Kapitel 3 Isolierte Singularitäten

§ 1 Die Laurent-Entwicklung

1.1 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant.*

Ist $f(z_0) = 0$, so gibt es ein $k > 0$, eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, so daß gilt:

1. *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für $z \in U$.*
2. *$g(z_0) \neq 0$*

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt durch

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

BEWEIS: Wählt man für U eine kleine Kreisscheibe um z_0, so hat man auf U eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muß $a_0 = 0$ sein. Wäre $a_n = 0$ für alle n, so wäre $f|_U = 0$ und damit f auf G konstant (Identitätssatz). Da das ausgeschlossen wurde, gibt es ein kleinstes $k \geq 1$, so daß $a_k \neq 0$ ist. Also ist

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad \text{mit } g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m.$$

Mit Hilfe des Lemmas von Abel sieht man sofort, daß die Reihe für $g(z)$ ebenfalls auf U konvergiert. Das ergibt die gewünschte Darstellung, und außerdem ist $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Weiter ist

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0, \ldots, k-1 \\ \neq 0 & \text{für } n = k. \end{cases}$$

Dadurch ist k auch eindeutig festgelegt. ∎

Die Zahl k nennt man die *Ordnung der Nullstelle* von f in z_0.

Ist $g(z) \neq 0$ auf U, so ist $1/g$ auf U holomorph, und

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \frac{1}{g(z)}$$

auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph und in z_0 nicht definiert.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine *isolierte Singularität* von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, daß z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, daß es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der komplexe Logarithmus ist im Nullpunkt nicht definiert, aber er hat dort auch keine isolierte Singularität, denn man muß immer einen von Null nach ∞ führenden Weg aus $\mathbb{C}$ herausnehmen, um log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f, wenn es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf U gibt, so daß $f(z) = \widehat{f}(z)$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.

2. z_0 heißt eine *Polstelle* von f, wenn es ein $k \geq 1$, eine Umgebung $W = W(z_0) \subset U$ und eine auf W holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ gibt, so daß gilt:
$$f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$
Die eindeutig bestimmte Zahl k mit dieser Eigenschaft heißt dann die Polstellenordnung von f in z_0.

3. z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Offensichtlich schließen sich die Hebbarkeit und die Polstelle gegenseitig aus, so daß die isolierten Singularitäten durch die obige Definition tatsächlich klassifiziert werden. Daß die Polstellenordnung eindeutig bestimmt ist, ergibt sich unmittelbar: Multipliziert man die Gleichung $f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z)$ mit $z - z_0$, so erhält man auf der rechten Seite eine Nullstelle in z_0. Dividiert man dagegen durch $z - z_0$, so erhält man eine Funktion, die in z_0 nicht mehr definiert und erst recht nicht holomorph ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auch auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

1.2 Satz. *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f.*

1. *z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt.*

2. *Eine Polstelle liegt genau dann in z_0 vor, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist.*

Beweis: 1) folgt sofort aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz.

2) Ist $f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z)$, mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $V = V(z_0)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(z)| > \varepsilon$ für $z \in V$. Ist $z \neq z_0$, so gilt:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^k} \cdot |g(z)| > \frac{\varepsilon}{|z - z_0|^k} \to +\infty \quad (\text{für } z \to z_0).$$

Setzen wir umgekehrt voraus, daß $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist, so läßt sich $\dfrac{1}{f}$ zu einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) = 0$ fortsetzen. Das bedeutet, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so daß gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \text{ und } \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Daraus folgt:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot g(z),$$

wobei $g(z) := 1/\widetilde{h}(z)$ holomorph und $\neq 0$ nahe z_0 ist. ∎

1.3 Satz von Casorati-Weierstraß. *f hat in z_0 genau dann eine wesentliche (isolierte) Singularität, wenn $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommt.*

Das Kriterium bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$.

Beweis: 1) Ist das Kriterium erfüllt, so ist $|f|$ nicht beschränkt und strebt auch nicht gegen $+\infty$. Also muß die Singularität wesentlich sein.

2) Sei umgekehrt z_0 eine wesentliche Singularität von f. Wir wollen zeigen, daß f in jeder Umgebung von z_0 jedem Wert $w_0 \in \mathbb{C}$ beliebig nahe kommt. Nehmen wir also an, es gibt eine offene Umgebung $V = V(z_0)$, ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt:

$$f(V \setminus \{z_0\}) \cap D_\varepsilon(w_0) = \varnothing.$$

Dann ist $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w_0}$ holomorph auf $V \setminus \{z_0\}$ und beschränkt bei Annäherung an z_0. Es gibt daher eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf V mit $\widehat{g}|_{V \setminus \{z_0\}} = g$

Ist $\widehat{g}(z_0) = 0$, so hat $f(z) = w_0 + \dfrac{1}{g(z)}$ in z_0 eine Polstelle. Ist dagegen $\widehat{g}(z_0) \neq 0$, so ist f nahe z_0 beschränkt, die Singularität also hebbar. Beides kann nicht sein! ∎

Beispiele.

1. Sei $f(z) := \dfrac{z}{\sin z}$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, also $\sin(z) = z \cdot h(z)$, mit einer nahe $z_0 = 0$ holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß $|\dfrac{\sin(z)}{z}| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

   Also ist $|f(z)| = |\dfrac{z}{\sin(z)}| < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Der Wert, der in 0 ergänzt werden muß, ist gegeben durch $\dfrac{1}{h(0)} = 1$.

2. $f(z) := \dfrac{1}{z}$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

3. Sei $f(z) := \exp(\dfrac{1}{z})$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

   Setzen wir $z_n := \frac{1}{n}$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

   Setzen wir dagegen $z_n := -\frac{1}{2\pi n}\mathrm{i}$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathrm{i}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht immer so einfach anwendbar. Wir werden deshalb nach einer besseren Methode suchen.

Ist $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$, mit einer holomorphen Funktion h, so können wir h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Aber dann gilt für $z \neq z_0$ und $|z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1} \cdot (z-z_0) + \cdots$$

Betrachten wir dagegen die wesentliche Singularität $f(z) := \exp(1/z)$, so erhalten wir für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z. Wir werden sehen, daß es immer möglich ist, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition. Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der Entwicklungspunkt.

$$\begin{aligned} H(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots \end{aligned}$$

heißt *Hauptteil der Reihe*,

$$\begin{aligned} N(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

heißt *Nebenteil* der Reihe.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent (absolut konvergent, normal konvergent usw.)*, wenn Hauptteil und Nebenteil es jeweils für sich sind.

1.4 Satz. *Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0, $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der „Konvergenzradius“ des Hauptteils, d.h. der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$\widetilde{H}(w) := H\left(\frac{1}{w} + z_0\right) = a_{-1} w + a_{-2} w^2 + \cdots .$$

1. *Ist $r^* \cdot R \le 1$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

2. *Ist $r^* \cdot R > 1$ und $r := \dfrac{1}{r^*}$, so konvergiert $L(z)$ auf dem Kreisring*

   $$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

   absolut und im Inneren des Kreisringes gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.

Beweis: Die Reihe $\widetilde{H}(w)$ konvergiert nach Voraussetzung für $|w| < r^*$. Dann konvergiert $H(z) = \widetilde{H}(\dfrac{1}{z-z_0})$ für $|z - z_0| > \dfrac{1}{r^*} = r$.

Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so ist $R \leq r$, und die Reihe kann nirgends konvergieren. Ist $r^* \cdot R > 1$, so konvergieren Haupt- und Nebenteil beide für $r < |z - z_0| < R$. ∎

Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Läßt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

Wir wollen nun sehen, daß sich umgekehrt jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln läßt. Das dafür entscheidende Resultat benutzt noch gar keine Reihen:

1.5 Satz von der „Laurent-Trennung".

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$$

mit

1. *$f^+ + f^- = f$ auf $K_{r,R}(z_0)$.*
2. *$|f^-(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$.*

Beweis: Wir beginnen mit der einfacher zu beweisenden Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Darstellungen der gewünschten Art:

$$f = f_1^+ + f_1^- = f_2^+ + f_2^-.$$

Dann definieren wir eine neue Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} f_1^+(z) - f_2^+(z) & \text{für } z \in D_R(z_0), \\ f_2^-(z) - f_1^-(z) & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}. \end{cases}$$

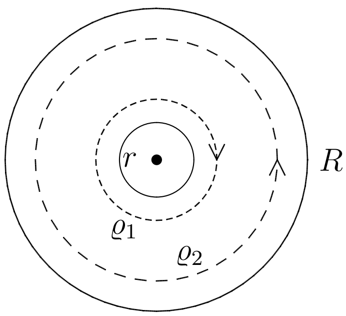
Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und für $z \to \infty$ strebt sie gegen 0. Also handelt es sich um eine beschränkte ganze Funktion, die natürlich konstant sein muß (Liouville). Es ist nur $h(z) \equiv 0$ möglich.

Nun kommen wir zur Existenz von f^+ und f^-.

Für ϱ mit $r < \varrho < R$ und $|z - z_0| \neq \varrho$ setzen wir

$$F_\varrho(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nach dem Entwicklungs-Lemma ist F_ϱ in $\mathbb{C} \setminus \partial D_\varrho(z_0)$ holomorph. Ist außerdem $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$, so ist $\Gamma := \partial D_{\varrho_2}(z_0) - \partial D_{\varrho_1}(z_0)$ ein nullhomologer Zyklus in $K_{r,R}(z_0)$. Für $z \in K_{r,R}(z_0) \setminus |\Gamma|$ folgt aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz:



$$\begin{aligned} F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= n(\Gamma, z) \cdot f(z) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } r < |z - z_0| < \varrho_1, \\ f(z) & \text{für } \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2, \\ 0 & \text{für } \varrho_2 < |z - z_0| < R. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist $|z - z_0| < R$, so gibt es ein ϱ mit $|z - z_0| < \varrho < R$, und wir setzen

$$f^+(z) := F_\varrho(z).$$

Die oben angestellten Überlegungen zeigen, daß es dabei nicht darauf ankommt, welches ϱ wir nehmen.

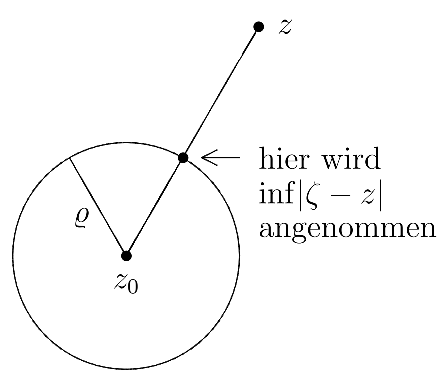
Entsprechend definiert man $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$ durch $f^-(z) := -F_\varrho(z)$, wobei ϱ die Bedingung $r < \varrho < \min(R, |z - z_0|)$ erfüllen muß. Holomorphie und Unabhängigkeit von ϱ folgen wie bei f^+.

Ist nun $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$, so ergibt sich:

$$f(z) = F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

Nun müssen wir nur noch $|f^-(z)|$ für $|z| \to \infty$ abschätzen: Wir halten ϱ mit $r < \varrho < R$ fest und betrachten ein z mit $|z - z_0| > \varrho$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f^-(z)| &= |F_\varrho(z)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \Big|\int_{\partial D_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\Big| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \sup_{\partial D_\varrho} \Big|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\Big| \\ &\le \varrho \cdot \frac{1}{\inf_{\partial D_\varrho} |\zeta - z|} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |f(\zeta)| \\ &= \varrho \cdot \frac{1}{|z - z_0| - \varrho} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |f(\zeta)|, \end{aligned}$$



und dieser Ausdruck strebt gegen Null, für $|z| \to \infty$. ∎

1.6 Folgerung. *Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann läßt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe entwickeln:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f.

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

BEWEIS: Wir führen die Laurentzerlegung durch:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z),$$

wobei f^+ holomorph auf $D_R(z_0)$ ist, und f^- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$. Dann kann man f^+ in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \quad r < \varrho < R.$$

Der Hauptteil muß etwas anders behandelt werden:

Die Abbildung $\varphi(w) := z_0 + 1/w$ bildet $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$ ab. Also ist $g(w) := f^-(z_0 + \dfrac{1}{w})$ holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, und

$$\lim_{w \to 0} g(w) = \lim_{z \to \infty} f^-(z) = 0.$$

Deshalb können wir auf g den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Es gibt eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf $D_{1/r}(0)$, die außerhalb 0 mit g übereinstimmt. Nun entwickeln wir $\widehat{g}$ in eine Taylorreihe:

$$\widehat{g}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \qquad \text{für } |w| < \frac{1}{r}.$$

Da $\widehat{g}(0) = 0$ ist, ist $b_0 = 0$. Also gilt für $|z - z_0| > r$:

$$f^-(z) = g(\frac{1}{z - z_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

mit $a_{-n} := b_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Insgesamt ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in K_{r,R}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert im Innern des Ringgebietes absolut und gleichmäßig. Sie kann also für $r < \varrho < R$ über $\partial D_\varrho(z_0)$ gliedweise integriert werden. Das gleiche gilt dann für

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N-1}.$$

Benutzt man noch, daß

$$\int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i} & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist, so erhält man:

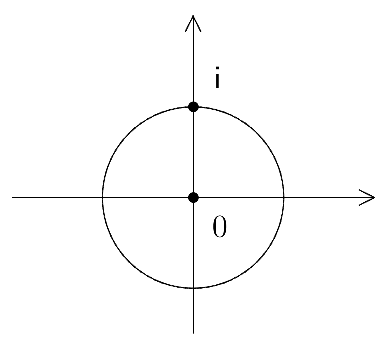
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} \, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^{n-N-1} \, dz = a_N.$$

∎

Beispiel.

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z - \mathrm{i})^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathrm{i}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\dfrac{1}{z - z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z - a| < |z_0 - a|$ ist

$$|\frac{z-a}{z_0-a}| < 1,$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a-(z_0-a)} \\
&= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{z_0-a}} \\
&= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n.
\end{aligned}$$

Ist $|z-a| > |z_0-a|$, so geht man analog vor:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_0-a}{z-a}} \\
&= \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n.
\end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^{(m-1)}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\dfrac{1}{z-z_0}$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)' = -\mathrm{i}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{\mathrm{i}^n}z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{\mathrm{i}^{n+1}}z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist

$$\frac{1}{z-\mathsf{i}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathsf{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{i}^{n-1}\frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathsf{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathsf{i}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{i}^{n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{i}^{n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{i}^{n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty}\mathsf{i}^{n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3}\mathsf{i}^{-n-1}(n+2)z^n,$$

wegen $\mathsf{i}^{-n-3}(-n-2) = \mathsf{i}^{-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathsf{i})$:

Hier soll nach Potenzen von $(z-\mathsf{i})$ entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathsf{i}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathsf{i}}{-\mathsf{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathsf{i}^{n+1})(z-\mathsf{i})^n,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-\mathsf{i})^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathsf{i}^{n+1})(z-\mathsf{i})^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty}(-\mathsf{i}^{n+3})(z-\mathsf{i})^n \\ &= \frac{-\mathsf{i}}{(z-\mathsf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathsf{i}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathsf{i})^{n+1}(z-\mathsf{i})^n. \end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathsf{i})$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

1.7 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \textit{ hebbar} &\iff a_n = 0 \textit{ für } \textbf{\textit{alle}}\ n < 0, \\ z_0 \textit{ Polstelle} &\iff \exists\, n < 0 \textit{ mit } a_n \neq 0 \textit{ und } a_k = 0 \textit{ für } k < n, \\ z_0 \textit{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \textit{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\,\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das läßt nur die Möglichkeit, daß $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. ∎

Beispiele.

1. Die Funktion
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \ldots$$
besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist
$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2. Die Funktion
$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathrm{i})^2}$$
hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in i. Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

3. Die Funktion
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$
hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4. Die Funktion
$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$
ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$. Aber dann ist auch $\dfrac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:
$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$
Also ist
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$
Das bedeutet, daß f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und D in B diskret. Eine holomorphe Funktion $f : B \setminus D \to \mathbb{C}$ heißt eine *meromorphe Funktion auf* B, falls f in den Punkten von D höchstens Polstellen besitzt (also keine wesentlichen Singularitäten).

Die Menge $P(f) := \{z \in D \ : \ f \text{ hat in } z \text{ eine Polstelle der Ordnung} \geq 1 \}$ heißt *Polstellenmege von* f.

Die Polstellenmenge kann auch leer sein. Bezeichnen wir die Menge der holomorphen Funktionen auf B mit $\mathcal{O}(B)$ und die Menge der meromorphen Funktionen auf B mit $\mathcal{M}(B)$, so ist $\mathcal{O}(B) \subset \mathcal{M}(B)$.

Sei f eine meromorphe Funktion auf B. Man kann dann wie folgt eine stetige Funktion $\widehat{f} : B \to \overline{\mathbb{C}}$ definieren:

Sei $z_0 \in B$ ein beliebiger Punkt.

1. Ist f in z_0 definiert (und deshalb dort holomorph), so setzt man $\widehat{f}(z_0) := f(z_0)$.

2. Hat f in z_0 eine hebbare Singularität, so setzt man $\widehat{f}(z_0) := \lim_{z \to z_0} f(z)$.

3. Hat f in z_0 eine Polstelle, so setzt man $\widehat{f}(z_0) := \infty$.

Ist umgekehrt eine stetige Funktion $\widehat{f} : B \to \overline{\mathbb{C}}$ gegeben, $D := \widehat{f}^{-1}(\infty)$ diskret in B und $f := \widehat{f}|_{B \setminus D}$ holomorph, so ist f eine meromorphe Funktion auf B.

1.8 Satz. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $D \subset B$ diskret in B und $f : B \setminus D \to \mathbb{C}$ stetig. f ist genau dann meromorph auf B, wenn es zu jedem $z_0 \in B$ eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset B$ und Funktionen $g, h \in \mathcal{O}(U)$ gibt, so daß gilt:*

1. *h verschwindet nirgends identisch.*
2. *$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ für $z \in U \setminus (D \cup N(h))$.*

Beweis: 1) Sei f meromorph auf B, o.B.d.A. sei $P(f) = D$. In den Punkten von $B \setminus D$ ist nichts weiter zu zeigen. Ist aber $z_0 \in D$, so gibt es in der Nähe von z_0 eine Darstellung $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, mit einer holomorphen Funktion g.

2) f sei stetig und erfülle das Kriterium. Sei $z_0 \in B$ beliebig, $U = U(z_0) \subset B$ so gewählt, daß es holomorphe Funktionen g und h auf U mit $f = \dfrac{g}{h}$ auf $U \setminus (D \cup N(h))$ gibt. Dabei soll h nicht identisch verschwinden. Also ist $N(h)$ diskret in U und f auf U holomorph bis auf eine höchstens diskrete Menge von Polstellen. Das funktioniert überall, und die Gesamtheit der Polstellen von f in B ist dort diskret. ∎

1.9 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $\mathcal{O}(G)$ ein Integritätsbereich und $\mathcal{M}(G)$ ein Körper.*

Beweis: 1) $\mathcal{O}(G)$ ist offensichtlich ein Ring, ja sogar eine $\mathbb{C}$-Algebra. Es ist nur die Nullteiler-Freiheit zu zeigen. Ist $f \cdot g = 0$ für zwei Elemente $f, g \in \mathcal{O}(G)$, so ist entweder $f = 0$, oder es gibt eine offene Teilmenge $U \subset G$ mit $g|_U = 0$. Nach dem Identitätssatz ist dann aber sogar $g = 0$.

2) Die Ringstruktur auf $\mathcal{M}(G)$ muß sinnvoll erklärt werden. Fassen wir meromorphe Funktionen f und g als stetige Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{C}}$ auf, so erhält $f + g$ und $f \cdot g$ in einem Punkt z_0 den Wert ∞, sobald dort nur eine der beiden Funktionen unendlich wird. Die Polstellenmenge des Ergebnisses bleibt dabei diskret.

Ist nun $m \in \mathcal{M}(G)$ und $P = P(m)$ die Polstellenmenge von m, so ist auch $G' := G \setminus P$ wieder ein Gebiet und m auf G' holomorph. Die Nullstellenmenge $N = N(m)$ ist diskret in G' und damit auch in G, also ist $D := P \cup N$ diskret in G und $n := \dfrac{1}{m}$ holomorph auf $G \setminus D$. In den Punkten von N hat n Polstellen, in den Punkten von P hebbare Singularitäten (mit 0 als zu ergänzendem Wert). Also ist n meromorph und $n \cdot m = 1$ auf $G \setminus D$. Das bedeutet, daß m in $\mathcal{M}(G)$ ein Inverses besitzt. ∎

Typische Beispiele meromorpher Funktionen sind rationale Funktionen, aber auch Funktionen der Gestalt $1/\sin(z)$.

§ 2 Der Residuensatz

Ausgangspunkt ist folgende Überlegung:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, Γ ein Zyklus in $G' := G \setminus \{z_0\}$ und $f : G' \to \mathbb{C}$ holomorph.

$$\text{Wie berechnet man } \int_\Gamma f(z)\,dz \quad ?$$

Setzen wir $k_0 := n(\Gamma, z_0)$, so ist auch $\widetilde{\Gamma} := \Gamma - k_0 \cdot \partial D_\varepsilon(z_0)$ ein Zyklus in G', für genügend kleines ε. Für $z \in \mathbb{C} \setminus G$ ist $n(\widetilde{\Gamma}, z) = 0$. Und es ist

$$n(\widetilde{\Gamma}, z_0) = n(\Gamma, z_0) - k_0 \cdot n(\partial D_\varepsilon(z_0), z_0) = 0.$$

Also ist $\widetilde{\Gamma}$ nullhomolog in G', und man kann den allgemeinen Cauchyschen Integralsatz anwenden:

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = 0, \text{ also } \int_\Gamma f(z)\,dz = n(\Gamma, z_0) \cdot \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz.$$

Man muß also nur die Umlaufszahl von Γ um z_0 kennen, und das Integral von f über den Rand einer genügend kleinen Kreisumgebung von z_0. Dieses „Restintegral" bezeichnet man (nach Multiplikation mit $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}$) als *Residuum*.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so daß $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta$$

das *Residuum* von f in z_0.

Bemerkungen.

1. Das Residuum hängt nicht von der Wahl des Radius ε ab. Das sieht man sofort mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes.

2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Auch das folgt aus dem Integralsatz.

3. In der Laurententwicklung von f um z_0 ist

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta = \operatorname{res}_{z_0}(f),$$

für ein genügend kleines ε. Das zeigt noch einmal, daß f nicht von dem gewählten Radius abhängt.

4. Es ist
$$\mathrm{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \mathrm{res}_{z_0}(f) + b \cdot \mathrm{res}_{z_0}(g).$$

5. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\mathrm{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn das Integral über eine abgeleitete Funktion und einen geschlossenen Weg verschwindet immer.

6. $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) = 1$ und $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z - z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

7. Allgemeiner gilt: Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist
$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

   Beweis: Wir schreiben
$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad h \text{ holomorph in } z_0.$$

   Dann folgt:
$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) h(z) \to a_{-1} \text{ für } z \to z_0.$$

   ■

8. Und noch allgemeiner kann man zeigen:

   Hat f in z_0 eine m-fache Polstelle, so ist
$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

   Beweis: Es ist
$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots ,$$

   also
$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$$

   Damit ist
$$[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)! a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\ldots),$$

   und es folgt die Behauptung. ■

9. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

   Dann ist $\operatorname{res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{h}\right) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

   Beweis: Wir können schreiben:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & g(z) & = & c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z), \text{ mit } c_0 \neq 0 \\
\text{und} & h(z) & = & (z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z)), \text{ mit } b_1 \neq 0 \text{ und } \widetilde{h}(z_0) = 0.
\end{array}
$$

   Dann ist

$$
\begin{aligned}
\frac{g(z)}{h(z)} &= \frac{c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z)}{(z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z))} \\
&= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z)} + \frac{\widetilde{g}(z)}{b_1 + \widetilde{h}(z)}.
\end{aligned}
$$

   Also hat $f := \dfrac{g}{h}$ in z_0 eine einfache Polstelle, und es ist

$$
\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z_0)} = \frac{c_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.
$$

∎

Beispiele.

1. Sei $f(z) := \dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + 1} = \dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})}$.

   f hat einfache Polstellen bei i und $-\mathrm{i}$. Es ist

$$
\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z + \mathrm{i}} = -\frac{1}{2e}\mathrm{i},
$$

   und analog

$$
\operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} (z + \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z - \mathrm{i}} = \frac{e}{2}\mathrm{i}.
$$

2. $f(z) := \dfrac{z^2}{1 + z^4}$ hat 4 einfache Nullstellen, insbesondere in

$$
z_0 := e^{(\pi/4)\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}).
$$

   Mit $g(z) := z^2$ und $h(z) := 1 + z^4$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_0}(f) &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\\ &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0}\\ &= \frac{1}{4}e^{-(\pi/4)\mathsf{i}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}).\end{aligned}$$

2.1 Der Residuensatz. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $D \subset B$ diskret, Γ ein nullhomologer Zyklus in B mit $|\Gamma| \cap D = \varnothing$ und $f : B \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int\limits_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{z \in B} n(\Gamma, z)\operatorname{res}_z(f).$$

Bemerkung. Außerhalb einer kompakten Menge $K \subset B$ ist $n(\Gamma, z) = 0$. Da $K \cap D$ endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte $z \in B$, in denen das Produkt $n(\Gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z(f)$ nicht verschwindet. Also ist die Summe auf der rechten Seite der Gleichung sinnvoll.

Ist $D = \varnothing$, so erhält man den allgemeinen Cauchyschen Integralsatz.

Ist $D = \{z_0\}$ und f holomorph auf B, so kann man den Residuensatz auf $g(z) := \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ anwenden. Es ist

$$g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \cdot \left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \cdots\right),$$

also $\operatorname{res}_{z_0}(g) = \dfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$. Damit folgt:

$$\frac{k!}{2\pi\mathsf{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = n(\Gamma, z_0) \cdot f^{(k)}(z_0).$$

Das ist die allgemeine Integralformel. Aus dem Residuensatz läßt sich die gesamte Funktionentheorie ableiten.

Beweis: Sei $D = \{z_1, \ldots, z_N\} \cup D'$, $n(\Gamma, z_\mu) \neq 0$ für $\mu = 1, \ldots, N$ und $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \in D'$. Dann ist Γ nullhomolog in $B \setminus D'$.

Sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_μ. Wie aus dem Satz von der Laurent-Trennung hervorgeht, ist h_μ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_\mu\}$. Daher gilt:

$$f - \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu \text{ ist holomorph auf } B \setminus D'.$$

Also folgt:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{N} \int_\Gamma h_\mu(z)\,dz.$$

Nun schreiben wir ausführlich:

$$h_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n}(z-z_\mu)^n.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $|\Gamma|$, kann dort also gliedweise integriert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma h_\mu(z)\,dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n} \int_\Gamma (z-z_\mu)^n\,dz \\ &= a_{\mu,-1}\int_\Gamma \frac{1}{z-z_\mu}\,dz + \sum_{n\geq 2} a_{\mu,-n}\int_\Gamma \frac{1}{(z-z_\mu)^n}\,dz \\ &= a_{\mu,-1}\cdot 2\pi \mathsf{i}\cdot n(\Gamma, z_\mu),\end{aligned}$$

denn für $n \geq 2$ besitzt $\dfrac{1}{(z-z_\mu)^n}$ in der Nähe von $|\Gamma|$ eine Stammfunktion.

Da $a_{\mu,-1} = \text{res}_{z_\mu}(f)$ ist, folgt der Satz. ■

Angewandt wird der Residuensatz oft in einer spezielleren Form:

2.2 Residuenformel. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes Gebiet. Außerdem seien $z_1, \ldots, z_N$ Punkte in G und $f : B \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial G} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \text{res}_{z_k}(f).$$

BEWEIS: Man kann den Residuensatz auf f und $\Gamma := \partial G$ anwenden. Da $n(\partial G, z) = 1$ für jedes $z \in G$ ist, folgt die Behauptung. ■

Beispiele.

1. Es soll $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz$ berechnet werden. Das geht in diesem Falle auch sehr einfach mit der Cauchyschen Integralformel: $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi \mathsf{i}}{3!}\frac{d^3(e^z)}{dz^3}(0) = \frac{\pi \mathsf{i}}{3}.$

   Mit dem Residuensatz macht man es so:

   Die Laurentreihe des Integranden um $z = 0$ hat die Gestalt

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Also ist

$$\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \text{ Koeffizient bei } z^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Daraus folgt:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = 2\pi\mathsf{i} \cdot \operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \frac{\pi\mathsf{i}}{3}.$$

2. Die Funktion

$$f(z) := \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

hat einen doppelten Pol bei $z = -1$ und einfache Pole bei $z = \pm 2\mathsf{i}$.

Es ist

$$[(z+1)^2 \cdot f(z)]' = \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)\cdot 2z}{(z^2+4)^2},$$

also

$$\operatorname{res}_{-1}(f) = \lim_{z\to -1}[(z+1)2 \cdot f(z)]' = \frac{-4\cdot 5 - 3\cdot(-2)}{25} = -\frac{14}{25}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{2\mathsf{i}}(f) \;=\; \lim_{z\to 2\mathsf{i}} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2\mathsf{i})} \quad &= \quad \frac{-4-4\mathsf{i}}{(1+2\mathsf{i})^2 4\mathsf{i}} \\
&= \quad \frac{-(1+\mathsf{i})}{(-3+4\mathsf{i})\mathsf{i}} = \frac{1+\mathsf{i}}{4+3\mathsf{i}} \\
&= \quad \frac{(1+\mathsf{i})(4-3\mathsf{i})}{(4+3\mathsf{i})(4-3\mathsf{i})} = \frac{7+\mathsf{i}}{25}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2\mathsf{i}}(f) \;=\; \lim_{z\to -2\mathsf{i}} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2\mathsf{i})} \quad &= \quad \frac{-4+4\mathsf{i}}{(1-2\mathsf{i})^2(-4\mathsf{i})} \\
\frac{1-\mathsf{i}}{(-3-4\mathsf{i})\mathsf{i}} = \frac{1-\mathsf{i}}{4-3\mathsf{i}} \\
\frac{(1-\mathsf{i})(4+3\mathsf{i})}{(4-3\mathsf{i})(4+3\mathsf{i})} = \frac{7-\mathsf{i}}{25}.
\end{aligned}$$

Von den Polstellen liegen -1 und $-2\mathsf{i}$ in der Kreisscheibe $D_2(-\mathsf{i})$ (es ist $|-1-(-\mathsf{i})| = |-1+\mathsf{i}| = \sqrt{2} < 2$). Der Punkt $2\mathsf{i}$ liegt außerhalb. Daher ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial D_2(-\mathsf{i})} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz &= 2\pi\mathsf{i}\cdot[\mathrm{res}_{-1}(f)+\mathrm{res}_{-2\mathsf{i}}(f)] \\ &= 2\pi\mathsf{i}\cdot\left[-\frac{14}{25}+\frac{7-\mathsf{i}}{25}\right] \\ &= \frac{2\pi\mathsf{i}}{25}\cdot(-7-\mathsf{i}) \;=\; \frac{2\pi}{25}(1-7\mathsf{i}).\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu weiteren Anwendungen des Residuensatzes:

2.3 Das Argument-Prinzip. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und Γ ein nullhomologer Zyklus in B.*

Weiter sei f auf B meromorph und nicht konstant, N die Menge der Nullstellen und P die Menge der Polstellen von f. Es sei $|\Gamma| \cap (N \cup P) = \varnothing$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int\limits_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{a\in N} n(\Gamma,a)o(f,a) - \sum_{b\in P} n(\Gamma,b)o(f,b),$$

wenn man mit $o(f,z)$ die Null- bzw. Polstellenordnung von f in z bezeichnet.

Beweis: $D := N \cup P$ ist eine diskrete Menge in B, und es ist $n(\Gamma,z) \neq 0$ für höchstens endlich viele Elemente von D. Die Funktion $\dfrac{f'}{f}$ ist holomorph auf $B \setminus D$.

Sei $a \in D$. Dann gilt in der Nähe von a :

$$f(z) = (z-a)^k \cdot g(z),$$

mit einer nahe a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen, $|k| \in \mathbb{N}$ und $k = \pm o(f,a)$, je nachdem, ob eine Null- oder Polstelle vorliegt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k\cdot(z-a)^{k-1}\cdot g(z)+(z-a)^k\cdot g'(z)}{(z-a)^k\cdot g(z)} \\ &= \frac{k}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}.\end{aligned}$$

Da $\dfrac{g'}{g}$ nahe a holomorph ist, ist $\mathrm{res}_a(\dfrac{f'}{f}) = k = \pm o(f,a)$. Mit dem Residuensatz ergibt sich die gewünschte Formel. ∎

2.4 Folgerung. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes Gebiet, f meromorph auf B und ohne Null- und Polstellen auf ∂G. Ist n die Anzahl der Nullstellen und p die Anzahl der Polstellen von f in G (jeweils mit Vielfachheit gezählt), so gilt:*

$$\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int\limits_{\partial G} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = n - p.$$

Warum spricht man vom Argument-Prinzip? Dazu betrachten wir einen einfach geschlossenen Weg

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$$

und eine meromorphe Funktion f, die auf der Spur von α weder Nullstellen noch Polstellen hat. Dann ist $f \circ \alpha$ ein Weg, der den Nullpunkt nicht trifft, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_a^b \frac{f'(\alpha(t))\alpha'(t)}{f(\alpha(t))}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_a^b \frac{(f \circ \alpha)'(t)}{f \circ \alpha(t)}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{f\circ\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= n(f \circ \alpha, 0) = \frac{1}{2\pi} \Delta(\arg, f \circ \alpha).
\end{aligned}$$

Liegen im Innern von α n Nullstellen und p Polstellen, so ändert sich beim Durchlaufen von α das Argument von $f \circ \alpha$ um $2\pi(n - p)$.

Im folgenden behandeln wir Anwendungen des Residuensatzes. Wir beginnen mit zwei Anwendungen in der Theorie.

2.5 Satz von Rouché. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : B \to \mathbb{C}$ holomorph und $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes Gebiet.*

Ist $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ auf ∂G, so haben f und g gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit) in G.

BEWEIS: Für $0 \le \lambda \le 1$ sei $h_\lambda(z) := f(z) + \lambda \cdot (g(z) - f(z))$. Dann ist h_λ auf B holomorph, und für $z \in \partial G$ gilt:

$$|h_\lambda(z)| \ge |f(z)| - \lambda \cdot |g(z) - f(z)| > (1 - \lambda) \cdot |g(z) - f(z)| \ge 0.$$

Also hat h_λ auf ∂G keine Nullstellen.

Nun sei N_λ die Anzahl der Nullstellen von h_λ in G. Der Wert des Integrals

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial G} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\, dz$$

hängt stetig von λ ab, liegt aber in $\mathbb{Z}$. Also ist $N_0 = N_1$. ∎

Beispiel.

Wieviele Nullstellen hat das Polynom $f(z) := z^4 - 4z + 2$ im Innern des Einheitskreises $\mathbb{D} = D_1(0)$?

Wir setzen $g(z) := -4z + 2$. Dann ist $|f(z) - g(z)| = |z|^4 = 1$ auf $\partial\mathbb{D}$, und $|g(z)| = |4z - 2| \ge 4|z| - 2 = 2$ auf $\partial\mathbb{D}$. Nach dem Satz von Rouché müssen nun f und g in $\mathbb{D}$ gleichviele Nullstellen besitzen. Aber g hat dort genau eine Nullstelle (nämlich $z = 1/2$).

2.6 Satz von Hurwitz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G, die kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion f auf G konvergiert.*

Haben die Funktionen f_n alle auf G keine Nullstellen, so ist entweder $f(z) \equiv 0$, oder f hat auf G auch keine Nullstellen.

Beweis: Es sei $f(z) \not\equiv 0$. Dann ist $D := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ leer oder diskret in G. Ist $z_0 \in G$, so gibt es auf jeden Fall ein $r > 0$, so daß $D_r(z_0)$ relativ kompakt in G liegt und f auf $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ keine Nullstelle besitzt.

Dann sind die Funktionen $1/f$ und $1/f_n$ auf $\partial D_r(z_0)$ definiert und stetig, und $(1/f_n)$ konvergiert dort gleichmäßig gegen $1/f$. Aber auch (f_n') konvergiert dort gleichmäßig gegen f'. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta.$$

Da die linke Seite verschwindet, kann f in z_0 keine Nullstelle haben. ∎

2.7 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G, die kompakt gegen eine holomorphe Grenzfunktion f auf G konvergiert.*

Sind alle Funktionen f_n injektiv, so ist f konstant oder auch injektiv.

Beweis: f sei nicht konstant. Für jedes $z_0 \in G$ ist $f_n - f_n(z_0)$ ohne Nullstellen auf dem Gebiet $G' := G \setminus \{z_0\}$. Nach Hurwitz hat dann auch $f - f(z_0)$ keine Nullstellen auf G'.

Also ist $f(z_0) \ne f(w_0)$ für $z_0 \ne w_0$. Da z_0 beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung. ∎

§ 3 Integralberechnungen

Der Residuensatz erlaubt es, gewisse analytisch schwer zu behandelnde reelle Integrale auf algebraischem Wege zu berechnen.

1. Trigonometrische Integrale:

Sei $R(x,y)$ eine komplexwertige rationale Funktion. Wir wollen den Residuensatz anwenden, um Integrale vom Typ

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck suchen wir eine holomorphe oder meromorphe Funktion f, so daß wir das fragliche Integral als komplexes Kurvenintegral auffassen können:

$$I = \int_\gamma f(z)\,dz, \qquad \text{mit } \gamma(t) := e^{\mathsf{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathsf{i}\sin t$ und $\dfrac{1}{z} = \overline{z} = \cos t - \mathsf{i}\sin t$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \\ \text{und} \qquad \sin t &= \frac{1}{2\mathsf{i}}\Big(z - \frac{1}{z}\Big). \end{aligned}$$

Da $\gamma'(t) = \mathsf{i}\gamma(t)$ ist, folgt:

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathsf{i}\gamma(t)} \cdot R\left(\frac{1}{2}\Big(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\Big), \frac{1}{2\mathsf{i}}\Big(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\Big)\right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also

$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2\mathsf{i}}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt &= \frac{1}{\mathsf{i}} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\mathsf{i}} \int_\gamma f(z)\,dz \\ &= 2\pi \cdot \sum_{z \in D_1(0)} \operatorname{res}_z(f). \end{aligned}$$

Beispiel.

Sei $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $\quad a > 1$ reell. Hier ist

$$R(x,y) = \frac{1}{a+y},$$

also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z})} = \frac{2\mathrm{i}}{2a\mathrm{i}z + z^2 - 1} = \frac{2\mathrm{i}}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit $z_{1,2} = \mathrm{i}(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$.

f hat zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Da $a > 1$ ist, ist

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1, \text{ also } a - 1 < \sqrt{a^2 - 1} < a + 1.$$

Also ist

$$-1 < -a + \sqrt{a^2 - 1} < 1, \quad \text{d.h. } z_1 = \mathrm{i}(-a + \sqrt{a^2 - 1}) \in D_1(0).$$

Andererseits ist $|-a - \sqrt{a^2 - 1}| = |a + \sqrt{a^2 - 1}| \geq |a| > 1$, also $z_2 \notin D_1(0)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} &= 2\pi \cdot \operatorname{res}_{z_1}(f) \\ &= 2\pi \cdot \lim_{z \to z_1} \frac{2\mathrm{i}}{z - z_2} \\ &= \frac{4\pi\mathrm{i}}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{4\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

2. Uneigentliche rationale Integrale:

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

betrachten, wobei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sei, und $p(x)$ und $q(x)$ Polynome ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

3.1 Satz. *Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten $c, C > 0$ und ein $R > 0$, so daß gilt:*

$$c|z|^n \leq |p(z)| \leq C|z|^n \quad \text{\textit{für} } |z| \geq R.$$

BEWEIS: Sei

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad r(z) := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \cdot |z|^\nu.$$

Mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichungen folgt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_n| \cdot |z|^n - r(z) \le |p(z)| \le |a_n| \cdot |z|^n + r(z).$$

Für $|z| \ge 1$ und $\nu < n$ ist $|z|^\nu \le |z|^{n-1}$, also

$$r(z) \le \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \cdot |z|^{n-1} = k \cdot |z|^{n-1}, \text{ mit } k := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu|.$$

Daraus folgt:

$$|a_n| \cdot |z|^n - k|z|^{n-1} \le |p(z)| \le |a_n| \cdot |z|^n + k|z|^{n-1},$$

also

$$(|a_n| - \frac{k}{|z|})|z|^n \le |p(z)| \le (|a_n| + \frac{k}{|z|})|z|^n.$$

Für $|z| \ge R$ ist dann sogar

$$(|a_n| - \frac{k}{R})|z|^n \le |p(z)| \le (|a_n| + \frac{k}{R})|z|^n.$$

Wählt man außerdem $R > \dfrac{k}{|a_n|}$, so ist $\dfrac{k}{R} < |a_n|$ und daher $|a_n| - \dfrac{k}{R} > 0$.

Man kann also $c := |a_n| - \dfrac{k}{R}$ und $C := |a_n| + \dfrac{k}{R}$ setzen. ■

3.2 Folgerung. *Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) = \deg(p) + k$, $k \ge 0$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $R > 0$, so daß*

$$|\frac{p(z)}{q(z)}| \le C \cdot \frac{1}{|z|^k}$$

für $|z| \ge R$ ist.

Außerdem folgt:

1. *Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}|$ im Unendlichen beschränkt.*
2. *Ist $k \ge 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx.$$

BEWEIS: Ist

$$\begin{aligned} c_1|z|^m &\le |p(z)| \le C_1|z|^m \\ \text{und} \quad c_2|z|^n &\le |q(z)| \le C_2|z|^n \end{aligned}$$

für $|z| \geq R$, so ist

$$|\frac{p(z)}{q(z)}| \leq C \cdot |z|^{m-n},$$

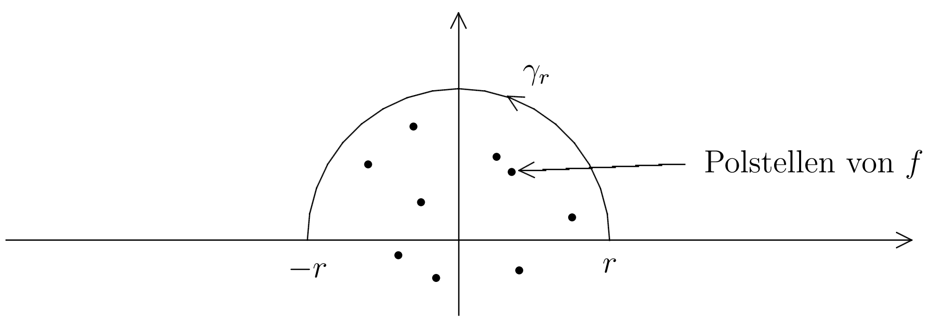
für $|z| \geq R$, und mit $C := \dfrac{C_1}{c_2}$ und $m - n \leq -k$.

Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}| \leq C$.

Ist $k \geq 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus der Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{|x|^k}\,dx$, dem Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale und der Tatsache, daß $q(x)$ keine reellen Nullstelle besitzt. ■

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ erfüllt, mit $k \geq 2$. Insbesondere ist dann $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch höchstens endlich viele sein.

Wir betrachten nun folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man beachte, daß das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine **endliche** Summe!

Da $|f(z)| \leq \dfrac{C}{|z|^2}$ für große z ist, folgt:

$$|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz| \leq \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f)$$

$$(\text{oder} \quad = -2\pi \mathsf{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)<0} \mathrm{res}_z(f) \ ).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall.

Erinnerung:

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt *Cauchyscher Hauptwert* des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, daß der Cauchysche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

Beispiel.

Wir wollen $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathsf{i}\pi/4} = e^{\mathsf{i}\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos(\frac{\pi+2\pi k}{4}) + \mathsf{i}\sin(\frac{\pi+2\pi k}{4}),$$

für $k = 0,1,2,3$. Dabei ist $\mathrm{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da alle 4 Nullstellen von $1+z^4$ verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathsf{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathsf{i}) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathsf{i}e^{\mathsf{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{i}-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Wie wir schon an früherer Stelle gesehen haben, ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}) \\ \text{und} \quad \mathrm{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathsf{i}), \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\mathsf{i}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathsf{i})\right) \\ &= \frac{\pi\mathsf{i}}{2\sqrt{2}}(-2\mathsf{i}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Die Fourier-Rücktransformation:

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige und absolut integrierbare Funktion, so existiert dazu die *Fourier-Transformierte*

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt.$$

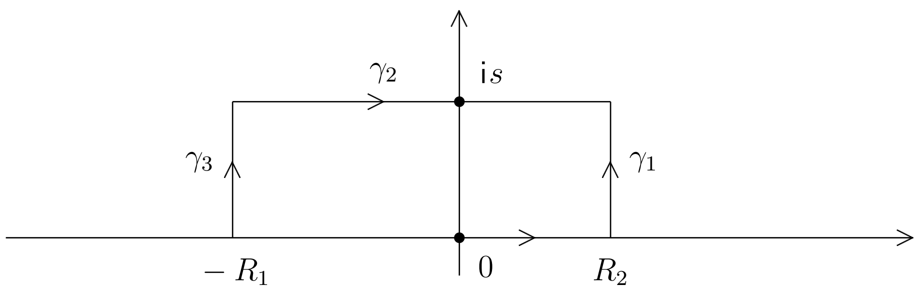
Das „Fourier-Integral-Theorem" besagt, daß man f aus $\widehat{f}$ zurückgewinnen kann. Und zwar ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega.$$

In der Praxis kann dieses Problem besonders schön gelöst werden, wenn man $\widehat{f}$ als Einschränkung einer meromorphen Funktion F auf $\mathbb{C}$ auffassen kann.

Wir nehmen außerdem an, daß F nur endlich viele Polstellen hat und daß $z \cdot F(z)$ für großes z beschränkt bleibt, und wir betrachten nur den Fall $t > 0$.

Dann benutzen wir folgende Integrationswege:



$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad \gamma_1(\tau) &:= R_2 + \mathrm{i}\tau, \quad 0 \le \tau \le s, \\ \gamma_2(\tau) &:= \tau + \mathrm{i}s, \quad -R_1 \le \tau \le R_2, \\ \text{und} \quad \gamma_3(\tau) &:= -R_1 + \mathrm{i}\tau, \quad 0 \le \tau \le s. \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma_1'(\tau) \equiv \gamma_3'(\tau) \equiv \mathrm{i}$ und $\gamma_2'(\tau) \equiv 1$.

Hat F nur endlich viele Polstellen, so kann man R_1, R_2 und s so groß wählen, daß die Polstellen alle im Innern des Weges $\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ liegen (wobei γ_0 die Strecke von $-R_1$ nach R_2 bezeichnet).

Setzen wir

$$I_\nu(t) := \int_{\gamma_\nu} F(z) e^{\mathrm{i}zt}\, dz$$

für $\nu = 1, 2, 3$, so erhalten wir mit dem Residuensatz:

$$\int_{-R_1}^{R_2} F(x) e^{\mathrm{i}xt}\, dx + I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}zt}).$$

Wir schätzen nun die Integrale $I_\nu(t)$ einzeln ab. Dabei verwenden wir folgende Tatsachen:

a) Ist $z = x + \mathrm{i}y$, so ist $|e^{\mathrm{i}zt}| = e^{-yt}$.

b) Da s nicht unabhängig von R_1 und R_2 gewählt werden muß, kann man $s := R_1 + R_2$ setzen.

c) Es gibt ein $C > 0$, so daß für großes R_1 und R_2 und $|z| \geq \min(R_1, R_2)$ gilt:

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|z|}.$$

Die Standardabschätzung ergibt nun:

$$\begin{aligned} |I_2(t)| &\leq (R_1 + R_2) \cdot e^{-st} \cdot \sup_{|\gamma_2|} |F(z)| \\ &\leq C \cdot e^{-st} \longrightarrow 0 \\ &\quad \text{(für festes } t \text{ und } R_1, R_2 \to \infty \text{)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &\leq \int_0^s |F(R_2 + \mathrm{i}\tau)| \cdot e^{-\tau t}\, d\tau \\ &\leq \frac{C}{R_2} \int_0^s e^{-\tau t}\, d\tau \\ &= \frac{C}{R_2 t}(1 - e^{-st}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

$I_3(t)$ wird analog abgeschätzt.

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{\mathrm{i}xt}\, dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}zt}),$$

und die Existenz des Integrals wurde (unter den obigen Voraussetzungen) gleich mitbewiesen.

Beispiel.

Zu berechnen ist das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}ax}}{x - \mathrm{i}b}\, dx$, mit $a, b > 0$.

$$\text{Es ist} \quad \mathrm{res}_{\mathrm{i}b}\left(\frac{e^{\mathrm{i}az}}{z - \mathrm{i}b}\right) = e^{-ab}, \quad \text{also}$$

$$I = 2\pi\mathrm{i} \cdot e^{-ab}.$$

4. Die Mellin-Transformation:

Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polstellen, von denen keine auf der positiven reellen Achse liegt. Dann soll folgendes Integral berechnet werden:

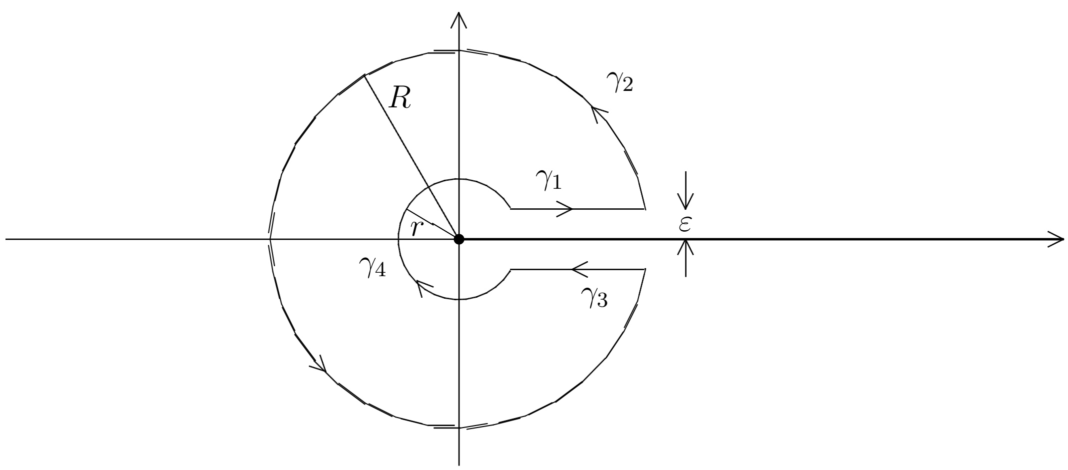
$$\int_0^\infty f(x)x^a \frac{dx}{x} = \int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx.$$

Um den Integranden als Einschränkung oder Grenzwert einer holomorphen Funktion $f(z)\cdot z^{a-1}$ auffassen zu können, muß man zunächst einen geeigneten Logarithmus-Zweig wählen, und das ist nur auf einer aufgeschlitzten Ebene möglich. Der Trick besteht darin, ausgerechnet

$$\lambda(z) := \log_{(0)} \quad \text{auf} \quad \widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$$

zu wählen, so daß $z^a = e^{a\lambda(z)}$ ist.

Wir benutzen dann den wie folgt skizzierten Weg und lassen $r \to 0$, $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ gehen.



Für $0 < t < 2\pi$ ist $\lambda(re^{\mathrm{i}t}) = \ln r + \mathrm{i}t$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \lambda(x+\mathrm{i}\varepsilon) &= \ln(x) \\ \text{und} \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \lambda(x+\mathrm{i}\varepsilon) &= \ln(x) + 2\pi\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x+\mathrm{i}\varepsilon)^a &= x^a \\ \text{und} \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} (x+\mathrm{i}\varepsilon)^a &= x^a \cdot e^{2\pi\mathrm{i}a}. \end{aligned}$$

Sind r und ε sehr klein, R sehr groß, so liegen alle etwaigen Polstellen von f in dem von $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ berandeten Gebiet G.

3.3 Satz. *Ist* $\lim_{z\to 0} f(z)z^a = 0$ *und* $\lim_{z\to\infty} f(z)z^a = 0$, *so existiert das Integral*

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx = \frac{2\pi \mathsf{i}}{1-e^{2\pi \mathsf{i}a}} \cdot \sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}} \mathrm{res}_w(f(z)z^{a-1}).$$

Beweis: Sei $I_\nu := \displaystyle\int_{\gamma_\nu} f(z)z^{a-1}\,dz$.

a) Es ist

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 2\pi R \cdot \sup_{|\gamma_2|}|f(z)z^{a-1}| \\ &= 2\pi \cdot \sup_{|\gamma_2|}|f(z)z^a| \longrightarrow 0 \quad (\text{für } R\to\infty). \end{aligned}$$

b) Weiter ist

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq 2\pi r \cdot \sup_{|\gamma_4|}|f(z)z^{a-1}| \\ &= 2\pi \cdot \sup_{|\gamma_4|}|f(z)z^a| \longrightarrow 0 \quad (\text{für } r\to 0). \end{aligned}$$

c) Schließlich gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)z^{a-1}\,dz = \int_r^R f(x)x^{a-1}\,dx$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_3} f(z)z^{a-1}\,dz = -\int_r^R f(x)x^{a-1}e^{2\pi\mathsf{i}(a-1)}\,dx,$$

also strebt I_1+I_3 bei festem r und R für $\varepsilon\to 0$ gegen

$$(1-e^{2\pi\mathsf{i}a})\cdot\int_r^R f(x)x^{a-1}\,dx.$$

Ist dabei r genügend klein und R genügend groß, so nimmt $I_1+I_2+I_3+I_4$ den festen Wert $2\pi\mathsf{i}\cdot\displaystyle\sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}}\mathrm{res}_w(f(z)z^{a-1})$ an.

Läßt man jetzt $r\to 0$ und $R\to\infty$ streben, so erhält man die Existenz des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx$ und die Gültigkeit der gewünschten Gleichung. ∎

3.4 Zusatz. *Ist* $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ *mit* $\mathrm{grad}(q)>\mathrm{grad}(p)$ *und* $0<\mathrm{Re}(a)<1$, *so sind die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt.*

Beweis: Sei $z=re^{\mathsf{i}t}\in\widetilde{\mathbb{C}}$ und $a=\alpha+\mathsf{i}\beta$ mit $0<\alpha<1$. Dann ist

$$z^a = e^{\alpha\ln r-\beta t}\cdot e^{\mathsf{i}(\beta\ln r+\alpha t)},$$

also

$$|z^a| = r^\alpha \cdot e^{-\beta t} = |z|^\alpha \cdot e^{-\beta \arg(z)} \leq |z|^\alpha \cdot e^{|\beta| 2\pi}.$$

Da f nach Voraussetzung im Nullpunkt keine Singularität besitzt, folgt:

$$|f(z)z^a| \leq |f(z)| \cdot |z|^{\mathrm{Re}(a)} \cdot e^{2\pi|\mathrm{Im}(a)|} \longrightarrow 0 \qquad (\text{für } z \to 0).$$

Andererseits gibt es ein $C > 0$, so daß für große z gilt: $|f(z)| \leq \dfrac{C}{|z|}$. Da $\mathrm{Re}(a)-1 < 0$ ist, bedeutet das:

$$|f(z)z^a| \leq C \cdot |z|^{\mathrm{Re}(a)-1} \cdot e^{2\pi|\mathrm{Im}(a)|} \longrightarrow 0 \qquad (\text{für } z \to \infty).$$

■

Da $e^{-\pi \mathrm{i} a} - e^{\pi \mathrm{i} a} = -2\mathrm{i}\sin(\pi a)$ ist, gilt:

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - e^{2\pi\mathrm{i}a}} = \frac{2\pi\mathrm{i}e^{-\pi\mathrm{i}a}}{e^{-\pi\mathrm{i}a} - e^{\pi\mathrm{i}a}} = -\frac{\pi e^{-\pi\mathrm{i}a}}{\sin(\pi a)}.$$

3.5 Folgerung. *Sei* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *eine rationale Funktion ohne Polstellen in* $\mathbb{R}_+$*,* $\mathrm{grad}(q) > \mathrm{grad}(p)$ *und* $a \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$*. Dann ist*

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi\mathrm{i}a}}{\sin(\pi a)} \cdot \sum_{w \in \widetilde{\mathbb{C}}} \mathrm{res}_w(f(z)z^{a-1}).$$

Beispiel.

Berechnet werden soll das Integral $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$, mit $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

Hier ist $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, mit $z = -1$ als einziger Polstelle. Es ist

$$\mathrm{res}_{-1}(f(z)z^{a-1}) = \lim_{z \to -1} z^{a-1} = (-1)^{a-1} = (e^{\pi\mathrm{i}})^{a-1} = -e^{\pi\mathrm{i}a},$$

also

$$I = -\frac{\pi e^{-\pi\mathrm{i}a}}{\sin(\pi a)} \cdot (-e^{\pi\mathrm{i}a}) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$