(1-\frac{t}{n})^n \le e^{-t}.$$

Beweis dazu: Es ist

$$\log(1-\frac{t}{n}) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(\frac{-t}{n})^\nu = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}(\frac{t}{n})^\nu \le -\frac{t}{n}\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz erhält man nun:

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = f(x) \text{ für } x > 0.$$

Wegen der Holomorphie beider Ausdrücke und der Identität auf einem Stück der reellen Achse folgt, dass $f(z) = \Gamma(z)$ ist. ∎

3.5 Folgerung. *Es gilt :*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Beweis: Also Folgerung der Multiplikationsformel für die Γ-Funktion hatten wir $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ festgehalten. Mit der Integraldarstellung ergibt das

$$\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^\infty e^{-s^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot 2s\, ds = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds,$$

wobei die Substitution $t = s^2$ die Behauptung lieferte. ∎

Zum Schluss wollen wir noch auf die berühmte Riemannsche ζ-Funktion eingehen.

Definition. Die *Riemannsche ζ-Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s},$$

wobei traditionell die komplexe Unbestimmte in der Form $s = \sigma + \mathrm{i}\, t$ geschrieben wird.

Die Reihe der ζ-Funktion konvergiert für $\sigma > 1$ absolut, denn es ist

$$\sum_{n=1}^\infty \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma},$$

und aus der Analysis ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma}$ für $\sigma > 1$ konvergiert.

Ist $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{i}\, t_0$ ein Punkt mit $\sigma_0 > 1$, so kann die Reihe wegen der Monotonie $1/n^\sigma \le 1/n^{\sigma_0}$ für alle $\sigma \ge \sigma_0$ gleichmäßig durch eine konvergente Reihe abgeschätzt werden. Daher ist die ζ-Funktion holomorph für $\sigma > 1$. Bei $s = 1$ besitzt ζ offensichtlich eine Singularität. Den Funktionswert für $s = 2$ haben wir auch schon ausgerechnet, es ist $\zeta(2) = \pi^2/6$.

3.6 Satz. *Es bezeichne $p_1, p_2, \dots$ die Folge der Primzahlen. Dann gilt für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ die* ***Eulersche Produktformel*** *für die ζ-Funktion:*

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^\infty \frac{1}{1 - p_n^{-s}}.$$

Beweis: Wir untersuchen konkret die ersten Partialprodukte. Bekanntlich sind die ersten Primzahlen die Zahlen 2, 3, 5 ..., das ergibt

$$\zeta(s)\cdot(1-2^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s} = \sum_{2\nmid m} m^{-s}.$$

Der Schritt für $p_2 = 3$ läuft analog :

$$\zeta(s)\cdot(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = \sum_{2\nmid m} m^{-s}(1-3^{-s})$$

$$= \sum_{2\nmid m} m^{-s} - \sum_{2\nmid m}(3m)^{-s} = \sum_{2,3\nmid m} m^{-s}.$$

Allgemein ist, wenn wir bis p_N weiter verfahren,

$$\zeta(s)\cdot(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s})\cdots(1-p_N^{-s}) = \sum_{p_1,\ldots,p_N\nmid m} m^{-s}$$

$$= 1 + p_{N+1}^{-s} + \text{höhere Terme}.$$

Den entstandenen „Rest“ können wir abschätzen:

$$|p_{N+1}^{-s} + \ldots| \le \sum_{n\ge p_{N+1}} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Die rechte Seite geht aber für $N \to \infty$ gegen Null, da es unendlich viele Primzahlen gibt. Das bedeutet

$$\lim_{N\to\infty} \zeta(s)\cdot\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-s}) = 1.$$

Das Produkt ist kompakt konvergent, da die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}|p_n^{-s}|$ kompakt konvergiert.

■

In dem Beweis ist die Existenz von unendlich vielen Primzahlen eingegangen. Der Spieß kann aber auch umgedreht werden, d.h. aus der Produktdarstellung der ζ-Funktion kann die Existenz unendlich vieler Primzahlen gefolgert werden:

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Dann ist das Produkt endlich, und es gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{-s})\cdots(1-p_N^{-s})}.$$

Auf der rechten Seite erhält man einen endlichen Grenzwert für $s \to 1$, auf der linken Seite aber nicht. Widerspruch!

Der im Satz gezeigte Zusammenhang zwischen der ζ-Funktion und der Primzahlverteilung ist der Anfang der analytischen Zahlentheorie. Dort wird versucht, mit den Methoden der Funktionentheorie zahlentheoretische Aussagen zu beweisen, wobei die ζ-Funktion häufig eine zentrale Rolle spielt.

3.7 Folgerung. *Der Funktionswert $\zeta(s)$ ist ungleich Null, falls $\sigma > 1$ ist.*

Beweis: In der Produktdarstellung sind alle Faktoren ungleich Null, also muss es auch das Produkt sein. ∎

Nun wollen wir sehen, wie weit wir die ζ-Funktion nach links fortsetzen können :

3.8 Satz. *Ist $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$, dann gilt*

$$\zeta(s) \cdot \Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt = \frac{1}{s-1} + \varrho(s),$$

wobei ϱ eine in der rechten Halbebene holomorphe Funktion ist.

Beweis-Idee:

Zunächst untersucht man das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt = \int_0^\infty t^{s-1} \cdot \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \int_0^\infty t^{s-1}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}} - 1\Big)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty t^{s-1} e^{-kt}\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \int_0^\infty (\frac{\varphi(t)}{k})^{s-1} \cdot e^{-\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

wobei $\varphi(t) = kt$ ist. Mit der Substitutionsregel folgt dann

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s} \cdot \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx = \zeta(s)\cdot\Gamma(s) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 1.$$

Daraus folgt der erste Teil der Behauptung. Dann betrachtet man die zwei Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} A(s) &:= \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) t^{s-1}\,dt \\ \text{und} \quad B(s) &:= \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt. \end{aligned}$$

Man kann zeigen: die beiden Funktionen sind holomorph auf der rechten Halbebene, also für alle s mit Realteil von $s > 0$. Setzen wir $\varrho(s) = A(s) + B(s)$, dann folgt

$$\zeta(s)\cdot\Gamma(s) - \varrho(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt - \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\Big) t^{s-1}\,dt - \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{s-2} dt = \frac{t^{s-1}}{s-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{s-1}.$$

Damit ist auch die zweite Gleichung gezeigt. ∎

3.9 Folgerung. *ζ kann meromorph auf die rechte Halbebene fortgesetzt werden und hat dann genau einen einfachen Pol bei $s = 1$.*

Beweis: Dividieren der letzten Identität durch Γ ergibt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \Big(\frac{1}{s-1} + \varrho(s) \Big).$$

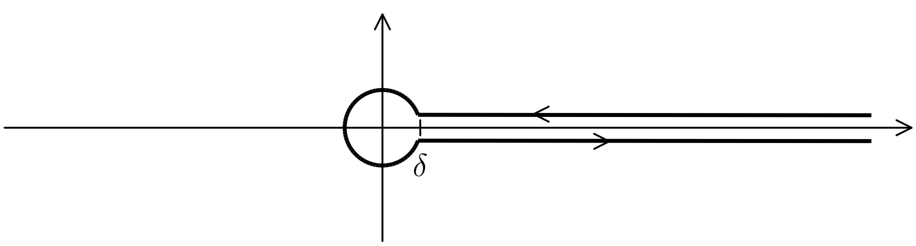
Weil $\Gamma(s)$ in der rechten Halbebene keine Polstellen hat, gibt es nur genau den einen Pol. ∎

Es stellt sich die Frage, ob es gelingt, ζ noch weiter fortzusetzen. Die Antwort liefert der folgende Satz:

3.10 Satz. *Es gibt eine ganze Funktion $I(s)$ mit $I(1) = 2\pi \mathrm{i}$, so dass gilt:*

$$\zeta(s) = \frac{I(s)}{(e^{2\pi \mathrm{i}\, s} - 1)\Gamma(s)} \quad \textit{für } \operatorname{Re} s > 1.$$

Beweis: Auch diesen Beweis werden wir nur andeuten. Zu $\delta > 0$ wollen wir einen Weg γ_δ wählen. Der soll vom unendlich fernen Punkt aus entlang der reellen Achse bis zum Punkt δ laufen, von dort den Nullpunkt gegen den Uhrzeigersinn auf einem Kreis mit Radius δ umlaufen und dann wieder gegen Unendlich gehen.



Es sei

$$I_\delta(s) := \int_{\gamma_\delta} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\, dz,$$

wobei die Potenz z^{s-1} mit jenem Zweig des Logarithmus erklärt wird, für den die positive reelle Achse entfernt wurde, also

$$\log(r \cdot e^{\mathrm{i}\, t}) = \ln r + \mathrm{i}\, t, \text{ mit } 0 < t < 2\pi.$$

Man beachte, dass γ_δ direkt auf der x-Achse verläuft (im Gegensatz zur Skizze, wo der Pfad zur Verdeutlichung etwas oberhalb und unterhalb der Achseeingezeichnet wurde). Ist $\alpha_\delta(t) := \delta \cdot e^{\mathrm{i}\, t}$ die Parametrisierung des Kreises, so ist

$$I_\delta(s) = \int\limits_{\alpha_\delta} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\, dz + \bigl(e^{2\pi\mathrm{i}\, s} - 1\bigr) \cdot \int\limits_\delta^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Man kann zeigen, dass I_δ holomorph ist, und weil der Integrand in $I_\delta(s)$ auf einer im Nullpunkt gelochten Kreisscheibe um Null holomorph ist, folgt sofort, dass der Wert $I_\delta(s)$ vom speziellen δ unabhängig ist. Diese Unabhängigkeit gilt natürlich nicht für die beiden Integrale in der Zerlegung. Man kann zeigen, dass das linke Integral für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\delta \to 0$ gegen Null strebt, und wir wissen schon, dass

$$\zeta(s) \cdot \Gamma(s) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt$$

ist. Daraus folgt die gewünschte Gleichung. Außerdem ist

$$I(1) = \int_{\alpha_\delta} \frac{1}{e^z - 1}\, dz = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_0\Bigl(\frac{1}{e^z - 1}\Bigr) = 2\pi\mathrm{i}\,,$$

weil $z/(e^z - 1)$ für $z \to 0$ gegen 1 geht. ■

3.11 Folgerung. *ζ lässt sich meromorph nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen, mit einer einzigen Polstelle bei $s = 1$ (mit Residuum gleich 1).*

Beweis: Wir benutzen die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{I(s)}{(e^{2\pi\mathrm{i}\, s} - 1) \cdot \Gamma(s)}.$$

Weil die Γ-Funktion keine Nullstellen hat, kann ζ nur einen Pol haben, wenn s eine ganze Zahl ist. Allerdings werden die Nennernullstellen für $s \in \mathbb{N}_0$ von den Polstellen von Γ aufgehoben, also ist ζ dort holomorph.

An den Stellen $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ist ζ ohnehin holomorph, weil die urpsrüngliche Produktdarstellung dort Bestand hat. Es bleibt noch die Polstelle bei $s = 1$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_1(\zeta) &= \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) \\ = \lim_{s\to 1} \frac{2\pi\mathrm{i}\,(s-1)}{e^{2\pi\mathrm{i}\, s} - 1} &= \lim_{s\to 1} \frac{2\pi\mathrm{i}\,(s-1)}{e^{2\pi\mathrm{i}\,(s-1)} - 1} = 1, \end{aligned}$$

weil $I(1) = 2\pi\mathrm{i}$ und $\lim_{z\to 0}(z/(e^z - 1)) = 1$ ist. ■

3.12 Satz (Funktionalgleichung der ζ-Funktion). *Für $s \neq 0, 1$ gilt*

$$\zeta(s) = 2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \sin\bigl(\frac{\pi s}{2}\bigr) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s).$$

Auf den Beweis verzichten wir hier. Eine Möglichkeit besteht darin, die Gleichung zunächst für $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$ zu beweisen und dann das Ergebnis mit Hilfe des Identitätssatzes auf immer größere Bereiche zu übertragen.

3.13 Folgerung. *Es ist $\zeta(-n) = 0$, falls $n \in \mathbb{N}$ gerade ist. Darüber hinaus hat $\zeta(s)$ höchstens Nullstellen im Gebiet $0 \le \sigma = \mathrm{Re}(s) \le 1$.*

BEWEIS: Die Gammafunktion hat Polstellen in $z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, also hat $\Gamma(1-z)$ Polstellen in $z = 1, 2, 3, \ldots$. Da $\zeta(s)$ für $s \neq 1$ holomorph ist, folgt

$$\sin(\frac{\pi s}{2}) \cdot \zeta(1-s) = 0 \text{ für } s = 2, 3, \ldots$$

Da die Polstellen der Gammafunktion einfach sind, müssen auch die obigen Nullstellen einfach sein. Für gerades s hat bereits $\sin((\pi s)/2)$ eine Nullstelle, aber auch nur dann. Setzen wir also $z = 1 - s$, so ist $\zeta(z) = 0$ für $s = 3, 5, \ldots$, also für $z = -2, -4, -6, \ldots$, und $\zeta(z) \neq 0$ für $s = 2, 4, 6, \ldots$, also $z = -1, -3, -5, \ldots$.

Ist $\sigma > 1$, so folgt aus der Produktdarstellung, dass $\zeta(s) \neq 0$ ist. Insbesondere ist dort die rechte Seite der Funktionalgleichung ungleich Null. Schreiben wir wieder $z = 1 - s$, so kann $\zeta(z)$ für $\mathrm{Re}(z) < 0$ nur dann eine Nullstelle haben, wenn der Ausdruck

$$\Gamma(1-s) \cdot \sin(\frac{\pi s}{2})$$

eine Polstelle hat. Weil der Sinus keine Polstellen hat, muss eine solche von der Γ-Funktion kommen und darf nicht mit einer Nullstelle des Sinus gekürzt werden. Nun gilt:

- $\Gamma(1-s)$ hat Polstellen für alle $s \in \mathbb{N}$.
- $\sin(\pi s/2)$ hat genau dann eine Nullstelle, wenn s gerade ist.

Also kann $\zeta(z)$ für $\mathrm{Re}(z) < 0$ höchstens dann eine Nullstelle haben, wenn s eine ungerade natürliche Zahl > 1 ist – das bedeutet aber genau, dass $z = 1 - s = -2, -4, -6, \ldots$ ist. Andere Nullstellen kann $\zeta(z)$ für $\mathrm{Re}(z) < 0$ nicht aufweisen. ∎

Bemerkung. Die Nullstellen $-n$ für gerades n heißen die *trivialen Nullstellen* der ζ-Funktion.

Für das Auftreten von nicht-trivialen Nullstellen geben wir ohne Beweis an:

3.14 Satz von Hadamard / de la Valleé-Poussin. *$\zeta(s)$ hat keine Nullstellen für $\mathrm{Re}(s) = 1$ (und damit auch keine für $\mathrm{Re}(s) = 0$).*

Also müssen weitere Nullstellen im Gebiet

$$S := \{z \in \mathbb{C} \, : \, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$$

liegen, im sogenannten „kritischen Streifen“.

Der Satz von Hadamard de la Valleé-Poussin ist äquivalent zum Primzahlsatz, der besagt: *Ist $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$, dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1,$$

d.h. $\pi(x)$ verhält sich wie $x/\log x$.

3.15 Satz. *Es gibt unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen. Man kann zeigen, dass die Nullstellen dort symmetrisch zur Geraden $\sigma = 1/2$ liegen, jedoch nicht auf der reellen Achse.*

3.16 Satz von Hardy (1914). *$\zeta(s)$ hat unendlich-viele Nullstellen bei $\sigma = 1/2$.*

3.17 Satz. *Ist $\varepsilon > 0$, so liegen „fast alle“ Nullstellen im Streifen*

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \sigma < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Diese immer stärkeren Sätze legen die folgende berühmte Vermutung nahe:

Riemannsche Vermutung:

> *Alle Nullstellen der ζ-Funktion im kritischen Streifen liegen bei $\sigma = 1/2$.*

Man weiß: die ersten 150 Millionen Nullstellen im kritischen Streifen liegen bei $\sigma = 1/2$.