
Kapitel I

Holomorphe Funktionen

§1 Potenzreihen

Definition.

Sei $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a . Die Zahl

$$R := \sup\{r \geq 0 \mid \exists z \in \mathbb{C}, \text{ so da\ss } f_a(z) \text{ konvergent und } r = |z-a| \text{ ist.}\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Der Fall $R = 0$ ist auch zugelassen! Ist $f_a(z)$ auf ganz \mathbb{C} konvergent, so setzt man $R := +\infty$.

I.1.1 Satz. R sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f_a(z)$. Dann gilt:

1. Für $0 < r < R$ konvergiert $f_a(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ absolut und gleichmäßig.
2. Auf dem Konvergenzkreis konvergiert f_a kompakt gegen eine stetige Funktion.
3. Ist $|z-a| > R$, so divergiert $f_a(z)$.

I.1.2 Formel von Cauchy-Hadamard. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe und

$$c := \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Dann gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe:

1. Wenn c eine endliche Zahl > 0 ist, dann ist $R = \frac{1}{c}$.
2. Wenn $c = \infty$ ist, dann ist $R = 0$.
3. Wenn $c = 0$ ist, dann ist $R = \infty$.

Wichtige Beispiele von Potenzreihen:

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \text{und } \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

I.1.3 Eulersche Formel. *Es ist*

$$\boxed{\exp(\mathbf{i}z) = \cos(z) + \mathbf{i} \sin(z)}, \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

I.1.4 Folgerung. *Es ist* $\exp(z + 2\pi\mathbf{i}) = \exp(z)$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aus der Eulerschen Formel kann man weitere Relationen ableiten, wie z.B.:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}) \\ \text{und } \sin(z) &= \frac{1}{2\mathbf{i}}(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}). \end{aligned}$$

§2 Komplexe Differenzierbarkeit

I.2.1 Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. f ist in z_0 reell differenzierbar und die (reelle) Ableitung $Df(z_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist \mathbb{C} -linear.
2. Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : G \rightarrow \mathbb{C}$, so daß für alle $z \in G$ gilt:

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0).$$

3. Es existiert der Grenzwert $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

4. $f = g + \mathbf{i}h$ ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} g_x &= h_y, \\ g_y &= -h_x. \end{aligned}}$$

Definition.

Die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in z_0 *komplex differenzierbar*, wenn eine der äquivalenten Bedingungen des vorigen Satzes erfüllt ist.

Die komplexe Zahl $f'(z_0) := Df(z_0)(1)$ nennt man die (*komplexe*) *Ableitung* von f in z_0 .

f heißt *auf G komplex differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $z \in G$ komplex differenzierbar ist.

Beispiel :

Sei $f(z) := z\bar{z}$. Dann ist $f(z) - f(0) = \bar{z} \cdot (z - 0)$. Also ist f in $z_0 := 0$ komplex differenzierbar und $f'(0) = 0$. Sie ist aber in keinem Punkt $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar, denn sonst wäre dort auch die Funktion

$$k(z) := \bar{z} = \frac{1}{z} \cdot f(z)$$

komplex differenzierbar

I.2.2 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $f_z(z_0)$ und $f_{\bar{z}}(z_0)$, so daß gilt:

$$Df(z_0)(h) = f_z(z_0) \cdot h + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h}.$$

Definition.

Die Zahlen $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := f_z(z_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := f_{\bar{z}}(z_0)$ nennt man die *Wirtinger-Ableitungen von f nach z und \bar{z}* .

I.2.3 Satz (Wirtinger-Kalkül).

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 reell differenzierbar. Dann gilt:

1. $f_z = \frac{1}{2}(f_x - \mathbf{i}f_y)$ und $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + \mathbf{i}f_y)$ (in z_0).
2. f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ ist.
3. $\overline{f_z(z_0)} = \overline{f}_{\bar{z}}(z_0)$ und $\overline{f_{\bar{z}}(z_0)} = \overline{f}_z(z_0)$.
4. Die Ableitungen $f \mapsto f_z(z_0)$ und $f \mapsto f_{\bar{z}}(z_0)$ sind \mathbb{C} -linear und erfüllen die Produktregel.
5. Höhere Wirtinger-Ableitungen werden wie üblich induktiv definiert. Insbesondere gilt für $2 \times$ stetig differenzierbares f : $f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})$.
6. Ist $\alpha : I \rightarrow G$ ein differenzierbarer Weg mit $\alpha(t_0) = z_0$, so ist

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = f_z(z_0) \cdot \alpha'(t_0) + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot \overline{\alpha'(t_0)}.$$

Definition.

Eine Funktion f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ *holomorph*, wenn sie in einer offenen Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist.

Komplexe Polynome sind auf ganz \mathbb{C} holomorph. Eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist auf dem Konvergenzkreis der Reihe holomorph. Die Funktion $f(z) := z\bar{z}$ ist zwar in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph!

Auf Gebieten in \mathbb{C} stimmen die Begriffe „holomorph auf G “ und „komplex differenzierbar auf G “ überein.

I.2.4 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

1. Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.
2. Ist $|f|$ konstant, so ist auch f konstant.

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ist.

Der Differentialoperator $\Delta : f \mapsto f_{xx} + f_{yy}$ heißt *Laplace-Operator*.

Sei nun $f = g + \mathbf{i}h : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige und zweimal stetig reell differenzierbare Funktion. Ist f außerdem einmal komplex differenzierbar, so gelten die CR-DGLn : $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} &= h_{yx} - h_{xy} = 0 \\ \text{und } h_{xx} + h_{yy} &= -g_{yx} + g_{xy} = 0. \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ sind jeweils harmonisch!

I.2.5 Satz. Sei $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $g|_U = \operatorname{Re}(f)$ ist.

BEWEIS: Wir suchen eine in der Nähe von z_0 definierte und zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion h mit $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Wegen der ersten Gleichung wird man es mit einer Stammfunktion

$$h(x + \mathbf{i}y) = \int g_x(x + \mathbf{i}y) dy + C$$

versuchen. Dabei ist aber zu beachten, daß die Integrationskonstante C noch von x abhängen kann. Wie sie zu wählen ist, sollte sich aus der zweiten zu erfüllenden Gleichung ergeben. \square

Kapitel II

Integration im Komplexen

§1 Der Satz von Goursat

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg (also stückweise stetig differenzierbar). Dann wird das *komplexe Kurvenintegral* von f über α definiert durch

$$\int_{\alpha} f(z) dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

II.1.1 Satz. *Es gilt die „Standardabschätzung“:*

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| \leq L(\alpha) \cdot \max_{z \in |\alpha|} |f(z)|,$$

wobei $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$ die Länge von

Beispiel:

Ist $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) die übliche Parametrisierung einer Kreislinie mit Radius r um z_0 , so ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-it} \cdot r i e^{it} dt \\ &= i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und für } n \neq -1 \quad \int_{\alpha} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (r e^{it})^n \cdot r i e^{it} dt \\ &= r^{n+1} i \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} i \cdot \left(\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

II.1.2 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion.
2. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg und $p := \alpha(a)$, $q := \alpha(b)$, so hängt das Integral $\int_{\alpha} f(z) dz$ nur von p und q und nicht von α ab.
3. $\int_{\alpha} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G .

II.1.3 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion.
2. $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat.

II.1.4 Satz von Goursat. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS-IDEE: Man konstruiert eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L(\partial\Delta).$$

Im Durchschnitt aller dieser Dreiecke liegt genau ein Punkt z_0 .

Man schreibt nun $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot (f'(z_0) + A(z))$, mit einer in z_0 stetigen und dort verschwindenden Funktion A . Weil eine affin-lineare Funktion immer eine Stammfunktion besitzt und dann das Integral darüber und über einen geschlossenen Weg verschwindet, ergibt sich:

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0) \cdot A(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}} |A(z)|.$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0.

II.1.5 Cauchyscher Integralsatz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht sternförmig. Tatsächlich ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, es ist z.B.

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0.$$

Setzen wir aber $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, so ist die „geschlitzte Ebene“ $G' := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$). Also gibt es auf G' für $f(z) := \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion:

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

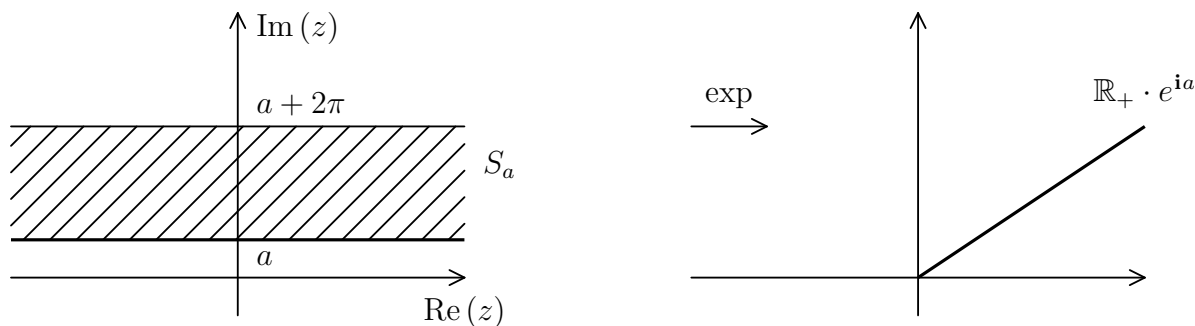
Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in G' verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, daß das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Definition.

$$\log(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\text{für } z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-) \quad \text{heißt } \textit{Logarithmusfunktion}.$$

II.1.6 Satz. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \text{Im}(z) < a + 2\pi\}$.

Dann ist $\exp : S_a \rightarrow \mathbb{C}^*$ bijektiv. Dabei wird die Gerade $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = a\}$ auf den Strahl $\mathbb{R}_+ \cdot e^{ia}$ abgebildet.



Definition.

$$\log_{(a)} := (\exp \Big|_{\mathring{S}_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{ia} \rightarrow \mathring{S}_a$$

heißt der durch a bestimmte Logarithmuszweig.

II.1.7 Satz. Ist $z = r \cdot e^{it}$, mit $a < t < a + 2\pi$, so ist $\log_{(a)}(z)$ definiert, und es gilt

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + it.$$

Insbesondere ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z)$, falls $z \notin \mathbb{R}_-$ ist. Man nennt $\log(z)$ auch den Hauptzweig des Logarithmus.

Behauptung:

1. Durch $L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ wird auf $D_1(1)$ eine holomorphe Funktion definiert.
2. Für $|z-1| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

Mit Hilfe der Logarithmusfunktion können wir auch beliebige Potenzen in \mathbb{C} definieren:

Definition.

Für komplexe Zahlen z und w mit $z \neq 0$ setzt man $z^w := \exp(w \cdot \log(z))$.

Dabei kann der Exponent w beliebig gewählt werden. z muß im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Normalerweise benutzt man den Hauptzweig, dann darf z nicht in \mathbb{R}_- liegen.

Beispiel:

Was ist $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$? Benutzen wir die Beziehung $\mathbf{i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \exp(\mathbf{i} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{i\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathbf{i} \cdot i\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879 \dots$$

Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich

$$\exp(\mathbf{i} \cdot (i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i)) = e^{-\pi/2 - 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

§2 Die Cauchyschen Integralformeln

II.2.1 Die Cauchysche Integralformel. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.

Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

II.2.2 Entwicklungssatz von Cauchy. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0 , die noch in G hineinpaßt, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem ist dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

wobei r mit $0 < r < R$ beliebig gewählt werden kann.

II.2.3 Folgerung (Höhere Cauchysche Integralformeln). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z \in G$ und $D_r(z) \subset\subset G$ ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Definition.

f heißt auf G *analytisch*, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

II.2.4 Satz von Morera. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$. Dann ist f holomorph auf G .

II.2.5 Theorem. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.
2. f ist komplex differenzierbar.
3. f ist holomorph.
4. f ist beliebig oft komplex differenzierbar.
5. f ist analytisch.
6. f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.
7. f ist stetig, und es ist $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in G .

II.2.6 Riemannscher Hebbarkeitssatz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion \hat{f} auf G , die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

II.2.7 Identitätssatz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (hier ist wichtig, daß G zusammenhängend ist!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.
2. $f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.
3. Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

II.2.8 Maximumprinzip. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

II.2.9 Folgerung. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf G , so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

II.2.10 Satz von Liouville. Ist f auf ganz \mathbb{C} holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

II.2.11 Fundamentalsatz der Algebra.

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

II.2.12 Konvergenzsatz von Weierstraß. Ist (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G , die auf G kompakt gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f holomorph, und für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $(f_n^{(k)})$ auf G kompakt gegen $f^{(k)}$.

Definition.

1. Seien B_1, B_2 zwei offene Mengen in \mathbb{C} , $f : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(B_1) = B_2$. f heißt *biholomorph*, falls f sogar bijektiv und f^{-1} holomorph ist.
2. Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *lokal biholomorph*, falls es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$ gibt, so daß $f|_U : U \rightarrow V$ biholomorph ist.

II.2.13 Satz.

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ lokal biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

II.2.14 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant.

Ist $f(z_0) = 0$, so gibt es ein $k > 0$, eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, so daß gilt:

1. $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für $z \in U$.
2. $g(z_0) \neq 0$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt durch

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

II.2.15 Folgerung (Satz von der Gebietstreue). Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Erstaunlich ist auch:

II.2.16 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, also insbesondere $f : G \rightarrow f(G)$ biholomorph.

§3 Die Umlaufszahl

Bemerkung: Für einen Weg α bezeichnen wir den Anfangs- bzw. Endpunkt von α mit $z_A(\alpha)$ bzw. $z_E(\alpha)$.

Eine 1-Kette in einem Gebiet G ist eine formale Linearkombination

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N n_i \alpha_i$$

von Wegen α_i in G mit ganzzahligen Koeffizienten n_i .

Γ heißt ein *Zyklus*, falls jeder Punkt von G gleich oft als Anfangs- und als Endpunkt irgendwelcher α_i auftritt. Dabei sind die Vielfachheiten zu berücksichtigen.

II.3.1 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. f besitzt genau dann auf G eine Stammfunktion, wenn gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{für jeden Zyklus } \Gamma \text{ in } G.$$

Definition.

Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^N n_i \alpha_i$ eine Kette in \mathbb{C} und $z \notin |\Gamma|$. Dann definiert man:

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N n_i \int_{\alpha_i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

II.3.2 Satz. Ist Γ ein Zyklus und $z_0 \notin |\Gamma|$, so ist $n(\Gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS-IDEE: Um $n(\Gamma, z_0)$ zu berechnen, benutzt man Logarithmusfunktionen als Stammfunktionen von $\frac{1}{z - z_0}$. Das geht aber nicht global, und bei jedem Wechsel der Logarithmusfunktion kann ein Vielfaches von $2\pi\mathbf{i}$ als zusätzlicher Summand auftreten. Summiert man nach Durchlaufen des Weges alle Korrekturterme auf und teilt durch $2\pi\mathbf{i}$, so bleibt eine ganze Zahl übrig.

Definition.

1. Ist Γ ein Zyklus und $z_0 \notin |\Gamma|$, so heißt $n(\Gamma, z_0)$ die Umlaufszahl von Γ bzgl. z_0 .
2. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$. Dann heißt

$$C_B(z_0) := \{z \in B \mid \exists \text{ stetiger Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ in } B.\}$$

die *Zusammenhangskomponente* von z_0 in B .

II.3.3 Satz. Sei Γ ein Zyklus in \mathbb{C} . Dann enthält $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Die Umlaufszahl $n(\Gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente konstant und verschwindet auf der unbeschränkten Komponente.

Diese Tatsache kann man ausnutzen, um die Umlaufszahlen geometrisch zu bestimmen. Außen ist sie Null. Überschreitet man den Weg, so erhöht sich die Umlaufszahl um 1, wenn der Weg von links kommt, und sie sinkt um 1, wenn der Weg von rechts kommt.

Definition.

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen. Ein Zyklus Γ in B heißt *nullhomolog in B* , falls $n(\Gamma, z) = 0$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus B$ ist.

II.3.4 Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein nullhomologer Zyklus in B . Dann gilt:

1. $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

2. Ist $z \in B \setminus |\Gamma|$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Definition.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls jeder Zyklus in G nullhomolog in G ist.

Anschaulich bedeutet das, daß G keine „Löcher“ hat.

II.3.5 Folgerung. *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion f auf G und jeden Zyklus Γ in G .

II.3.6 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *G ist einfach zusammenhängend.*
2. *$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ für jeden Zyklus Γ in G und jede holomorphe Funktion f auf G .*
3. *Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion.*
4. *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen, so gibt es eine holomorphe Funktion q auf G mit $\exp \circ q = f$.*

Kapitel III

Isolierte Singularitäten

§1 Die Laurent-Entwicklung

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine *isolierte Singularität* von f .

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U , bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f , wenn es eine holomorphe Funktion \hat{f} auf U gibt, so daß $f(z) = \hat{f}(z)$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.
2. z_0 heißt eine *Polstelle* von f , wenn es ein $k \geq 1$, eine Umgebung $W = W(z_0) \subset U$ und eine auf W holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ gibt, so daß gilt:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot g(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$

Die Zahl k heißt dann die Polstellenordnung von f in z_0 .

3. z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f , wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

III.1.1 Satz. Sei z_0 eine isolierte Singularität von f .

1. z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt.
2. Eine Polstelle liegt genau dann in z_0 vor, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ ist.

III.1.2 Satz von Casorati-Weierstraß. f hat in z_0 genau dann eine wesentliche (isolierte) Singularität, wenn $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommt.

Das Kriterium bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$.

Beispiele :

1. Sei $f(z) := \frac{z}{\sin z}$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, also $\sin(z) = z \cdot h(z)$, mit einer nahe $z_0 = 0$ holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß $|\frac{\sin(z)}{z}| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

Also ist $|f(z)| = |\frac{z}{\sin(z)}| < \frac{1}{1 - \varepsilon}$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Der Wert, der in 0 ergänzt werden muß, ist gegeben durch $\frac{1}{h(0)} = 1$.

2. $f(z) := \frac{1}{z}$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.
3. Sei $f(z) := \exp(\frac{1}{z})$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor.

Setzen wir $z_n := \frac{1}{n}$ ein, so strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞ . Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

Setzen wir dagegen $z_n := -\frac{1}{2\pi n} \mathbf{i}$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathbf{i}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞ . Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Definition.

Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n nennt man die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 den Entwicklungspunkt.

$$\begin{aligned} H(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \end{aligned}$$

heißt *Hauptteil der Reihe*,

$$\begin{aligned} N(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

heißt *Nebenteil der Reihe*.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent* (absolut konvergent, normal konvergent usw.), wenn Hauptteil und Nebenteil es jeweils für sich sind.

III.1.3 Satz. Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 , $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der „Konvergenzradius“ des Hauptteils, d.h. der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\tilde{H}(w) := H\left(\frac{1}{w} + z_0\right) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots$$

1. Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von \mathbb{C} .
2. Ist $r^* \cdot R > 1$ und $r := \frac{1}{r^*}$, so konvergiert $L(z)$ auf dem Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

absolut und im Inneren des Kreisringes gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.

III.1.4 Satz von der „Laurent-Trennung“.

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

1. $f^+ + f^- = f$ auf $K_{r,R}(z_0)$.
2. $|f^-(z)| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$.

III.1.5 Folgerung. Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann läßt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

entwickeln. Die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f .

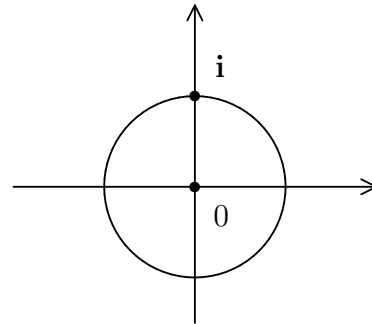
Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Beispiel :

$$\text{Sei } f(z) := \frac{1}{z(z - \mathbf{i})^2}.$$

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathbf{i}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\frac{1}{z - z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z - a| < |z_0 - a|$ ist

$$\left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right| < 1,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{z - a - (z_0 - a)} \\ &= -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{z_0-a}} \\ &= -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{z_0 - a} \right)^n. \end{aligned}$$

Ist $|z - a| > |z_0 - a|$, so geht man analog vor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0-a}{z-a}} \\ &= \frac{1}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - a}{z - a} \right)^n. \end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z - z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^{(m-1)}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\frac{1}{z - z_0}$ erhält man die Reihe für die m -ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist $z_0 = \mathbf{i}$ und $a = 0$, und daher

$$\frac{1}{z - \mathbf{i}} = \mathbf{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z - \mathbf{i})^2} = - \left(\frac{1}{z - \mathbf{i}}\right)' = -\mathbf{i} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\mathbf{i}} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\mathbf{i}^n} z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{\mathbf{i}^{n+1}} z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist

$$\frac{1}{z - \mathbf{i}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{i}^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z - \mathbf{i})^2} = - \left(\frac{1}{z - \mathbf{i}}\right)' = - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{i}^{n-1} (-n) \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{i}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{i}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \mathbf{i}^{n-3} (n-2) \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3} \mathbf{i}^{-n-1} (n+2) z^n,$$

wegen $\mathbf{i}^{-n-3} (-n-2) = \mathbf{i}^{-n-1} (n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathbf{i})$:

Hier soll nach Potenzen von $(z - \mathbf{i})$ entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathbf{i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \mathbf{i}}{-\mathbf{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{i}^{n+1}) (z - \mathbf{i})^n,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z - \mathbf{i})^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{i}^{n+1}) (z - \mathbf{i})^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (-\mathbf{i}^{n+3}) (z - \mathbf{i})^n \\ &= \frac{-\mathbf{i}}{(z - \mathbf{i})^2} + \frac{1}{z - \mathbf{i}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{i}^{n+1} (z - \mathbf{i})^n. \end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathbf{i})$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

III.1.6 Satz. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ hebbar} &\iff a_n = 0 \text{ für alle } n < 0, \\ z_0 \text{ Polstelle} &\iff \exists n < 0 \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ und } a_k = 0 \text{ für } k < n, \\ z_0 \text{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beispiele:

1.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \dots$$

besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2.

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathbf{i})^2}$$

hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in \mathbf{i} . Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

3.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.

$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$

ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \frac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$.

Aber dann ist auch $\frac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{mit } a_0 = 1.$$

Also ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Das bedeutet, daß f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Definition.

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und D in B diskret. Eine holomorphe Funktion $f : B \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *meromorphe Funktion auf B* , falls f in den Punkten von D höchstens Polstellen besitzt (also keine wesentlichen Singularitäten).

§2 Der Residuensatz

Definition.

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so daß $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta) d\zeta$$

das *Residuum* von f in z_0 .

Bemerkungen :

1. Das Residuum hängt nicht von der Wahl des Radius ε ab. Das sieht man sofort mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes.
2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Auch das folgt aus dem Integralsatz.
3. In der Laurententwicklung von f um z_0 ist

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta) d\zeta = \operatorname{res}_{z_0}(f),$$

für ein genügend kleines ε . Das zeigt noch einmal, daß f nicht von dem gewählten Radius abhängt.

4. Es ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) + b \cdot \operatorname{res}_{z_0}(g).$$

5. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn das Integral über eine abgeleitete Funktion und einen geschlossenen Weg verschwindet immer.

$$6. \operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) = 1 \text{ und } \operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{1}{(z - z_0)^k} \right) = 0 \text{ für } k \geq 2.$$

7. Allgemeiner gilt: Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

8. Und noch allgemeiner kann man zeigen:

Hat f in z_0 eine m -fache Polstelle, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

9. Seien g und h holomorph nahe z_0 , $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

$$\text{Dann ist } \operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beispiele:

$$1. \text{ Sei } f(z) := \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iz}}{(z - \mathbf{i})(z + \mathbf{i})}.$$

f hat einfache Polstellen bei \mathbf{i} und $-\mathbf{i}$. Es ist

$$\operatorname{res}_{\mathbf{i}}(f) = \lim_{z \rightarrow \mathbf{i}} (z - \mathbf{i})f(z) = \lim_{z \rightarrow \mathbf{i}} \frac{e^{iz}}{z + \mathbf{i}} = -\frac{1}{2e} \mathbf{i},$$

und analog

$$\operatorname{res}_{-\mathbf{i}}(f) = \lim_{z \rightarrow -\mathbf{i}} (z + \mathbf{i})f(z) = \lim_{z \rightarrow -\mathbf{i}} \frac{e^{iz}}{z - \mathbf{i}} = \frac{e}{2} \mathbf{i}.$$

2. $f(z) := \frac{z^2}{1 + z^4}$ hat 4 einfache Nullstellen, insbesondere in

$$z_0 := e^{(\pi/4)\mathbf{i}} = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{i}).$$

Mit $g(z) := z^2$ und $h(z) := 1 + z^4$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_0}(f) &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \\ &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} \\ &= \frac{1}{4} e^{-(\pi/4)\mathbf{i}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \mathbf{i}). \end{aligned}$$

III.2.1 Der Residuensatz. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $D \subset B$ diskret, Γ ein nullhomologer Zyklus in B mit $|\Gamma| \cap D = \emptyset$ und $f : B \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in B} n(\Gamma, z) \operatorname{res}_z(f).$$

Bemerkung: Außerhalb einer kompakten Menge $K \subset B$ ist $n(\Gamma, z) = 0$. Da $K \cap D$ endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte $z \in B$, in denen das Produkt $n(\Gamma, z) \cdot \text{res}_z(f)$ nicht verschwindet. Also ist die Summe auf der rechten Seite der Gleichung sinnvoll.

III.2.2 Das Argument-Prinzip. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und Γ ein nullhomologer Zyklus in B .

Weiter sei f auf B meromorph und nicht konstant, N die Menge der Nullstellen und P die Menge der Polstellen von f . Es sei $|\Gamma| \cap (N \cup P) = \emptyset$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{a \in N} n(\Gamma, a) o(f, a) - \sum_{b \in P} n(\Gamma, b) o(f, b),$$

wenn man mit $o(f, z)$ die Null- bzw. Polstellenordnung von f in z bezeichnet.

§3 Integralberechnungen

Der Residuensatz erlaubt es, gewisse, analytisch schwer zu behandelnde reelle Integrale auf algebraischem Wege zu berechnen.

1. Trigonometrische Integrale:

Sei $R(x, y)$ eine komplexwertige rationale Funktion. Wir wollen den Residuensatz anwenden, um Integrale vom Typ

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck suchen wir eine holomorphe oder meromorphe Funktion f , so daß wir das fragliche Integral als komplexes Kurvenintegral auffassen können:

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \text{mit } \gamma(t) := e^{\mathbf{i}t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathbf{i} \sin t$ und $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \text{und } \sin t &= \frac{1}{2\mathbf{i}} \left(z - \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Da $\gamma'(t) = \mathbf{i}\gamma(t)$ ist, folgt:

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathbf{i}\gamma(t)} \cdot R \left(\frac{1}{2} \left(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)} \right), \frac{1}{2\mathbf{i}} \left(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)} \right) \right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also

$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2\mathbf{i}} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{i} \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= 2\pi \cdot \sum_{z \in D_1(0)} \operatorname{res}_z(f). \end{aligned}$$

Beispiel:

Sei $I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $a > 1$ reell. Hier ist

$$R(x, y) = \frac{1}{a + y},$$

also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} = \frac{2i}{2aiz + z^2 - 1} = \frac{2i}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit $z_{1,2} = i(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$.

f hat zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Da $a > 1$ ist, ist

$$(a - 1)^2 < a^2 - 1 < (a + 1)^2, \text{ also } a - 1 < \sqrt{a^2 - 1} < a + 1,$$

und damit

$$-1 < -a + \sqrt{a^2 - 1} < 1, \text{ d.h. } z_1 = i(-a + \sqrt{a^2 - 1}) \in D_1(0).$$

Andererseits ist $|-a - \sqrt{a^2 - 1}| = |a + \sqrt{a^2 - 1}| \geq |a| > 1$, also $z_2 \notin D_1(0)$.
Dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} &= 2\pi \cdot \operatorname{res}_{z_1}(f) \\ &= 2\pi \cdot \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2i}{z - z_2} \\ &= \frac{4\pi i}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{4\pi i}{2i\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

2. Uneigentliche rationale Integrale:

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

betrachten, wobei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sei, und $p(x)$ und $q(x)$ Polynome ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) = \deg(p) + k$, $k \geq 0$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $R > 0$, so daß

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq C \cdot \frac{1}{|z|^k}$$

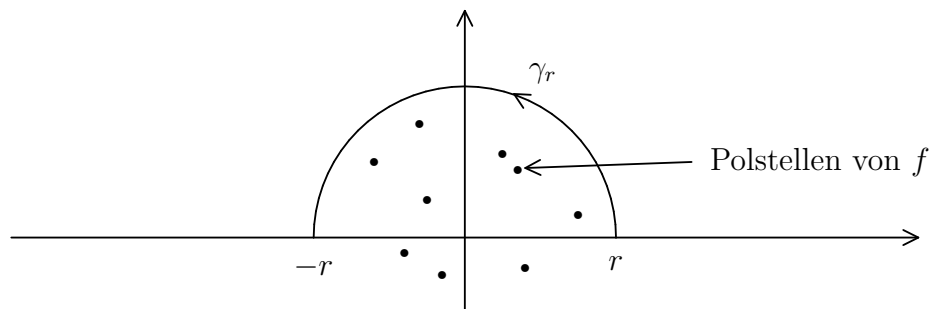
für $|z| \geq R$ ist.

Ist $k \geq 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

Insbesondere ist dann $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß alle Polstellen von $f(z)$ in $\bar{D}_r(0)$ liegen, und das können nur höchstens endlich viele sein.

Wir betrachten nun den Weg γ , der aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, zusammengesetzt ist.



Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{res}_z(f).$$

Man beachte, daß das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine *endliche* Summe!

Da $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ für große z ist, folgt:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{res}_z(f)$$

(oder $= -2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z) < 0} \text{res}_z(f)$).

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall.

Erinnerung:

$$\text{C.H. } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(t) dt$$

heißt *Cauchyscher Hauptwert* des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, daß der Cauchysche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

Beispiel:

Wir wollen $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \frac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Dabei ist $\text{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da alle 4 Nullstellen von $1+z^4$ verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \text{und} \quad z_1 = i e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Wie wir schon an früherer Stelle gesehen haben, ist

$$\begin{aligned} \text{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 \\ \text{und} \quad \text{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1, \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i) \right) \\ &= \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}(-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Aus der Fourier-Theorie stammende Integrale

$$\text{vom Typ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx,$$

wobei F Einschränkung einer meromorphen Funktion auf \mathbb{C} ist, mit endlich vielen Polstellen, so daß $z \cdot F(z)$ für $z \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{res}_z(F(z) \cdot e^{izt}).$$

Die Existenz des Integrals ist auf jeden Fall gesichert.

Aufgaben

Aufgabe 1:

Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad n mit den (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen ζ_1, \dots, ζ_n . Zeigen Sie:

a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ ist $\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\overline{z - \zeta_\nu}}{|z - \zeta_\nu|^2}$.

b) Zu jeder Nullstelle ζ von p' gibt es nicht-negative reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $\zeta = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \zeta_\nu$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{c^n}, \quad c \neq 0.$$

Aufgabe 3:

Sei $G := \{z = x + iy \mid (x \neq 0 \text{ und } y > 0) \text{ oder } y > 1\}$ und $H_+ := \{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Zeigen Sie, daß durch $w = \sqrt{z^2 + 1}$ eine bijektive holomorphe Abbildung von G nach H_+ definiert wird. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion! Ist die Umkehrfunktion wieder holomorph?

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie – wenn möglich – holomorphe Funktionen $f(z)$ mit $\text{Re}(f(x + iy)) = x^2 - 3x - y^2$ bzw. $\text{Re}(f(x + iy)) = 5e^{3x} \cos(3y)$.

Geben Sie die Lösungen möglichst in *komplexer* Form an.

Aufgabe 5:

a) Beweisen Sie das **Minimumprinzip**:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Minimum, so ist f konstant.

b) Sei nun G sogar ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und auf G holomorph. Zeigen Sie: Ist $|f(z)| \equiv c$ auf ∂G , so ist f konstant oder besitzt in G eine Nullstelle.

Aufgabe 6:

a) Sei $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ und } |z| < 1\}$.

Berechnen Sie $\int_{\partial G} |z| \bar{z} dz$.

b) Berechnen Sie $\int_{\partial D_3(0)} \frac{6z^2}{z^2 + 10} dz$.

c) Sei α ein Integrationsweg von $1 + \mathbf{i}$ nach $2\mathbf{i}$. Berechnen Sie $\int_{\alpha} \cos((1 + \mathbf{i})z) dz$.

Aufgabe 7:

Der Weg $\alpha : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 + e^{\mathbf{i}(t-\pi)} & \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi, \\ -1 + e^{\mathbf{i}(4\pi-t)} & \text{für } 2\pi < t \leq 4\pi. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\alpha} \frac{z^2 + z - 3}{z^3 - z^2 - 2z + 2} dz \quad \text{und} \quad \int_{\alpha} \frac{z}{\sin z} dz.$$

Aufgabe 8:

Sei α eine positiv orientierte Parametrisierung der durch $|z + 2| + |z - 2| = 6$ gegebenen Kurve. Berechnen Sie das Integral $\int_{\alpha} \frac{z^5}{(z^2 - 1)(z + \mathbf{i})^2} dz$.

Aufgabe 9:

Berechnen Sie **möglichst einfach**:

a) $\int_{\alpha} \frac{1}{z^2} dz$ für $\alpha(t) := 3 + \mathbf{i} + 2e^{\mathbf{i}t}$, $0 \leq t \leq \pi$,

b) $\int_{\beta} z \cdot \sin(z^2 + 1) dz$ für $\beta(t) := t + \mathbf{i}t^2$, $0 \leq t \leq 1$,

c) $\int_{\partial D_r(0)} \frac{\sin z}{z^3} dz$ für $r > 0$ und

d) $\int_{\partial D_r(0)} \frac{\sin z}{z^4} dz$ für $r > 0$.

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen. Ermitteln Sie bei hebbaren Singularitäten den zu ergänzenden Wert und bei Polstellen die Ordnung.

$$\text{a) } f_1(z) := \frac{z - \pi}{\sin z},$$

$$\text{b) } f_2(z) := \frac{z^2 + \mathbf{i}}{z^4 + 1},$$

$$\text{c) } f_3(z) := \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

Aufgabe 11:

Berechnen Sie die Laurentreihe von

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2\mathbf{i})^2} \quad \text{für } |z| > 2$$

$$\text{und von } f(z) = (z + \mathbf{i}) \cos \frac{1}{z - \pi} \quad \text{im größten Kreisring um } \pi,$$

dessen innerer Radius = 0 ist.

Aufgabe 12:

Entwickeln Sie $f(z) := \frac{1}{(z + 1)(z + 2)}$ im Kreisring $\{z : 2 < |z - 1| < 3\}$ in eine Laurentreihe.

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die folgenden Residuen:

$$\text{res}_0(e^{-1/z}), \quad \text{res}_z\left(\frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2}\right) \quad \text{für } z = \pm 1$$

$$\text{und } \text{res}_{-1}\left(\frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)}\right).$$

Aufgabe 14:

Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1}$ mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 15:

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta}$.

Lösungen

Lösung zu (1) :

Die Aufgabe wirkt durch den etwas längeren Text und ihre unübersichtliche Aussage schwerer als sie ist.

Aus den Voraussetzungen ergibt sich zunächst:

$$p(z) = c \cdot (z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_n).$$

- a) Beim Differenzieren von p muß man die Produktregel auf ein Produkt aus n Faktoren anwenden. Das erfordert so etwas wie einen trivialen Induktionsbeweis. Um diesen besonders übersichtlich zu gestalten, kann man am besten p in der Form

$$p(z) = c \cdot (z - \zeta_1) \cdot q(z)$$

schreiben, mit

$$q(z) := (z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_n).$$

q ist Polynom vom Grad $n - 1$ mit den Nullstellen $\zeta_2 \dots \zeta_n$. Dann gilt für die Ableitung von p :

$$p'(z) = c \cdot q(z) + c \cdot (z - \zeta_1) \cdot q'(z),$$

also

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{q'(z)}{q(z)}.$$

Induktiv folgt nun:

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \cdots + \frac{1}{z - \zeta_n} = \sum_{j=1}^n \frac{\overline{z - \zeta_j}}{(z - \zeta_j)(\overline{z - \zeta_j})} = \sum_{j=1}^n \frac{\overline{z - \zeta_j}}{|z - \zeta_j|^2}.$$

- b) Eine Nullstelle ζ von p' kann auch Nullstelle von p sein, muß es aber nicht. Deshalb unterscheidet man am besten 2 Fälle:

1. ζ ist Nullstelle von p , d.h. $\exists j : \zeta = \zeta_j$.

Dann setze man ganz einfach $\lambda_j := 1$, $\lambda_\nu := 0$, für $\nu \neq j$.

2. $p(\zeta) \neq 0$

Da $p'(\zeta) = 0$ sein soll, folgt aus a):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p'(\zeta)}{p(\zeta)} = \overline{\left(\frac{p'(\zeta)}{p(\zeta)}\right)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\zeta - \zeta_\nu}{|\zeta - \zeta_\nu|^2} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\zeta}{|\zeta - \zeta_\nu|^2} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\zeta_\nu}{|\zeta - \zeta_\nu|^2} \\ &= k \cdot \zeta - \sum_{\nu=1}^n k_\nu \cdot \zeta_\nu \quad \text{mit} \quad k := \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{|\zeta - \zeta_\nu|^2} > 0, \quad k_\nu := \frac{1}{|\zeta - \zeta_\nu|^2} > 0 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\zeta = \sum_{\nu=1}^n \underbrace{\frac{k_\nu}{k}}_{=: \lambda_\nu > 0} \cdot \zeta_\nu,$$

und offensichtlich ist $\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu = 1$.

Lösung zu (2) :

$$1) \quad \text{Es ist } f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(z).$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist offensichtlich $R = \infty$.

$$2) \quad \text{Es ist } f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

Man kann das folgende (aus dem Quotientenkriterium herzuleitende) Kriterium benutzen:

Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ ist, und wenn dann $R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ existiert, dann ist R der Konvergenzradius der Reihe.

Hier gilt:

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist also $R = 0$.

$$3) \quad \text{Es ist } f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n} (z-2)^n.$$

Man kann das gleiche Kriterium anwenden:

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^n (n+1)}{2^n}}{\frac{(-1)^{n+1} (n+2)}{2^{n+1}}} \right| = 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $R = 2$.

$$4) \quad \text{Nun sei } f_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{c^n}, \quad c \neq 0.$$

Die Reihe hat die Gestalt

$$f_4(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu, \quad \text{mit } b_\nu = \begin{cases} \frac{1}{c^n} & \text{für } \nu = 2n \\ 0 & \text{für } \nu = 2n+1 \end{cases},$$

Hier erscheint es ratsam, die Formel von Cauchy-Hadamard zu verwenden. Es gilt:

$$\sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[2n]{|c^n|}} = \frac{1}{\sqrt{|c|}} & \text{für } \nu = 2n \\ 0 & \text{für } \nu = 2n + 1 \end{cases}$$

Der Konvergenzradius ist dann $R = \frac{1}{\liminf \sqrt[\nu]{|b_\nu|}} = \sqrt{|c|}$.

Lösung zu (3) :

Hier ist es ratsam, mit Skizzen zu arbeiten. Der Trick bei der Aufgabe besteht darin, die Ausgangsfunktion in mehrere einfache Funktionen zu zerlegen, die dann problemlos behandelt werden können.

$$\text{Sei } f(z) := \sqrt{z}, \quad g(z) := z + 1 \quad \text{und} \quad h(z) := z^2.$$

Dann ist $F(z) := (f \circ g \circ h)(z) = \sqrt{z^2 + 1}$.

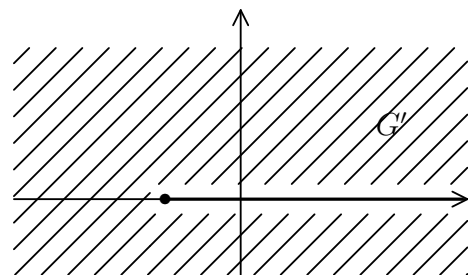
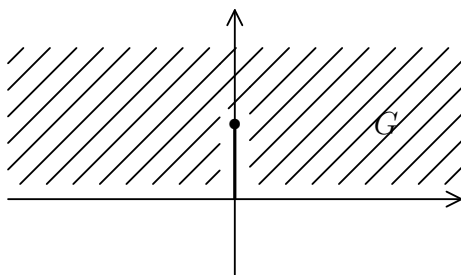
1. Die Funktion $h(z) = z^2$ ist auf ganz \mathbb{C} holomorph und bildet die Menge

$$G := \{z = x + iy : (x \neq 0 \text{ und } y > 0) \text{ oder } y > 1\}$$

bijektiv auf die Menge

$$G' := \mathbb{C} \setminus R \quad \text{mit } R := \{z : -1 \leq \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

ab. Das Verhalten von h ist besonders schön in Polarkoordinaten zu beobachten: $z = re^{it} \mapsto z^2 = r^2 e^{2it}$ quadriert den Radius und verdoppelt den Winkel.



Liegt z in der oberen Halbebene, so liegt z^2 offensichtlich in der längs \mathbb{R}_+ aufgeschlitzten Ebene. Ist $z = re^{it}$, so kann z^2 nur dann auf der negativen reellen Achse liegen, wenn $2t = \pi$, also $t = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann muß (wegen $z \in G$) aber $r > 1$ sein, und damit auch $r^2 > 1$. Also ist $h(G) \subset G'$.

Jeder Punkt $w \in G'$ ist aber auch Bild eines Punktes von G : Wir können w in der Form $w = re^{it}$ schreiben, mit $0 < t < 2\pi$, und der Zusatzbedingung, daß $r > 1$ im Falle $t = \pi$ ist. Dann ist $z = \sqrt{r} e^{i\frac{t}{2}}$ ein Urbild von w , mit $0 < \frac{t}{2} < \pi$, und im Falle $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}$ ist $\sqrt{r} > 1$. Also liegt z in G .

Schließlich ist h auf G auch injektiv: Aus $z^2 = w^2$ folgt, $z = -w$ oder $z = w$. Die beiden Punkte $-w$ und w können aber nicht gleichzeitig in G liegen.

2. $g(z) = z + 1$ ist holomorph und bildet G' bijektiv auf

$$G'' := \mathbb{C} \setminus \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

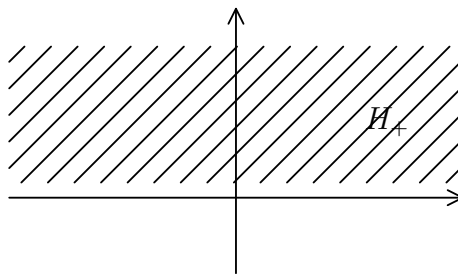
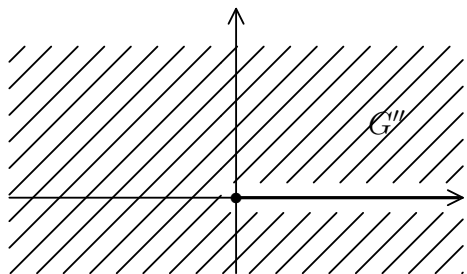
ab. Das ist offensichtlich!

3. Zur Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ muß erst einmal gesagt werden, wie sie zu verstehen ist. Potenzfunktionen werden mit Hilfe des Logarithmus erklärt. Da die Argumente von f in G'' liegen, kann man den Zweig $\log_{(0)}$ verwenden, mit

$$\log_{(0)}(re^{it}) := \ln r + it, \text{ falls } 0 < t < 2\pi \text{ ist.}$$

Dann ist $f(z) = \sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2} \log_{(0)}(z))$ auf G'' holomorph und bildet G'' offensichtlich bijektiv auf die obere Halbebene $H_+ := \{z : \text{Im}(z) > 0\}$ ab, denn:

- (a) $\log_{(0)} : G'' \rightarrow \{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$ ist bijektiv,
- (b) $z \mapsto \frac{1}{2}z$ bildet $\{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$ auf $\{z = x + iy : 0 < y < \pi\}$ bijektiv ab, und
- (c) \exp bildet den Streifen $\{z = x + iy : 0 < y < \pi\}$ bijektiv auf die obere Halbebene ab.



Also ist $F(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ holomorph und bildet G bijektiv auf H_+ ab. Die Umkehrabbildung einer bijektiven holomorphen Abbildung ist aber automatisch wieder holomorph.

Lösung zu (4) :

a) Damit $g(x + iy) = x^2 - 3x - y^2$ Realteil einer holomorphen Funktion sein kann, muß g harmonisch sein.

Tatsächlich gilt:

$$g_{xx} = 2 \text{ und } g_{yy} = -2, \quad \text{also } \Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0.$$

Man weiß dann schon, daß es eine holomorphe Funktion f mit $\text{Re}(f) = g$ gibt. Sei $f = g + ih$. Die Cauchy-Riemannschen DGLn liefern:

$$\begin{aligned} g_x = h_y &\implies h_y = 2x - 3 \\ g_y = -h_x &\implies h_x = 2y \end{aligned}$$

Integration von h_y liefert:

$$h(x + iy) = 2xy - 3y + c(x), \text{ mit } c'(x) = 0, \text{ also } c \text{ konstant.}$$

Wir haben die Freiheit, $c = 0$ zu setzen, und definieren $f(x + iy) = x^2 - 3x - y^2 + i(2xy - 3y) = (x + iy)^2 - 3(x + iy)$, d.h. $f(z) = z^2 - 3z$. Diese Funktion ist holomorph und hat den gewünschten Realteil.

- b) Sei $g(x + iy) = 5e^{3x} \cos(3y)$. Es gilt:
 $g_{xx} = 45e^{3x} \cos(3y)$, $g_{yy} = -45e^{3x} \cos(3y)$, also $g_{xx} + g_{yy} = 0$. Damit ist die Existenz einer holomorphen Funktion f mit $\operatorname{Re} f = g$ gesichert.

Wir setzen wieder f in der Form $f = g + ih$ an. Die Cauchy-Riemannschen DGLn liefern:

$$\begin{aligned} g_x = h_y &\implies h_y = 15e^{3x} \cos(3y) \\ g_y = -h_x &\implies h_x = 15e^{3x} \sin(3y) \end{aligned}$$

Integration von h_x ergibt $h(x + iy) = 5e^{3x} \sin(3y) + c(x)$,
 und wir setzen $f(x + iy) = 5e^{3x} \cos(3y) + i5e^{3x} \sin(3y) = 5e^{3(x+iy)}$.
 $f(z) = 5e^{3z}$ ist tatsächlich eine Lösung.

Lösung zu (5) :

Hier liegt einmal eine Aufgabe vor, bei der nichts zu rechnen ist. Erfahrungsgemäß werden solche Aufgaben ungern gewählt, obwohl sie eigentlich besonders leicht und vor allem kurz sind.

Wichtig ist: Den Text genau durchlesen und beim Bearbeiten immer wieder überprüfen, ob schon alle Voraussetzungen ausgenutzt wurden.

- a) Nach Voraussetzung $\exists z_0 \in G$, so daß $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$ ist. Da f keine Nullstellen hat, ist auch $\frac{1}{f}$ holomorph auf G , und es ist

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{|f(z_0)|} \text{ für alle } z \in G.$$

Also nimmt $\frac{1}{|f|}$ in z_0 ein lokales Maximum an. Nach dem aus der Vorlesung bekannten Maximumprinzip ist dann $\frac{1}{|f|} \equiv c$, also $f \equiv \frac{1}{c}$.

- b) Ist G beschränkt und f auf \overline{G} stetig, so gilt das erweiterte Maximumprinzip, f nimmt sein Maximum auf ∂G an, d.h. $|f(z)| \leq c$ für alle $z \in G$.

Es soll gezeigt werden, daß f konstant ist oder in G eine Nullstelle besitzt. Das übliche Vorgehen bei einer solchen Alternative sieht wie folgt aus: entweder gilt die eine der beiden Aussagen, dann ist man fertig, oder sie gilt nicht, dann muß die andere daraus folgen.

Wir nehmen an, f habe keine Nullstellen. Dann muß $\frac{1}{f}$ sein Maximum auf ∂G annehmen. Also ist $|f(z)| \geq c$ für alle $z \in G$. Insgesamt gilt also: $|f(z)| = c \forall z \in G$. Hieraus folgt, daß $f \equiv \text{konst}$ auf ganz G ist.

Wer unsicher ist, kann auch die letzte Aussage beweisen: Ist $f\bar{f} \equiv c^2$ eine Konstante, also $\bar{f} = \frac{c^2}{f}$ holomorph. Das geht aber nur, wenn f konstant ist.

Lösung zu (6) :

- a) Da der Integrand nicht holomorph ist, muß man die Wege explizit parametrisieren:
Seien $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(t) := t$ und $\psi(t) := e^{it}$.
Dann gilt: $\partial G = \varphi + \psi$. Das Integral berechnet sich also wie folgt:

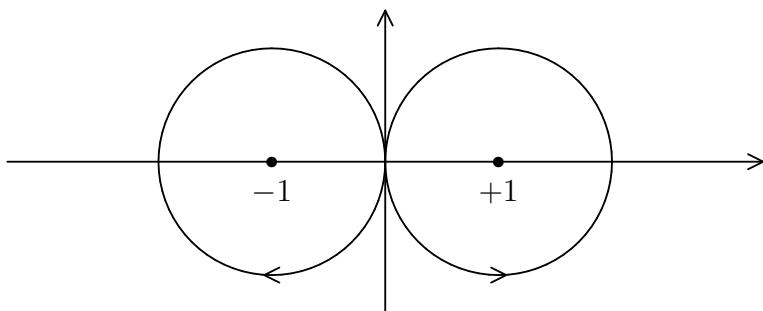
$$\begin{aligned} \int_{\partial G} |z| \bar{z} dz &= \int_{-1}^1 |\varphi(t)| \cdot \overline{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) dt + \int_0^\pi |\psi(t)| \cdot \overline{\psi(t)} \cdot \psi'(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 |t| t dt + \int_0^\pi e^{-it} \mathbf{i} e^{it} dt \\ &= \int_{-1}^0 (-t^2) dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^\pi \mathbf{i} dt \\ &= -\left(-\frac{(-1)^3}{3}\right) + \frac{1}{3} + \mathbf{i}\pi = \mathbf{i}\pi. \end{aligned}$$

- b) Sei $f(z) := \frac{6z^2}{z^2 + 10}$. f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}\sqrt{10}, -\mathbf{i}\sqrt{10}\}$, also auch auf einer sternförmigen Umgebung von $\overline{D_3(0)}$.

Also ist $\int_{\partial D_3(0)} f(z) dz = 0$.

- c) Sei $f(z) := \cos((1 + \mathbf{i})z)$. Offensichtlich ist $F(z) = \frac{1}{1 + \mathbf{i}} \sin((1 + \mathbf{i})z)$ eine Stammfunktion von f . Also gilt für das Integral:

$$\int_{\alpha} \cos((1 + \mathbf{i})z) dz = F(2\mathbf{i}) - F(1 + \mathbf{i}) = \frac{1}{1 + \mathbf{i}} (\sin(-2 + 2\mathbf{i}) - \sin(2\mathbf{i})).$$

Lösung zu (7) :

Die Spur von α ist eine geschlossene Acht. Der rechte Kreis wird gegen den Uhrzeigersinn (also im mathematisch positiven Sinne) durchlaufen, der linke Kreis umgekehrt.

- a) Es ist

$$\frac{z^2 + z - 3}{z^3 - z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}} \right).$$

Die erste Zerlegung findet man durch Raten und Probieren, die zweite durch eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{1}{z^2 - 2} = \frac{A}{z - \sqrt{2}} + \frac{B}{z + \sqrt{2}}.$$

Jetzt sieht man, daß man das erste Integral allein mit Hilfe von Umlaufszahlen berechnen kann:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{z^2 + z - 3}{z^3 - z^2 - 2z + 2} dz &= 2\pi i \left[n(\alpha, 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(n(\alpha, \sqrt{2}) - n(\alpha, -\sqrt{2}) \right) \right] \\ &= 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

b) Die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ hat bei $z = 0$ eine hebbare Singularität, mit 1 als zu ergänzendem Wert. Also ist

$$h(z) := \begin{cases} \frac{z}{\sin z} & \text{für } z \neq 0, \\ 1 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

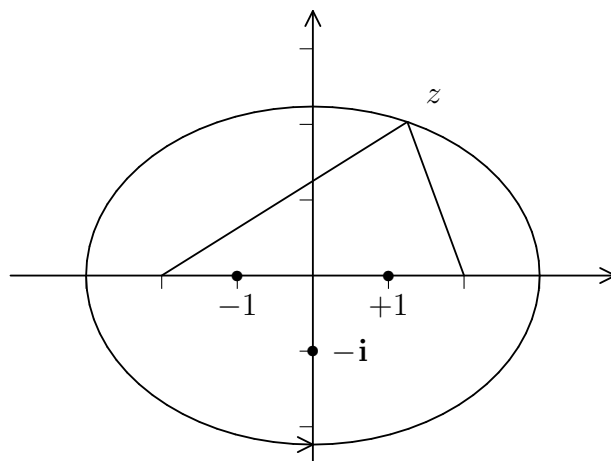
auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet holomorph, das den kompletten Weg α enthält, und es ist daher

$$\int_{\alpha} \frac{z}{\sin z} dz = \int_{\alpha} h(z) dz = 0.$$

Lösung zu (8) :

Die Gleichung $|z + 2| + |z - 2| = 6$ bedeutet, daß die Summe der Abstände, die z von den Punkten -2 bzw. $+2$ hat, stets $= 6$ ist. Die Kurve, über die integriert werden soll, ist also eine Ellipse mit den Brennpunkten -2 und $+2$. Sind a und b die beiden Halbachsen, so muß gelten:

$$(2 + a) + (a - 2) = 6 \text{ und } 2 \cdot \sqrt{4 + b^2} = 6, \quad \text{also } a = 3 \text{ und } b = \sqrt{5} \approx 2.25.$$



Es bieten sich hier zwei Lösungsmethoden an:

1. Partialbruchzerlegung und Cauchysche Integralformel.

Es ist

$$\frac{-2\mathbf{i}z}{(z^2-1)(z+\mathbf{i})^2} = \frac{1}{(z+\mathbf{i})^2} + \frac{-1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+\mathbf{i})^2} + \frac{1/2}{z+\mathbf{i}} - \frac{1/2}{z-\mathbf{i}}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z^5}{(z^2-1)(z+\mathbf{i})^2} &= \frac{z^4}{-2\mathbf{i}} \left(\frac{1}{(z+\mathbf{i})^2} + \frac{1/2}{z+\mathbf{i}} - \frac{1/2}{z-\mathbf{i}} \right) \\ &= \frac{z^4 \cdot \mathbf{i}/2}{(z+\mathbf{i})^2} + \frac{z^4 \cdot \mathbf{i}/4}{z+1} - \frac{z^4 \cdot \mathbf{i}/4}{z+1}. \end{aligned}$$

Sei nun $f_1(z) := z^4 \cdot \mathbf{i}/2$ und $f_2(z) := z^4 \cdot \mathbf{i}/4$, so gilt für das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{z^5}{(z^2-1)(z+\mathbf{i})^2} dz &= 2\pi\mathbf{i} \cdot \left(n(\alpha, -\mathbf{i})f_1'(-\mathbf{i}) + n(\alpha, 1)f_2(-1) - n(\alpha, 1)f_2(1) \right) \\ &= 2\pi\mathbf{i} \left(1 \cdot \frac{4\mathbf{i}}{2}(-\mathbf{i})^3 + 1 \cdot \mathbf{i}/4 - 1 \cdot \mathbf{i}/4 \right) = 2\pi\mathbf{i}(-2) = -4\pi\mathbf{i}. \end{aligned}$$

2. Residuensatz.

Sei $f(z) := \frac{z^5}{(z^2-1)(z+\mathbf{i})^2} = \frac{z^5}{(z-1)(z+1)(z+\mathbf{i})^2}$. Dann sind $z_1 := -1$ und $z_2 := 1$ einfache Polstellen und $z_3 := -\mathbf{i}$ eine doppelte Polstelle. Also gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1}(f) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \frac{-1}{(-2)(-1+\mathbf{i})^2} = -\frac{1}{4\mathbf{i}}, \\ \operatorname{res}_{z_2}(f) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \frac{1}{(2)(1+\mathbf{i})^2} = \frac{1}{4\mathbf{i}} \\ \text{und } \operatorname{res}_{z_3}(f) &= \lim_{z \rightarrow -\mathbf{i}} ((z+\mathbf{i})^2 f(z))' \\ &= \lim_{z \rightarrow -\mathbf{i}} \frac{5z^4(z^2-1) - z^5 \cdot 2z}{(z^2-1)^2} \\ &= \frac{5(-2) - (-\mathbf{i}) \cdot 2(-\mathbf{i})}{(-2)^2} = -2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{res}_{-\mathbf{i}}(f) = -4\pi\mathbf{i}.$$

Lösung zu (9) :

a) Sei $f(z) := \frac{1}{z^2}$. Offensichtlich ist $F(z) = -\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt für das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{1}{z^2} dz &= F(\alpha(\pi)) - F(\alpha(0)) = F(1+\mathbf{i}) - F(5+\mathbf{i}) \\ &= -\frac{1}{1+\mathbf{i}} + \frac{1}{5+\mathbf{i}} \\ &= -\frac{13(1-\mathbf{i})}{26} + \frac{5-\mathbf{i}}{26} = -\frac{4}{13} + \frac{6}{13}\mathbf{i}. \end{aligned}$$

- b) Sei $f(z) = z \cdot \sin(z^2 + 1)$. Dann ist $F(z) = -\frac{1}{2} \cos(z^2 + 1)$ eine Stammfunktion von f . Das Integral berechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\beta} z \cdot \sin(z^2 + 1) dz &= F(\beta(1)) - F(\beta(0)) = F(1 + \mathbf{i}) - F(0) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos(1 + 2\mathbf{i}) - \cos(1) \right). \end{aligned}$$

- c),d) Sei $f(z) = \sin(z)$. Dann ist

$$f'(z) = \cos(z), \quad f''(z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad f'''(z) = -\cos(z).$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_r(0)} \frac{\sin(z)}{z^3} dz &= \frac{2\pi \mathbf{i}}{2!} f''(0) = -\pi \mathbf{i} \sin(0) = 0 \quad \text{und} \\ \int_{\partial D_r(0)} \frac{\sin(z)}{z^4} dz &= \frac{2\pi \mathbf{i}}{3!} f'''(0) = -\frac{\pi}{3} \mathbf{i} \cos(0) = -\frac{\pi}{3} \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Lösung zu (10) :

- a) Sei $f_1(z) := \frac{z - \pi}{\sin z}$. Die isolierten Singularitäten von f_1 sind die Nullstellen der Sinusfunktion. Bekanntlich ist

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt: $(\sin z)' = \cos z$, und für $z = k\pi$ gilt: $\cos(k\pi) = \pm 1 \neq 0$. Dies bedeutet, daß der Sinus Nullstellen 1. Ordnung hat.

Für $k \neq 1$ wird der Zähler nicht 0, während der Nenner dort einfache Nullstellen besitzt. D.h es liegen dort Polstellen 1. Ordnung vor.

Für $k = 1$ sieht es etwas anders aus:

$$\text{Definiere} \quad h(z) := \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi}.$$

Die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ hat in 0 eine hebbare Singularität mit zu ergänzendem Wert 1.

Also hat h in π eine hebbare Singularität mit Wert 1.

Nun gilt:

$$f_1(z) = \frac{z - \pi}{\sin z} = -\frac{z - \pi}{\sin(z - \pi)} = -\frac{1}{h(z)}.$$

Dies bedeutet, daß f in π eine hebbare Singularität mit zu ergänzendem Wert -1 hat.

Bemerkung: Sehr oft wird mit „l'Hospital“ argumentiert. Aber die Regeln von de l'Hospital werden in der Reellen Analysis mit Hilfe des Mittelwertsatzes bewiesen. Das läßt sich nicht unmittelbar ins Komplexe übertragen. Trotzdem gilt eine entsprechende Aussage:

BEHAUPTUNG: f und g seien in der Nähe von z_0 holomorph, mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Dann hat die Funktion $\frac{f}{g}$ in z_0 eine hebbare Singularität, und der zu ergänzende Wert ist $\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

BEWEIS: Es gibt nach Satz II.2.14 in der Nähe von z_0 holomorphe Funktionen f_0 und g_0 , so daß gilt:

$$f(z) = (z - z_0) \cdot f_0(z), \quad g(z) = (z - z_0) \cdot g_0(z) \quad \text{und} \quad g_0(z_0) \neq 0.$$

Offensichtlich ist $f_0(z_0) = f'(z_0)$ und $g_0(z_0) = g'(z_0)$, und für $z \neq z_0$ ist $g(z) \neq 0$, also

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_0(z)}{g_0(z)} \rightarrow \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}, \quad \text{für } z \rightarrow z_0.$$

Dieser Satz wird in den Vorlesungen zur Funktionentheorie oftmals nicht explizit erwähnt. Man sollte ihn daher in der Klausur vor einer ersten Anwendung wenigstens formulieren und nicht einfach von l'Hospital sprechen.

- b) Sei $f_2(z) := \frac{z^2 + \mathbf{i}}{z^4 + 1}$. Die isolierten Singularitäten von f_2 sind die Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\iff z^4 = -1 = e^{\mathbf{i}\pi} \\ &\iff z = z_k := e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}} \cdot \zeta_{4,k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

wobei $\zeta_{4,k} = e^{2\pi\mathbf{i}\frac{k}{4}}$ die 4. Einheitswurzeln bezeichnet. Es sind dies die Zahlen 1, \mathbf{i} , -1 und $-\mathbf{i}$.

Die beiden Quadratwurzeln aus $-\mathbf{i} = e^{\frac{3}{2}\pi\mathbf{i}}$ sind die Zahlen $\pm e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}}$. Also ist

$$\begin{aligned} z^2 + \mathbf{i} &= (z - e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z + e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}}) \\ \text{und } z^4 + 1 &= (z - e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z - e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}\mathbf{i}) \cdot (z + e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z + e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}\mathbf{i}) \\ &= (z - e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z - e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z + e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z + e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$f_2(z) = \frac{z^2 + \mathbf{i}}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z - e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}}) \cdot (z + e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}})}$$

bei $z_1 = e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathbf{i})$ und $z_3 = -e^{\frac{3}{4}\pi\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathbf{i})$ hebbare Singularitäten besitzt. Der zu ergänzende Wert ist in beiden Fällen $\frac{\mathbf{i}}{2}$, wie man sofort durch Einsetzen herausbekommt.

Bei $z_0 = e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathbf{i})$ und $z_2 = -e^{\frac{1}{4}\pi\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathbf{i})$ liegen einfache Polstellen vor.

- c) Sei $f_3(z) := \cos\left(\frac{1}{z}\right)$. Für $z \neq 0$ ist f_3 holomorph. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \rightarrow \infty$, nimmt $\cos(x)$ immer wieder alle Werte zwischen -1 und $+1$ an, also liegt der Verdacht nahe, daß f_3 im Nullpunkt eine wesentliche Singularität hat.

Betrachten wir die Nullfolgen $z_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ und $w_n = \frac{1}{2n\pi}$, so gilt:

$$f_3(z_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0 \quad \text{und} \quad f_3(w_n) = \cos(2n\pi) = 1, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

f_3 ist also in $z = 0$ nicht stetig fortsetzbar, und es gilt auch nicht $\lim_{z \rightarrow 0} f_3(z) = \infty$. Also ist $z = 0$ eine wesentliche Singularität von f_3 .

Daß $z = 0$ eine wesentliche Singularität von f_3 ist, sieht man auch an der Laurententwicklung von f_3 auf einem Kreisring $K_{0,r}(0)$:

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots$$

f_3 hat auf $K_{0,r}(0)$ einen unendlichen Hauptteil.

Lösung zu (11) :

Sei $f(z) = \frac{1}{(z + 2\mathbf{i})^2}$ und $F(z) := \frac{-1}{z + 2\mathbf{i}}$, dann ist $F'(z) = f(z)$. Für $\left|\frac{-2\mathbf{i}}{z}\right| < 1 \iff 2 < |z|$ gilt:

$$F(z) = \frac{-1}{z} \frac{1}{1 - \frac{-2\mathbf{i}}{z}} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2\mathbf{i})^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2\mathbf{i})^n \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Daraus folgt für $z \in K_{2,\infty}(0)$:

$$f(z) = F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2\mathbf{i})^n \frac{(-1)(n+1)}{z^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) (2\mathbf{i})^n \frac{1}{z^{n+2}}.$$

Sei nun $f(z) = (z - \mathbf{i}) \cos\left(\frac{1}{z - \pi}\right)$. Dann gilt für $z \in K_{0,\infty}(\pi)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z - \pi) + \pi + \mathbf{i}) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{1}{z - \pi}\right)^{2k} \right) \\ &= ((z - \pi) + \pi + \mathbf{i}) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (z - \pi)^{-2k} \right) \\ &= (z - \pi) + (\pi + \mathbf{i}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (z - \pi)^{-2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi + \mathbf{i})}{(2k)!} (z - \pi)^{-2k} \\ &= (z - \pi) + (\pi + \mathbf{i}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-n} (z - \pi)^{-n}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$c_{-n} = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{für } n = 2k - 1 \\ \frac{(-1)^k(\pi + \mathbf{i})}{(2k)!} & \text{für } n = 2k. \end{cases}$$

Lösung zu (12) :

Es gilt:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}.$$

Der Mittelpunkt des Kreisringes ist 1, d.h. wir müssen die einzelnen Summanden nach Potenzen von $(z-1)$ entwickeln:

1. $\frac{1}{z+1}$ nach Potenzen von $\frac{1}{z-1}$ entwickeln. Nun soll $|z-1| > 2 \iff \frac{2}{|z-1|} < 1$ sein, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1} \cdot \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n. \end{aligned}$$

2. Nun soll $\frac{1}{z+2}$ nach Potenzen von $(z-1)$ entwickelt werden. Es soll $|z-1| < 3 \iff \frac{|z-1|}{3} < 1$ sein, d.h. es gilt:

$$\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{-3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} (z-1)^n$$

Also gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} (z-1)^n.$$

Lösung zu (13) :

1. Die Laurententwicklung von $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ um $z_0 = 0$ ist:

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + (-1)\frac{1}{z} \pm \dots$$

D.h. es ist $a_{-1} = \text{res}_0(f) = -1$.

2. Sei $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, dann ist $z = 1$ eine einfache und $z = -1$ eine doppelte Polstelle von f . Also gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_1(f) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \\ \operatorname{res}_{-1}(f) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} [(z+1)^2 f(z)]^{(2-1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z}{z-1} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

3. Sei $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2 + 4)}$, dann ist $z = -1$ eine doppelte Polstelle von f . Es gilt also:

$$\operatorname{res}_{-1}(f) = \lim_{z \rightarrow -1} [(z+1)^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z^2 + 8z - 8}{(z^2 + 4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

Lösung zu (14) :

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$ hat die folgenden Polstellen erster Ordnung:

$$z_k = \zeta_{6,k} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}} = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \quad k = 0, \dots, 5.$$

Im einzelnen sind das die Zahlen:

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, & z_1 &= i, & z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\ z_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, & z_4 &= -i, & z_5 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Für $k = 0, \dots, 5$ gilt $z_k^6 = -1$, also gilt für $z \neq z_k$ (Polynomdivision):

$$g_k(z) := \frac{z^6 + 1}{z - z_k} = \sum_{i=0}^5 z_k^i \cdot z^{5-i}.$$

D.h. es ist $g_k(z_k) = 6 \cdot z_k^5$. Damit können wir nun leicht die Residuen von $f(z)$ bestimmen. Da für $k = 0, \dots, 5$ die Punkte z_k einfache Polstellen von f sind, gilt:

$$\operatorname{res}_{z_k}(f) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{g_k(z)} = \frac{1}{6z_k^5}.$$

Nur die ersten drei Polstellen von f liegen in der oberen Halbebene, d.h. wir erhalten:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx &= 2\pi i (\operatorname{res}_{z_0}(f) + \operatorname{res}_{z_1}(f) + \operatorname{res}_{z_2}(f)) = \frac{\pi}{3} i \left(\frac{1}{z_0^5} + \frac{1}{z_1^5} + \frac{1}{z_2^5} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} i \left(e^{-i\frac{5\pi}{6}} + e^{-i\frac{5\pi}{2}} + e^{-i\frac{25\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} i \left(e^{-i\frac{5\pi}{6}} + (-i) + e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} i (-2i) = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Lösung zu (15) :

Sei $R(x, y) := \frac{1}{3 - 2x + y}$, dann ist

$$R(\cos(t), \sin(t)) = \frac{1}{3 - 2\cos(t) + \sin(t)}.$$

Wir setzen

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{2i}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind $z_1 = 2 - i$ und $z_2 = \frac{1}{5}(2 - i)$, d.h. es ist

$$f(z) = \frac{2i}{(1 - 2i)(z - (2 - i))(z - \frac{1}{5}(2 - i))}.$$

Da nur $z_2 \in D_1(0)$ liegt, können wir das Integral folgendermaßen berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(t) + \sin(t)} dt = 2\pi \cdot \operatorname{res}_{z_2}(f).$$

Da z_2 einfache Polstelle von f ist, gilt:

$$\operatorname{res}_{z_2}(f) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{2i}{(1 - 2i)(z - (2 - i))} = \frac{2i}{4i} = \frac{1}{2}.$$

Also ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(t) + \sin(t)} dt = \pi.$$