Kapitel 1 Meromorphe Funktionen

§ 1 Der Satz von Mittag-Leffler

Zur Erinnerung:

Die holomorphe Funktion f habe in $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Liegt eine Polstelle vor, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ und eine Laurentreihe mit einem endlichen Hauptteil, die f auf $U \setminus \{z_0\}$ darstellt:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Wir können annehmen, dass $a_{-k} \neq 0$ ist. Dann nennt man k die *Ordnung* der Nullstelle. Der Koeffizient a_{-1} ist das *Residuum* von f in z_0.

Man kann f auch als Abbildung von U nach $\overline{\mathbb{C}}$ auffassen, indem man $f(z_0) := \infty$ setzt. Diese Abbildung ist in z_0 stetig, das kann man folgendermaßen sehen:

Es ist

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + g(z)(z - z_0)^k,$$

mit einer auf U holomorphen Funktion g (gegeben durch den Nebenteil von f). Daraus folgt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot h(z),$$

mit einer auf einer Umgebung $V = V(z_0) \subset U$ holomorphen Funktion h (und $h(z_0) \neq 0$). Also ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Eine *meromorphe Funktion* auf einer offenen Menge B ist eine Funktion f, die außerhalb einer in B diskreten Teilmenge P holomorph ist und in den Punkten von P Polstellen besitzt. In jedem Punkt $a \in P$ besitzt f einen eindeutig bestimmten Hauptteil $h_a(f)$. Das System $H(f) = (h_a(f))_{a \in P}$ nennt man die Hauptteilverteilung von f.

In diesem Paragraphen wollen wir die Frage untersuchen, ob es zu jeder Hauptteilverteilung auf $\mathbb{C}$ eine passende meromorphe Funktion gibt.

Definition.

1. Sei $a \in \mathbb{C}$. Ein *Hauptteil der Ordnung* k in a ist ein Ausdruck der Gestalt

$$h_a(z) = \sum_{n=-k}^{-1} c_n (z - a)^n.$$

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine *Hauptteilverteilung* auf G ist gegeben durch eine in G diskrete Menge P und eine Familie $H = (h_a)_{a \in P}$ von Hauptteilen in den Punkten $a \in P$.

3. Eine Hauptteilverteilung H heißt lösbar, wenn ein $f \in \mathcal{M}(G)$ mit $H(f) = H$ existiert. Die Funktion f nennt man die *Lösung* von H.

Bemerkung. Eine Lösung der Hauptteilverteilung ist, falls existent, nur bis auf Addition holomorpher Funktionen eindeutig bestimmt.

1.1 Satz von Mittag-Leffler. *Jede Hauptteilverteilung auf* $\mathbb{C}$ *ist lösbar*

Es gibt also auf $\mathbb{C}$ sehr viele meromorphe Funktionen!

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, müssen wir einige Vorüberlegungen anstellen. Sei $(h_a)_{a \in P}$ gegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist P endlich, dann lassen sich die Hauptteile summieren:

$$f := \sum_{a \in P} h_a$$

ist eine rationale Funktion, und es gilt $H(f) = (h_a)_{a \in P}$, d.h. das Problem ist gelöst.

2. Ist P unendlich, dann lässt sich P als Folge schreiben, $P = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, da P diskret in $\mathbb{C}$ ist. Wir würden gerne definieren:

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} h_n,$$

wenn h_n der Hauptteil in a_n ist. Doch wie ist die Summe zu verstehen? Uns fehlt bisher ein geeigneter Konvergenzbegriff für Reihen meromorpher Funktionen.

Definition. Sei $(f_\nu) \subset \mathcal{M}(G)$ eine Folge meromorpher Funktionen. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ heißt *kompakt (bzw. normal) konvergent* auf G, falls für jedes Kompaktum $K \subset G$ ein ν_0 existiert, so dass gilt:

1. $f_\nu|_K$ ist holomorph für alle $\nu \geq \nu_0$ (d.h. nur endlich viele f_ν haben Pole innerhalb von K),

2. die Reihe $\sum\limits_{\nu \geq \nu_0} f_\nu$ konvergiert gleichmäßig (bzw. absolut gleichmäßig) auf K.

In diesem Fall gibt es eine diskrete Menge $D \subset G$, so dass alle f_ν auf $G \setminus D$ holomorph sind und außerdem die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf $G \setminus D$ lokal-gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, die in D höchstens Polstellen besitzt.

Jetzt beginnen wir den Beweis des Satzes von Mittag-Leffler:

Beweis: Es sei $(h_a)_{a \in P}$ die gegebene Hauptteilverteilung. Ohne Einschränkung sei P als Folge geschrieben, $P = \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$, so dass die a_ν dem Betrage nach geordnet sind. Außerdem sei $a_0 := 0$. Falls $0 \notin P$, dann sei als Hauptteil in Null ausnahmsweise $h_0 := 0$ zugelassen. Mit h_ν sei dann immer der Hauptteil h_{a_ν} im Punkte a_ν gemeint.

Wir wählen nun eine Folge (ε_ν) von positiven Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$ konvergiert. Außerdem definieren wir eine Folge von Kreisscheiben $D_\nu := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \frac{1}{2}|a_\nu|\}$. Dann ist $h_\nu \in \mathcal{O}(\overline{D_\nu})$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Deshalb kann h_ν auf $\overline{D_\nu}$ gleichmäßig durch Taylorpolynome approximiert werden, d.h. es existieren Polynome P_ν, so dass

$$|h_\nu - P_\nu|_{\overline{D_\nu}} < \varepsilon_\nu.$$

Wir setzen $f_\nu := h_\nu - P_\nu$. Dann gibt es zu jedem $R > 0$ ein ν_0, so dass die Funktionen f_ν auf $\overline{D_R(0)}$ für $\nu \ge \nu_0$ holomorph sind. Aus dem Majorantenkriterium folgt jetzt die kompakte Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ auf ganz $\mathbb{C}$. Setzen wir

$$f := h_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu - P_\nu),$$

so ist f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Auf $D_R(0)$ ist

$$f = h_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu_0 - 1} (h_\nu - P_\nu) + \sum_{\nu \ge \nu_0} f_\nu.$$

Die unendliche Reihe ist auf dem Kreis aber eine holomorphe Funktion, deshalb hat f auf $D_R(0)$ die Polstellen $a_0, \ldots, a_{\nu_0 - 1}$ mit den Hauptteilen der h_ν. ∎

Bemerkung. Der Trick, mittels Taylorpolynomen die Konvergenz der meromorphen Reihe zu erzwingen, wird als „Methode der konvergenzerzeugenden Summanden“bezeichnet.

Formulieren wir das Ergebnis noch einmal :

1.2 Satz von Mittag-Leffler (2. Fassung). *Sei $(a_\nu) \subset \mathbb{C}$ eine Folge paarweise verschiedener, komplexer Zahlen mit $\lim_{\nu \to \infty} |a_\nu| = \infty$. Zu jedem ν sei ein Hauptteil h_ν mit Entwicklungspunkt a_ν gegeben. Dann existieren Polynome P_ν, so dass*

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - P_\nu(z))$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, die genau in den a_ν Polstellen mit Hauptteil h_ν hat. Die Reihe ist kompakt konvergent. Außerdem hat jede weitere Lösung der Hauptteilverteilung die Form $f+g$, wobei g eine ganze Funktion ist.

1.3 Anwendungen.

1. Sei f eine rationale Funktion. Dann hat f nur endlich-viele Polstellen $a_1, \dots, a_N$ mit Hauptteilen $h_1, \dots, h_N$. Deshalb ist die Differenz

$$g := f - \sum_{\nu=1}^{N} h_\nu$$

eine rationale und zugleich ganze Funktion, also ein Polynom. Die Auflösung nach f ergibt dann die sogenannte „Partialbruchzerlegung"von f.

Beispiel.

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z-\mathsf{i}\,)^2}$. Dann hat f die Polstellen $a_0 = 0$ und $a_1 = \mathsf{i}$ mit den Hauptteilen h_0 und h_1. Nahe a_0 ist $f(z) = \dfrac{1}{z} \cdot f_1(z)$, mit der holomorphen Funktion $f_1(z) = \dfrac{1}{(z-\mathsf{i}\,)^2}$. Um den Hauptteil h_0 zu bestimmen, entwickeln wir f_1 in eine Taylorreihe um Null:

$$g(z) = \frac{1}{(z-\mathsf{i}\,)^2} = -1 + \text{Terme mit höheren Potenzen von } z,$$

deshalb ist $h_0(z) = -\dfrac{1}{z}$.

Nahe a_1 ist $f(z) = \dfrac{1}{(z-\mathsf{i}\,)^2} \cdot f_2(z)$, mit der holomorphen Funktion $f_2(z) = \dfrac{1}{z}$. Wegen $f_2(\mathsf{i}\,) = -\mathsf{i}$ und $f_2'(\mathsf{i}\,) = 1$ gilt

$$f_2(z) = \frac{1}{z} = -\mathsf{i} + 1 \cdot (z - \mathsf{i}\,) + \text{ Terme mit höheren Potenzen von } z - \mathsf{i}\,.$$

Also ist $h_1(z) = \dfrac{-\mathsf{i}}{(z-\mathsf{i}\,)^2} + \dfrac{1}{z-\mathsf{i}}$. Das Polynom g kann dann einfach mittels Subtraktion errechnet werden. In diesem Fall lässt sich sogar das ersparen: Da die Grenzwerte von f, h_0 und h_1 für z gegen Unendlich verschwinden, kann P nur das Nullpolynom sein.

Damit ist die Partialbruchzerlegung bestimmt, es gilt

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-\mathsf{i}} - \frac{\mathsf{i}}{(z-\mathsf{i}\,)^2}.$$

2. Wir untersuchen jetzt einen Spezialfall des Satzes von Mittag-Leffler: Gegeben sei eine diskrete Folge a_ν, die monoton geordnet ist, d.h. $0 = a_0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$, sowie eine Folge komplexer Zahlen $c_\nu \neq 0$, die wir als Residuen vorgeben wollen, um eine meromorphe Funktion mit einfachen Polstellen und Residuen c_ν in den a_ν zu konstruieren.

   Es seien Zahlen ε_ν mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu < \infty$ gegeben (z.B. $\varepsilon_\nu = 2^{-\nu}$). Der Hauptteil h_ν in a_ν kann – unter Ausnutzung der geometrischen Reihe – folgendermaßen umgeformt werden:

$$h_\nu(z) = \frac{c_\nu}{z - a_\nu} = -\frac{c}{a_\nu} \cdot \frac{1}{1 - z/a_\nu} = -\frac{c_\nu}{a_\nu} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\lambda \quad \text{für } |z| < |a_\nu|.$$

   Mit $P_{\nu,\mu}(z)$ sei nun das Taylorpolynom von $h_\nu(z)$ vom Grade μ auf der Kreisscheibe vom Radius $|a_\nu|$ um Null bezeichnet. Aus der Formel $\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\mu} q^\lambda = \frac{1 - q^{\mu+1}}{1 - q}$ folgt mit $q := z/a_\nu$:

$$\begin{aligned} P_{\nu,\mu}(z) &= -\frac{c_\nu}{a_\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\lambda \\ &= -\frac{c_\nu}{a_\nu} \cdot \frac{1 - (z/a_\nu)^{\mu+1}}{1 - z/a_\nu} \\ &= c_\nu \cdot \frac{1 - (z/a_\nu)^{\mu+1}}{z - a_\nu} \\ &= \frac{c_\nu}{z - a_\nu} \left(1 - \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu+1}\right). \end{aligned}$$

   Um der Linie des Beweises von Mittag-Leffler zu folgen, wollen wir eine Folge natürlicher Zahlen (k_ν) suchen, so dass gilt:

$$|h_\nu(z) - P_{\nu,k_\nu}(z)| < \varepsilon_\nu \quad \text{auf } \{z \,:\, |z| \leq \frac{1}{2}|a_\nu|\}.$$

   Sind die k_ν gefunden, so kann die Lösung f des Problems schon genauer angegeben werden:

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - P_{\nu,k_\nu}(z)) = \frac{c_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{z - a_\nu} \cdot \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{k_\nu+1}.$$

   Nun versuchen wir, die k_ν ganz konkret zu bestimmen. Es kommt nicht darauf an, die Bedingung mit den ε_ν genau zu erfüllen, wir müssen nur erreichen, dass die Reihe auf jeder Kreisscheibe $D_R(0)$, $R > 0$, absolut konvergiert. Dabei helfen die folgenden Überlegungen weiter:

Ist ν_0 so gewählt, dass $|a_\nu| > 2 \cdot R$ für alle $\nu \geq \nu_0$ ist, so gilt sowohl $\frac{1}{2}|a_\nu| > R$ als auch $|a_\nu| - R > \frac{1}{2}|a_\nu|$. Für z aus $D_R(0)$ folgt deshalb

$$|a_\nu - z| \geq |a_\nu| - |z| > |a_\nu| - R > \frac{1}{2}|a_\nu|\,,$$

$$\text{also } |1 - \frac{z}{a_\nu}| > \frac{1}{2} \qquad \text{für } \nu \geq \nu_0.$$

Damit können wir die Reihenglieder auf $D_R(0)$ nach oben abschätzen:

$$|\frac{c_\nu}{z - a_\nu} \cdot \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{k_\nu+1}| = |\frac{c_\nu}{a_\nu}| \cdot \frac{1}{|\frac{z}{a_\nu} - 1|} \cdot |\frac{z}{a_\nu}|^{k_\nu+1} \leq 2 \cdot |\frac{c_\nu}{a_\nu}| \cdot |\frac{z}{a_\nu}|^{k_\nu+1}.$$

Können wir die k_ν so groß wählen, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{a_\nu} \cdot \left(\frac{R}{a_\nu}\right)^{k_\nu+1}$$

absolut konvergent ist, so konvergiert die meromorphe Reihe gleichmäßig auf $D_R(0)$. Wenn wir es schaffen, dass dies für alle $R > 0$ gleichzeitig funktioniert, sind wir fertig.

Der Trick, der nun alles einfacher macht, besteht darin, alle k_ν gleich zu wählen. Wir setzen $k_\nu = N - 1$ für ein festes $N \in \mathbb{N}$ und alle ν. Das ergibt die folgende Regel:

Ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{a_\nu^{N+1}}$$

absolut konvergent, so ist eine Lösung der Hauptteilverteilung gegeben durch

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{z - a_\nu} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^N.$$

Beispiel.

Die Folge der (a_ν) sei eine Aufzählung aller ganzen Zahlen, die vorgegebenen Residuen c_ν seien alle gleich 1. Weil die Reihe

$$\sum_{\nu \neq 0} \frac{|c_\nu|}{|a_\nu|^2} = 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$$

konvergiert, genügt es, $N = 1$ anzusetzen, und wir erhalten als Lösung

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z-\nu} \cdot \frac{z}{\nu} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right).$$

Wir wollen untersuchen, ob wir diese Funktion schon in anderer Weise kennen. Um etwa $f(z)$ als Quotient zweier holomorpher Funktionen darzustellen, benötigen wir eine Nennerfunktion, die einfache Nullstellen in allen ganzen Zahlen hat. Die Abbildung $z \mapsto \sin(\pi z)$ erfüllt diese Bedingung. Deshalb untersuchen wir die Funktion

$$\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

und bestimmen das Residuum in ν aus $\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{res}_\nu(\cot(\pi z)) = \frac{\cos(\pi\nu)}{\pi \cdot \sin'(\pi\nu)} = \frac{1}{\pi}.$$

Also ist die Funktion $g(z) := \pi \cot(\pi z)$ auch eine Lösung der Hauptteilverteilung. Die Differenz der beiden Lösungen

$$h(z) := g(z) - f(z) = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right)$$

ist also eine ganze Funktion. Bestimmen wir ihre Ableitung, so ergibt sich

$$h'(z) = \pi^2 \cdot \cot'(\pi z) + \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{(z-\nu)^2}$$

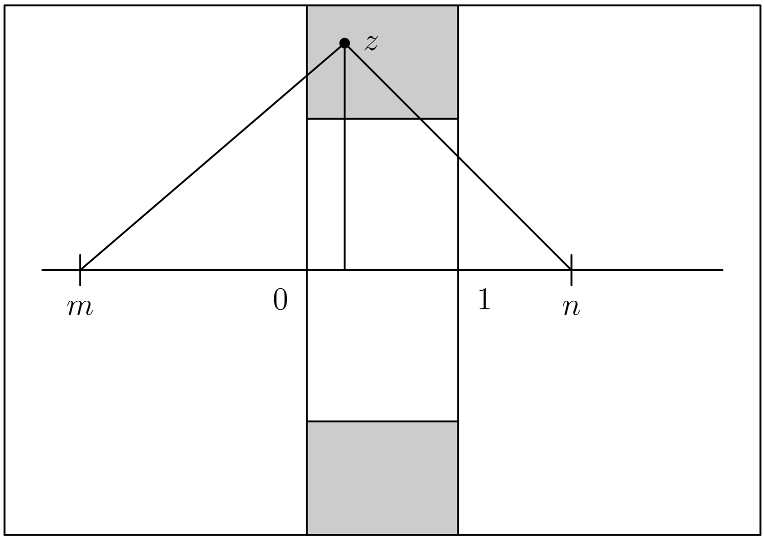
$$= - \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 + \underbrace{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\nu)^2}}_{=:h_0(z)},$$

weil $\cot'(z) = 1/(\sin^2(z))$ ist. Die Funktion h_0 ist meromorph und hat Polstellen in allen ganzen Zahlen. Außerdem ist sie periodisch mit Periode 1, da über alle ganzen Zahlen summiert wird. Auf dem „Streifen“

$$S := \{ z = x + \mathrm{i}\, y \,:\, 0 \leq x \leq 1 \text{ und } |y| \geq 1 \},$$

ist h_0 eine holomorphe Funktion.

Behauptung: *h_0 ist auf S beschränkt und geht gegen Null, wenn der Imaginärteil $y = \operatorname{Im}(z)$ gegen Unendlich geht, sogar gleichmäßig in $x = \operatorname{Re}(z)$.*



Weil die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks länger ist als die längere Kathete, die wiederum länger als das arithmetische Mittel der beiden Katheten ist, gilt:

$$|z-n| \geq \frac{1}{2}\big(|y| + (n-x)\big) \geq \frac{|y| + (n-1)}{2} \qquad \text{für } n \geq 1$$

und

$$|z-m| \geq \frac{1}{2}\big(|y| + (|m|+x)\big) \geq \frac{|y| + |m|}{2} \qquad \text{für } m \leq 0.$$

Das genügt schon für die Beschränktheit von h_0 auf S:

$$\begin{aligned} |h_0(z)| \;&\leq\; 4\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(|y| + (\nu-1))^2} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(|y| + |\mu|)^2}\right) \\ &\leq\; 8\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(|y|+\nu)^2} \leq 8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \infty. \end{aligned}$$

Ist jetzt $|y| > N$, so ist

$$|h_0(z)| \;\leq\; 8\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(N+\nu)^2} = 8\sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Die rechte Seite geht für $N \to \infty$ gegen Null, und damit gilt die Behauptung.

Selbstverständlich ist auch $\left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ periodisch mit Periode 1.

Behauptung: $|\sin(\pi z)|$ geht gegen Unendlich, wenn der Imaginärteil von z gegen Unendlich geht, denn:

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,z} - e^{-\mathrm{i}\,z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,x}e^{-y} - e^{-\mathrm{i}\,x}e^{y}).$$

Daraus folgt

$$|\sin z| = |\frac{e^y}{2}(e^{-x\mathrm{i}} - e^{\mathrm{i}\,x}e^{-2y})| \geq \frac{e^y}{2}(1 - e^{-2y}).$$

Für $y \to \infty$ strebt der ganze Ausdruck gegen Unendlich. Das bedeutet aber, dass die Funktion

$$h'(z) = h_0(z) - \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$$

ganz und periodisch ist und gegen Null geht, wenn der Imaginärteil von z gegen Unendlich geht. Nach dem Satz von Liouville ist h' konstant und die Konstante muss gleich Null sein. Damit ist h konstant. Nebenbei haben wir die folgende Identität gezeigt:

$$\boxed{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\nu)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2.}$$

Eine letzte Untersuchung an h ist noch nötig:

$$\begin{aligned} h(-z) &= \pi\cdot\cot(-\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu\neq 0}\left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right) \\ &= -\left[\pi\cot(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{\nu\neq 0}\left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right)\right] = -h(z), \end{aligned}$$

also ist h ungerade. Da $h(z) = c$ konstant ist, muß $c = 0$ gelten.

Halten wir als Ergebnis fest :

1.4 Satz. *Folgende Identitäten zwischen meromorphen Funktionen gelten auf ganz $\mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} \pi\cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu\neq 0}\left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right), \\ \textit{und} \quad \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\nu)^2}. \end{aligned}$$

1.5 Folgerung. *Es ist* $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Beweis: Setzen wir in der letzten Identität $z := 1/2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\frac{1}{2}-\nu)^2} = 4\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\nu-1)^2} \\ &= 4\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\mu+1)^2} + 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\mu+1)^2} + 1\right) = 8\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2}. \end{aligned}$$

■

Beispiel.

Ein weiteres interessantes Beispiel ist die Funktion

$$b(z) = \frac{z}{\exp(z) - 1},$$

die in $z = 0$ eine hebbare Singularität hat. Mit $b(0) := 1$ wird diese behoben. Weitere Singularitäten hat b in den Punkten $a_k = 2k\pi\mathsf{i}$, wobei k die ganzen Zahlen ohne Null durchläuft. Wir bestimmen die Residuen in den a_k :

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \frac{z}{\exp(z - a_k) - 1} = \frac{1}{z - a_k} \cdot \frac{z}{h(z - a_k)},$$

wobei h eine ganze Funktion ist, mit $h(0) = 1$. Deshalb ist das Residuum in a_k gleich a_k, das heißt, b ist meromorph mit Hauptteilverteilung

$$\left(\frac{a}{z - a}\right)_{a \in P}, \quad P = \{a_k = 2k\pi\mathsf{i} \ : \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Auf einer Kreisscheibe vom Radius 2π um Null kann b in eine Taylorreihe entwickelt werden :

$$b(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu.$$

Die Taylorkoeffizienten B_ν heißen die „Bernoullischen Zahlen“.

1.6 Satz.

1. *Die ersten Bernoullischen Zahlen sind $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$.*
2. *Es gilt $B_{2\nu+1} = 0$ für alle $\nu \geq 1$.*
3. *Alle weiteren lassen sich mit folgender Rekursionsformel berechnen:*

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\nu} B_\nu = 0 \text{ für } \lambda \geq 2.$$

BEWEIS: Es gilt natürlich $B_0 = b(0) = 1$. Wir beweisen nun zunächst die Rekursionsformel (3):

$$\begin{aligned} z &= b(z)\cdot(\exp(z)-1) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}z^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^\mu}{\mu!}\right) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\nu+\mu=\lambda,\\ \mu\geq 1}}\frac{B_\nu}{\nu!\mu!}\right)z^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\binom{\lambda}{\nu}B_\nu\right)\frac{z^\lambda}{\lambda!}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt deshalb

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\binom{\lambda}{\nu}B_\nu = 0 \quad \text{für } \lambda \geq 2,$$

insbesondere ist

$$0 = \binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 1 + 2B_1, \quad \text{also } B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Für die weiteren ungeraden Bernoullischen Zahlen beachten wir

$$b(z) - b(-z) = \frac{z}{\exp(z)-1} + \frac{z}{\exp(-z)-1} = \frac{z - z\exp(z)}{\exp(z)-1} = -z.$$

Das bedeutet für die Taylorentwicklungen:

$$-z = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}z^\nu\right) - \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}(-1)^\nu z^\nu\right) = 2\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{B_{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}z^{2\mu+1}.$$

Deshalb sind alle Bernoullischen Zahlen $B_{2\mu+1} = 0$ für $\mu \geq 1$. ∎

1.7 Folgerung. *Die nächsten Bernoullischen Zahlen sind*

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30} \text{ und } B_6 = \frac{1}{42}.$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Rekursionsformel. ∎

1.8 Satz (Eulersche Relation). *Mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen lassen sich Grenzwerte einer Serie von unendlichen Reihen bestimmen, es gilt:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}} = (-1)^{m+1}\cdot\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}\cdot B_{2m}\cdot\pi^{2m}.$$

Beweis: Wir starten mit der Reihendarstellung des Cotangens, die auf beiden Seiten mit z multipliziert ist:

$$\pi z \cdot \cot(\pi z) = 1 + z \cdot \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right).$$

Zunächst wird die linke Seite „geeignet“ umgeformt. Eine Betrachtung des Cotangens ergibt

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathsf{i}\,\frac{e^{\mathsf{i}\,z} + e^{-\mathsf{i}\,z}}{e^{\mathsf{i}\,z} - e^{-\mathsf{i}\,z}} = \mathsf{i}\,\frac{e^{2\mathsf{i}\,z} + 1}{e^{2\mathsf{i}\,z} - 1} = \mathsf{i}\,\left(1 + \frac{2}{e^{2\mathsf{i}\,z} - 1}\right).$$

Nach Multiplikation mit z ergibt sich dann die eben untersuchte Funktion b:

$$\begin{aligned}
z \cdot \cot z &= \mathsf{i}\,z + \frac{2\mathsf{i}\,z}{e^{2\mathsf{i}\,z} - 1} = \mathsf{i}\,z + b(2\mathsf{i}\,z) \\
&= \mathsf{i}\,z + 1 - \frac{2\mathsf{i}\,z}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}(2\mathsf{i}\,z)^{2\nu} \\
&= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} 2^{2\nu}(-1)^{\nu} z^{2\nu}.
\end{aligned}$$

Ersetzen wir schließlich z durch πz, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\pi z \cdot \cot(\pi z) &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} 2^{2\nu}(-1)^{\nu}(\pi z)^{2\nu} \\
&= 1 - 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left((-1)^{\nu+1} \frac{2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} B_{2\nu}\pi^{2\nu} \right) z^{2\nu}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
1 + z \cdot \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right) &= 1 + z \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \right) \right) \\
&= 1 + 2z^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \nu^2} = 1 + 2z^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\nu^2} \right) \cdot \frac{1}{1 - (\frac{z}{\nu})^2} \\
&= 1 - 2z^2 \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\nu} \right)^{2\mu} \right) \\
&= 1 - 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\mu+2}} \right) z^{2\mu+2} \\
&= 1 - 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\mu}} \right) z^{2\mu}.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich der beiden Entwicklungen ergibt die Behauptung. ■

Nun können die Summen von Reihen, die schon aus Analysis I bekannt sind, endlich berechnet werden:

1.9 Folgerung. *Es ist*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \textit{und} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$