Kapitel 2 Integration im Komplexen

§ 1 Der Satz von Goursat

Eine (komplexwertige) Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt, so daß f auf jedem der offenen Intervalle (t_{i-1}, t_i) stetig ist und in den Punkten t_i einseitige Grenzwerte besitzt. f heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn f auf $[a, b]$ stetig und auf den abgeschlossenen Teilintervallen einer geeigneten Zerlegung stetig differenzierbar ist.

Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ ist $\mathbb{C}$-linear, und das Integral einer reellwertigen Funktion ist reell. Außerdem gilt:

1.1 Satz.

1. *Ist f stetig und F eine (komplexwertige) Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so ist*
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$
2. *Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar, so ist*
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds.$$
3. *Ist (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f_\nu(t)\,dt.$$
4. *Es gilt die Abschätzung*
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

BEWEIS: Wir beschränken uns hier auf einen Beweis der letzten Aussage, die im Komplexen nicht ganz selbstverständlich ist:

Sei $z := \int_a^b f(t)\,dt = r \cdot e^{\mathrm{i}\lambda}$, mit $r > 0$ und $\lambda = \arg(z)$ (im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen). Dann ist $e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot z = r = |\int_a^b f(t)\,dt|$, also

$$|\int_a^b f(t)\,dt| = \operatorname{Re}\left(e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot \int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot f(t))\,dt.$$

Da für eine komplexe Zahl $w = u + \mathrm{i}v$ stets $\operatorname{Re}(w) = u \le \sqrt{u^2 + v^2}$ ist und die Integration über reellwertige Funktionen monoton ist, folgt:

$$|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot f(t))\,dt \le \int_a^b |e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

■

Beispiele.

1. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $f(t) := e^{\mathrm{i}nt}$ und $F(t) := \dfrac{1}{\mathrm{i}n} e^{\mathrm{i}nt}$. Dann ist $F'(t) = f(t)$ und daher
$$\int_a^b e^{\mathrm{i}nt}\,dt = \frac{1}{\mathrm{i}n} e^{\mathrm{i}nt}\,\Big|_a^b = \frac{1}{\mathrm{i}n}(e^{\mathrm{i}nb} - e^{\mathrm{i}na}).$$

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ **komplex differenzierbar** und f' stetig.

   Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist auch $f \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg, und weil $f_{\overline{z}} = 0$ und $f_z = f'$ ist, folgt:
$$(f \circ \alpha)'(t) = f_z(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) + f_{\overline{z}}(\alpha(t)) \cdot \overline{\alpha'(t)} = f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t),$$
   also
$$\int_a^b f'(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t)\,dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$
   Man beachte, daß der Strich hier einmal die komplexe und einmal die reelle Ableitung bezeichnet.

Wir haben den reellen Differentialquotienten einfach ins Komplexe übertragen:

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ .$$

Jetzt wollen wir versuchen, nach dem Muster der reellen Analysis auch komplexe Integrale

$$\int_p^q f(z)\,dz$$

einzuführen. Aber wie sollen wir das tun? Im Reellen muß der Integrand in allen Punkten zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt definiert und in irgend einem

Sinne integrierbar sein. Im Komplexen gibt es keine Intervalle, bestenfalls die Verbindungsstrecke. Ist aber etwa f eine stetige Funktion auf einem Gebiet G und sind p, q Punkte aus G, so braucht die Verbindungsstrecke nicht komplett zu G zu gehören.

Daß G ein Gebiet ist, sichert aber auf jeden Fall die Existenz eines stetigen Verbindungsweges von p nach q innerhalb von G. Wir können versuchen, die Funktion f entlang eines solchen Weges zu integrieren. Leider erhalten wir dann eine zusätzliche Abhängigkeit vom Integrationsweg. Welche Konsequenzen das hat, werden wir untersuchen müssen.

Wir führen noch folgende Sprachregelung ein: Ein *Integrationsweg* in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\alpha : [a, b] \to G$.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und $\alpha : [a, b] \to G$ ein Integrationsweg. Dann wird das *komplexe Kurvenintegral* von f über α definiert durch

$$\int_\alpha f(z)\,dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt.$$

Zwei Integrationswege $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ heißen *äquivalent*, wenn es eine stückweise stetig differenzierbare, surjektive und streng monoton wachsende Funktion $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ gibt, so daß $\alpha \circ \varphi = \beta$ ist. Man nennt φ dann eine *Parametertransformation*. Äquivalente Wege haben gleiche Spuren, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b f \circ \alpha(t)\alpha'(t)\,dt \\
&= \int_c^d f \circ \alpha(\varphi(s))\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \\
&= \int_c^d f \circ (\alpha \circ \varphi)(s)(\alpha \circ \varphi)'(s)\,ds \\
&= \int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral von f über einen Integrationsweg α hängt also nur von der Äquivalenzklasse von α ab. Wir führen hier aber kein neues Symbol ein. Üblicherweise versteht man unter einem Integrationsweg α stillschweigend schon seine Äquivalenzklasse. Mit $|\alpha|$ wird die *Spur* des Weges bezeichnet, d.h., die Bildmenge $\alpha([a, b])$.

Man kann das komplexe Kurvenintegral einer stetigen Funktion f über α natürlich schon dann bilden, wenn f nur auf $|\alpha|$ definiert ist.

1.2 Satz. *Das komplexe Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:*

1. *Für stetige Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist*

$$\int_\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)(z)\,dz = c_1 \cdot \int_\alpha f_1(z)\,dz + c_2 \cdot \int_\alpha f_2(z)\,dz.$$

2. *Es gilt die „Standardabschätzung“:*

$$|\int_\alpha f(z)\,dz| \le L(\alpha) \cdot \max_{z\in|\alpha|} |f(z)|,$$

wobei $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$ *die* Länge *von* α *ist.*

3. *Sind* f *und* f_ν *stetige Funktionen auf* $|\alpha|$ *und konvergiert* (f_ν) *auf* $|\alpha|$ *gleichmäßig gegen* f*, so ist*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \lim_{\nu\to\infty} \int_\alpha f_\nu(z)\,dz.$$

BEWEIS: Die Linearität ist trivial, wir beginnen gleich mit der zweiten Aussage. Es ist

$$|\int_\alpha f(z)\,dz| = |\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt| \le \int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt.$$

Setzt man $M := \max_{z\in|\alpha|} |f(z)|$, so ist

$$\int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt \le M \cdot \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt = M \cdot L(\alpha).$$

Zu (3): Da α stückweise stetig differenzierbar ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß $|\alpha'(t)| \le C$ auf $[a, b]$ ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein ν_0, so daß gilt:

$$|f_\nu(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{C} \text{ für } \nu \ge \nu_0 \text{ und } z \in |\alpha|.$$

Also ist

$$|f_\nu(\alpha(t))\alpha'(t) - f(\alpha(t))\alpha'(t)| = |f_\nu(\alpha(t)) - f(\alpha(t))| \cdot |\alpha'(t)| < \varepsilon$$

für $\nu \ge \nu_0$ und $t \in [a, b]$. Das bedeutet, daß $((f_\nu \circ \alpha) \cdot \alpha')$ gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $(f \circ \alpha) \cdot \alpha'$ konvergiert, und Satz 1.1 liefert die Behauptung. ∎

1.3 Satz. *Ist* $f : G \to \mathbb{C}$ *komplex differenzierbar,* f' *stetig und* $\alpha : [a, b] \to G$ *ein Integrationsweg, so ist*

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

BEWEIS: Wir haben diese Aussage schon in Beispiel 2 nach Satz 1.1 bewiesen. ∎

Beispiele.

1. Sei $z_0 \neq 0$ und $\alpha(t) := t \cdot z_0$ (für $0 \leq t \leq 1$) die Verbindungsstrecke von 0 und z_0. Weiter sei $f(z) := z^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha f(z)\,dz &= \int_0^1 f(t \cdot z_0) \cdot z_0\,dt \\ &= z_0^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n\,dt \\ &= \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man auch auf anderem Wege erhalten. Setzt man $F(z) := \dfrac{1}{n+1} z^{n+1}$, so ist $F'(z) = f(z)$ und daher

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(1)) - F(\alpha(0)).$$

2. $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathrm{i}t}$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) ist die übliche Parametrisierung der Kreislinie $\partial D_r(z_0)$. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, benutzen wir immer diese Parametrisierung.

Ein **fundamentaler Baustein der Funktionentheorie** ist folgende Formel:

$$\boxed{\int_{\partial D_r(z_0)} (z - z_0)^n\,dz := \int_\alpha (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}}$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad \int_\alpha \frac{1}{z - z_0}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathrm{i}t} \cdot r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\,dt \\ &= \mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi\mathrm{i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und für } n \neq -1 \text{ ist} \quad \int_\alpha (z - z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (re^{\mathrm{i}t})^n \cdot r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\,dt \\ &= r^{n+1}\mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)t}\,dt \\ &= r^{n+1}\mathrm{i} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{i}(n+1)} e^{\mathrm{i}(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Begriff des Weges noch etwas verallgemeinern:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Unter einer *1-Kette* in G versteht man eine Abbildung Γ von der Menge aller Integrationswege (oder genauer: aller Äquivalenzklassen von Integrationswegen) in G nach $\mathbb{Z}$, die nur endlich oft einen Wert $\neq 0$ annimmt. Mit $K_1(G)$ sei die Menge aller 1-Ketten in G bezeichnet.

Ist $\Gamma \in K_1(G)$, so gibt es Wege $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ und Zahlen $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$, so daß gilt:

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} n_i & \text{falls } \alpha = \alpha_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man schreibt dann formal auch $\Gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i$.

Die Menge $|\Gamma| := \bigcup_{n_i \neq 0} |\alpha_i|$ nennt man die *Spur* von Γ.

Ketten können komponentenweise addiert und mit ganzen Zahlen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} (\Gamma + \Gamma')(\alpha) &:= \Gamma(\alpha) + \Gamma'(\alpha), \\ (n \cdot \Gamma)(\alpha) &:= n \cdot \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Dadurch wird $K_1(G)$ zu einer abelschen Gruppe. Man nennt $K_1(G)$ die „von allen Integrationswegen erzeugte freie abelsche Gruppe".

Jeder einzelne Integrationsweg α kann vermöge

$$\alpha(\beta) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Kette aufgefaßt werden. Auch hier ist zu beachten, daß äquivalente Wege als gleich aufgefaßt werden.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\Gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i$ eine Kette in G und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert man:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{N} n_i \int_{\alpha_i} f(z)\, dz.$$

Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so durchläuft

$$\alpha^-(t) := \alpha(a + b - t) \qquad (\text{für } a \leq t \leq b)$$

die selbe Kurve wie α, nur in umgekehrter Richtung. Da die Transformation $\varphi(t) := a + b - t$ nicht streng monoton wachsend ist, sind α und α^- nicht äquivalent. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha^-} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\alpha\circ\varphi(t))(\alpha\circ\varphi)'(t)\,dt \\
&= \int_a^b f\circ\alpha(\varphi(t))\alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_b^a f\circ\alpha(s)\alpha'(s)\,ds \\
&= -\int_\alpha f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Sind $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ zwei Integrationswege mit $\alpha(b) = \beta(c)$, so durchläuft der auf $[a, b+d-c]$ definierte Weg

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{für } a \le t \le b \\ \beta(t-b+c) & \text{für } b < t \le b+d-c \end{cases}$$

die beiden Kurven $|\alpha|$ und $|\beta|$ hintereinander. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha*\beta} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} f(\beta(t-b+c))\beta'(t-b+c)\,dt \\
&= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_c^d f(\beta(s))\beta'(s)\,ds \\
&= \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Sei nun

$$N_1(B) := \{\Gamma \in K_1(B) \,:\, \int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \text{ für alle stetigen Fktn. } f : B \to \mathbb{C}\}.$$

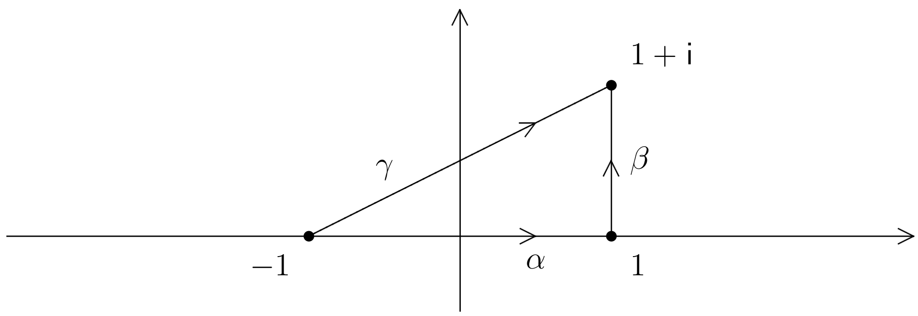
Dann ist $N_1(B)$ eine Untergruppe von $K_1(B)$. Offensichtlich liegen Ketten wie $\alpha + \alpha^-$ (für beliebiges α) und $\alpha + \beta - \alpha * \beta$ (falls der Endpunkt von α mit dem Anfangspunkt von β übereinstimmt) in $N_1(B)$. Da solche Ketten für die Integrationstheorie keine Rolle spielen, kann man statt $K_1(B)$ auch die Gruppe $\overline{K}_1(B) := K_1(B)/N_1(B)$ betrachten. In der Gruppe $\overline{K}_1(B)$ der „reduzierten Ketten" ist $\alpha^- = -\alpha$ und $\alpha * \beta = \alpha + \beta$. So bekommen die Ketten wenigstens zum Teil eine anschauliche Bedeutung. Ist etwa α ein *geschlossener Weg* (d.h. $\alpha(a) = \alpha(b)$), so kann man sich unter $n\cdot\alpha$ den n-mal hintereinander durchlaufenen Weg vorstellen. Das Vorzeichen von n gibt dabei den Durchlaufungssinn an.

Wir werden nicht so formal vorgehen, sondern mit gewöhnlichen Ketten arbeiten und dabei solche als gleich ansehen, deren Klassen in der Gruppe der reduzierten Ketten gleich wären.

Beispiel.

Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathrm{i}t \quad \text{und} \quad \gamma(t) := (-1+2t) + \mathrm{i}t.$$



Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\alpha+\beta} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t)\cdot 2\,dt + \int_0^1 (1-\mathrm{i}t)\cdot \mathrm{i}\,dt\\ &= 2\cdot(-t+t^2)\Big|_0^1 + \mathrm{i}\cdot(t-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1\\ &= 2\cdot(-1+1)+\mathrm{i}\cdot(1-\frac{\mathrm{i}}{2})\\ &= \mathrm{i}+\frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathrm{i}t)(2+\mathrm{i})\,dt\\ &= (2+\mathrm{i})\cdot(-t+\frac{2-\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1\\ &= (2+\mathrm{i})\cdot(-1+1-\frac{\mathrm{i}}{2})\\ &= -\mathrm{i}+\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab! Wir werden bald sehen, daß das daran liegt, daß f nicht holomorph ist.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bemerkung. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen von f höchstens um eine Konstante.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. G heißt *sternförmig bezüglich* $a \in G$, falls mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a und z ganz in G liegt.

Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, aber die Umkehrung ist i.a. falsch. Sind G_1 und G_2 konvex und ist $a \in G_1 \cap G_2$, so ist $G_1 \cup G_2$ bezüglich a sternförmig.

Das „Innere eines Dreiecks" (die exakte Formulierung sei dem Leser überlassen) nennen wir ein *Dreiecksgebiet*. Offensichtlich ist jedes Dreiecksgebiet konvex, und der Rand ist stückweise stetig differenzierbar. Nimmt man den Rand hinzu, so spricht man von einem *abgeschlossenen Dreieck*.

1.4 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

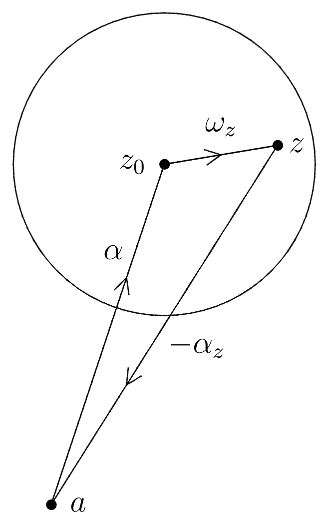
1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *Es ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat.*

BEWEIS:

$(1) \Longrightarrow (2)$: Trivial!

$(2) \Longrightarrow (1)$: Für $z \in G$ sei $F(z) := \displaystyle\int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta$, wobei $\alpha_z : [0,1] \to G$ die Verbindungsstrecke von a und z bezeichnet.

Zu zeigen bleibt: F ist auf G komplex differenzierbar, und es ist $F' = f$.



Dazu betrachten wir einen Punkt $z_0 \in G$ und wählen eine offene Kreisscheibe D um z_0, die noch ganz in G enthalten ist. Für $z \in D$ sei $\omega_z(t) := z_0 + t \cdot (z - z_0)$ die (in D enthaltene) Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z. Weiter sei $\alpha := \alpha_{z_0}$.

Dann ist $\gamma := \alpha + \omega_z - \alpha_z$ ein geschlossener Weg, und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0)\,dt \\ &= F(z_0) - F(z) + \Delta(z) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

mit $\Delta(z) := \displaystyle\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,dt$. Offensichtlich ist $\Delta(z_0) = f(z_0)$, und für $z \in D$ ist

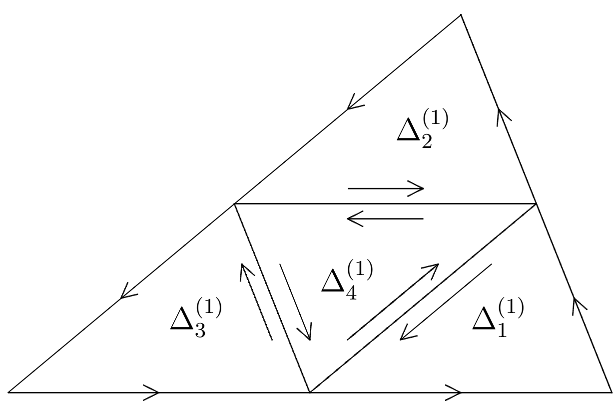
$$\begin{aligned} |\Delta(z) - \Delta(z_0)| &= \left|\int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)]\, dt\right| \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, folgt hieraus auch die Stetigkeit von Δ in z_0. Damit ist alles bewiesen. ∎

1.5 Satz von Goursat. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine* **holomorphe** *Funktion und $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

Beweis: Wir schreiben $\Delta = \Delta^{(0)}$. Indem wir die Seiten von Δ halbieren, unterteilen wir Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$.



Sei $\gamma := \sum_{k=1}^{4} \partial\Delta_k^{(1)}$. Dann ist $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\, dz,$

denn die Integrale über die Strecken im Innern des Dreiecks heben sich gegenseitig auf, da sie jeweils doppelt mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten.

Also ist

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\, dz\right| \leq 4 \cdot \max_k \left|\int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\, dz\right|.$$

Nun wählt man unter den Dreiecken $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$ dasjenige aus, bei dem der Betrag des Integrals am größten ist, und nennt es $\Delta^{(1)}$. Dann ist

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\, dz\right| \leq 4 \cdot \left|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\, dz\right|.$$

Wiederholt man diese Prozedur, so erhält man eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

mit

$$|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| \le 4^n \cdot |\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz| \text{ und } L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L(\partial\Delta).$$

Da alle $\Delta^{(i)}$ kompakt und nicht leer sind, enthält $\bigcap\limits_{n\ge 0} \Delta^{(n)}$ einen Punkt z_0 (man kann eine gegen z_0 konvergente Folge konstruieren), und da der Durchmesser der Dreiecke beliebig klein wird, kann es auch nur einen solchen Punkt geben.

Jetzt kommt der entscheidende Trick dieses Beweises! Wir nutzen die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 aus:

Es gibt eine in z_0 stetige Funktion A, so daß gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot (f'(z_0) + A(z))$.
2. $A(z_0) = 0$.

Die affin-lineare Funktion $\lambda(z) := f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)$ hat auf G eine Stammfunktion, nämlich

$$\Lambda(z) := \frac{f'(z_0)}{2} z^2 + (f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)) \cdot z.$$

Also ist $\int_{\partial\Delta^{(n)}} \lambda(z)\,dz = 0$ für alle n. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz| &= |\int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0)A(z)\,dz| \\ &\le L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}(|z - z_0| \cdot |A(z)|) \\ &\le L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}(|A(z)|. \end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} |\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| &\le 4^n \cdot |\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz| \\ &\le 4^n \cdot L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)| \\ &= L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)|. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0. ∎

Der Satz von Goursat läßt sich noch ein wenig verschärfen.

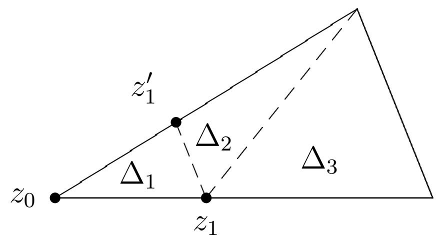
1.6 Satz von Goursat in verschärfter Form. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Wir können annehmen, daß f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von $\triangle$.

Dann zerlegen wir $\triangle$ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt, daß $\int_{\partial\triangle_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)\,dz = 0$ ist, also

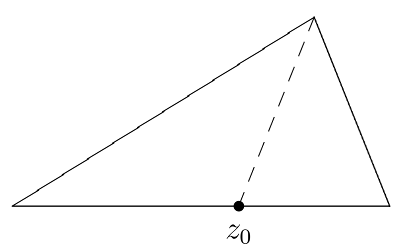
$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

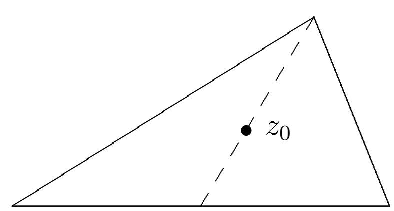
$$\left|\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| \le L(\partial\triangle_1)\cdot\sup_{\triangle}|f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von $\triangle$, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man $\triangle$ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von $\triangle$. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb $\triangle$, so ist überhaupt nichts zu zeigen. ∎

1.7 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.*

BEWEIS: Sei G sternförmig bezüglich $a \in G$. Nach dem verschärften Satz von Goursat ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, insbesondere also für jedes Dreieck, das a als Eckpunkt hat. Aber dann besitzt f eine Stammfunktion. ∎

HINWEIS: Wir haben im Beweis nicht direkt die Holomorphie von f benutzt, sondern nur die Tatsache, daß das Integral über f und den Rand eines abgeschlossenen Dreiecks in G verschwindet!

Nun folgt:

1.8 Cauchyscher Integralsatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :*

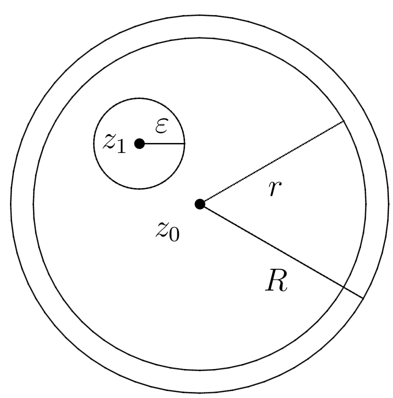
$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

BEWEIS: f besitzt eine Stammfunktion, und daraus folgt die Behauptung. ∎

Es folgt eine erste Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes:

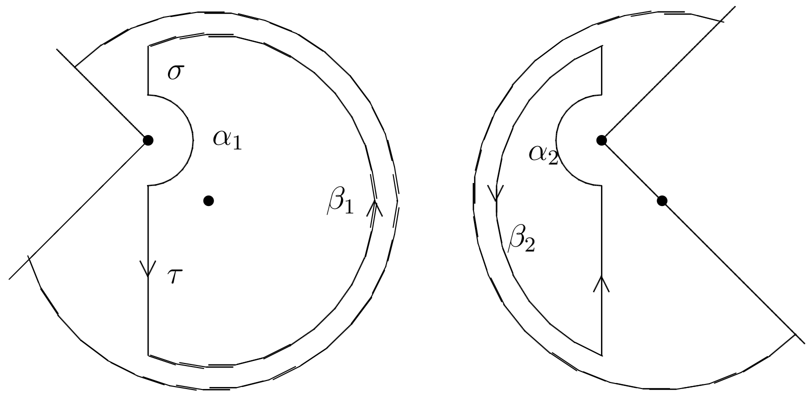
Sei $R > 0$ und $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph außerhalb des Punktes $z_1 \in D_R(z_0)$, $z_1 \neq z_0$.

Wir wählen ein r mit $0 < r < R$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß noch $D_\varepsilon(z_1) \subset D_r(z_0)$ ist.



Behauptung: $\displaystyle\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_1)} f(z)\,dz.$

Zum BEWEIS zeigen wir, daß die Differenz der Integrale verschwindet. Dazu fassen wir die „Differenz“ der Kreislinien als Kette von Wegen auf. Und diese Kette schreiben wir wiederum als Summe zweier geschlossener Wege, auf die sich jeweils der Cauchysche Integralsatz anwenden läßt:



Bezeichnen wir die beiden Verbindungsstrecken vom kleinen inneren Kreis zum großen äußeren Kreis (von oben nach unten orientiert) mit σ und τ und die positiv orientierten Teil-Kreislinien mit α_1, α_2 und β_1, β_2, so gilt:

$$(\beta_1 + \sigma - \alpha_1 + \tau) + (\beta_2 - \tau - \alpha_2 - \sigma) = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die beiden geschlossenen Wege auf der linken Seite der Gleichung verlaufen jeweils in einem sternförmigen Gebiet, in dem f holomorph ist. Nach Cauchy ist das Integral über diese Wege $= 0$, und daraus folgt auch schon die Behauptung. ∎

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht sternförmig. Tatsächlich ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, es ist z.B.

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi \mathsf{i} \neq 0.$$

Setzen wir aber $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, so ist die „geschlitzte Ebene" $G' := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$). Also gibt es auf G' für $f(z) := \dfrac{1}{z}$ eine Stammfunktion:

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in G' verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, daß das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Die Funktion $F(z)$ ist holomorph, es ist $F(1) = 0$ und $F'(z) = \dfrac{1}{z}$. Diese Eigenschaften kennen wir schon (im Reellen) vom natürlichen Logarithmus. Also stellt sich die Frage, ob wir hier auch im Komplexen die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gefunden haben. Leider ist das nur bedingt richtig. Zumindest gilt aber:

Behauptung: $\exp(F(z)) = z$.

Beweis: Mit einem kleinen Trick geht es ganz einfach:

Sei $g(z) := z \cdot \exp(-F(z))$. Dann ist g holomorph und

$$g'(z) = \exp(-F(z)) + z \cdot (-F'(z)) \cdot \exp(-F(z)) = \exp(-F(z)) - \exp(-F(z)) = 0.$$

Also ist g lokal-konstant, und da der Definitionsbereich G' ein Gebiet ist, ist g sogar konstant: $g(z) \equiv c$. Es folgt:

$$c \cdot \exp(F(z)) \equiv z.$$

Setzen wir speziell $z = 1$ ein, so erhalten wir $1 = c \cdot \exp(F(1)) = c \cdot \exp(0) = c$. Also ist $\exp(F(z)) = z$. ∎

Das rechtfertigt schon einmal die

Definition.

$$\log(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\text{für } z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-) \qquad \text{heißt } \textit{Logarithmusfunktion.}$$

Damit $\log(z)$ die Umkehrabbildung zu $\exp(z)$ sein kann, muß exp zunächst einmal bijektiv sein. Wir wissen aber, daß exp periodisch ist (mit Periode $2\pi \mathrm{i}$) und daher gar nicht bijektiv sein kann! Also untersuchen wir die Exponentialfunktion etwas genauer:

1.9 Satz. *Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist*

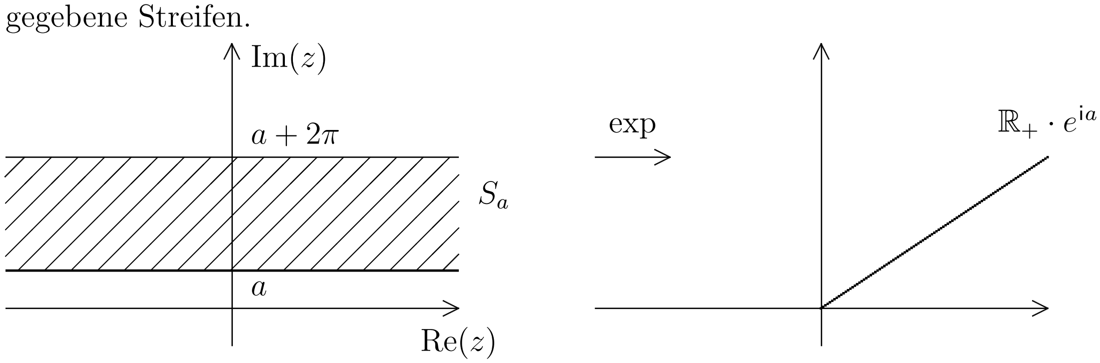
$$\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid a \le \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\} \to \mathbb{C}^*$$

bijektiv.

Beweis: Sei S_a der durch

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid a \le \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\}$$

gegebene Streifen.



1) Injektivität:

Es ist $\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi \mathrm{i} n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z) = \exp(w) \quad &\Longrightarrow \quad \exp(z-w) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad z = w + 2\pi \mathrm{i} n \\ &\Longrightarrow \quad z \text{ und } w \text{ nicht beide im gleichen Streifen } S_a.\end{aligned}$$

2) Surjektivität:

Sei $w = re^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{C}^*$, also $r > 0$, $0 \le t < 2\pi$.

Wir setzen $z := \ln(r) + \mathrm{i}t$. Dann ist $\exp(z) = e^{\ln(r)+\mathrm{i}t} = r \cdot e^{\mathrm{i}t} = w$.

Liegt z nicht im Streifen S_a, so kann man ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so daß $z^* := z + 2\pi\mathrm{i}k$ in S_a liegt. Dann ist $\exp(z^*) = \exp(z) = w$. ∎

Definition.

$$\log_{(a)} := (\exp\Big|_{\mathring{S}_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{\mathrm{i}a} \to \mathring{S}_a$$

heißt *der durch a bestimmte Logarithmuszweig.*

1.10 Satz. *Ist $z = r \cdot e^{\mathrm{i}t}$, mit $a < t < a + 2\pi$, so ist $\log_{(a)}(z)$ definiert, und es gilt*

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}t.$$

Insbesondere ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z)$, falls $\arg(z) \neq \pi$ ist.

BEWEIS: Durch $re^{\mathrm{i}t} \mapsto \ln(r) + \mathrm{i}t$ wird eine Umkehrfunktion zu $\exp\Big|_{\mathring{S}_a}$ gegeben, wenn das Argument t zwischen a und $a + 2\pi$ läuft.

Es ist $\arg(z) \neq \pi \iff z = r \cdot e^{\mathrm{i}t_0}$ mit $r > 0$ und $-\pi < t_0 < \pi$. Aber dann ist $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ und $\log(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, wobei es egal ist, über welchen Weg in $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ man integriert. Ist etwa $t_0 \ge 0$, so können wir den Weg $\gamma := \alpha + \beta$ wählen, mit

$$\alpha(s) := s \text{ für } s \text{ zwischen 1 und } r \quad \text{und} \quad \beta(t) := re^{\mathrm{i}t} \text{ für } t \text{ zwischen 0 und } t_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\log(z) &= \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_\beta \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \int_1^r \frac{ds}{s} + \int_0^{t_0} \mathrm{i}\, dt \\ &= \ln(r) + \mathrm{i}t_0 = \log_{(-\pi)}(z).\end{aligned}$$

Der Fall $t_0 < 0$ wird analog behandelt. ∎

Man nennt $\log(z)$ auch den *Hauptzweig des Logarithmus*.

Wir können noch eine weitere Beschreibung des Logarithmus geben. Aus der reellen Analysis ist bekannt, daß folgendes gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\text{bzw.} \qquad \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $= 1$, also wird durch

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

eine auf $D_1(1)$ definierte und holomorphe Funktion gegeben.

Behauptung: Für $|z-1| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

Beweis: Im Konvergenzkreis ist

$$\begin{aligned} L'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\ &= \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Also ist $L(z) = \log(z) + c$, mit einer Konstanten c. Setzen wir $z = 1$ ein, so erhalten wir $c = 0$. ∎

Der Nullpunkt scheint ein unüberwindliches Hindernis für den Logarithmus zu sein. Aber was passiert dort genau?

Betrachten wir die beiden Wege

$$\alpha_+(t) := e^{\mathrm{i}t} \text{ und } \alpha_-(t) := e^{-\mathrm{i}t} \text{ für } 0 \le t < \pi.$$

Sie starten beide bei 1, aber α_+ erreicht die negative reelle Achse von oben, α_- erreicht sie an der gleichen Stelle von unten. Nun gilt:

$$\int_{\alpha_+} \frac{dz}{z} - \int_{\alpha_-} \frac{dz}{z} = \int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Das bedeutet: Die Funktionswerte von $\log(z)$ bei Annäherung an den Punkt $z = -1$ von oben bzw. von unten unterscheiden sich um $2\pi\mathrm{i}$. Dieser „Sprung“ tritt entlang der gesamten negativen Achse auf.

Allerdings passen die Werte von $\log_{(-\pi)}(z)$ bei Annäherung an die negative reelle Achse von oben hervorragend mit den Werten von $\log_{(\pi)}(z)$ bei Annäherung von unten zusammen. Durch Umrunden des Nullpunktes entgegen dem Uhrzeigersinn gelangt man also von einem Zweig des Logarithmus zu einem anderen, genauer von $\log_{(a)}$ zu $\log_{(a+2\pi)}$. Umrundet man dann den Nullpunkt ein weiteres Mal, so landet man beim Zweig $\log_{(a+4\pi)}$ usw. Man nennt den Nullpunkt daher auch einen *Verzweigungspunkt* für den Logarithmus.

Die Zweige $\log_{(-\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind alle auf $G' := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definiert. Verschafft man sich für jedes k ein Exemplar von G'_k und verheftet man jeweils G'_k mit G'_{k+1} entlang der negativen reellen Achse und so, daß die Logarithmuswerte aneinander passen, so erhält man eine wendeltreppenartige Fläche aus unendlich vielen Blättern, eine sogenannte *Riemannsche Fläche*, auf der der Logarithmus global definiert werden könnte.

Wie lautet nun das Kochrezept zum Bestimmen des Logarithmus?

Ist eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{\mathrm{i}t}$ gegeben, mit $0 \le t < 2\pi$, so wähle man ein $a \in \mathbb{R}$, so daß $a < t < a + 2\pi$ ist. Wenn z nicht gerade auf der negativen reellen Achse liegt, kann $a = -\pi$ oder $a = \pi$ gewählt werden. In jedem Fall ist dann aber $w := \ln(r) + \mathrm{i}t$ ein Element des Streifens S_a, und $\exp(w) = z$, also

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}t.$$

Beispiele.

1. Sei $z = 2\mathrm{i}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.

2. Sei $z = -2\mathrm{i}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Wir können $a = \pi$ wählen und erhalten: $\log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\frac{3\pi}{2}$.

   Nun ist zugleich $z = 2 \cdot e^{-(\pi/2)\mathrm{i}}$, also auch $\log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$. Die beiden verschiedenen Darstellungen entsprechen der allgemeinen Gleichung

   $$\log_{(a+2\pi)}(z) = \log_{(a)}(z) + 2\pi\mathrm{i}.$$

   Da auch $0 < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ wählen können. Das ergibt aber nichts neues. Es ist $\log_{(0)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\frac{3\pi}{2}$.

   Allgemein gilt für $a < b < t < a + 2\pi < b + 2\pi$ und $z = r \cdot e^{\mathrm{i}t}$:

   $$\log_{(a)}(z) = \log_{(b)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}t.$$

Bisher haben wir Logarithmen nur auf geschlitzten Ebenen betrachtet. Das läßt sich aber noch etwas verallgemeinern.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine *Logarithmusfunktion* auf G ist eine stetige Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ l(z) \equiv z$.

1.11 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet.*

1. *Je zwei Logarithmusfunktionen auf G unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathrm{i}$.*

2. *Jede Logarithmusfunktion l auf G ist holomorph, mit $l'(z) = \dfrac{1}{z}$.*

3. *Sei $1 \in G$. Eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Logarithmusfunktion auf G, wenn $l'(z) = \dfrac{1}{z}$ und $l(1) = 2\pi\mathrm{i}k$ ist, mit einer Zahl $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis: 1) Sind l_1, l_2 zwei Logarithmusfunktionen auf G, so setze man $l(z) := l_2(z) - l_1(z)$. Dann ist l stetig auf G und $\exp(l(z)) \equiv 1$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $l(z) \equiv 2\pi\mathrm{i}k$ ist.

2) Sei $z_0 \in G$ und $w_0 := l(z_0)$. Dann ist $z_0 = \exp \circ l(z_0) = \exp(w_0)$. Es gibt eine Umgebung $U = U(w_0) \subset \mathbb{C}$ und eine Umgebung $W = W(z_0) \subset G$, so daß $\exp|_U : U \to W$ bijektiv ist und $\lambda := (\exp|_U)^{-1} : W \to \mathbb{C}$ Einschränkung eines holomorphen Logarithmuszweiges, mit $\lambda(z_0) = w_0$.

Sei $V = V(z_0) \subset W$ so klein gewählt, daß $l(V) \subset U$ ist. Für $z \in V$ ist dann $\lambda(z) = \lambda(\exp \circ l(z)) = (\lambda \circ \exp) \circ l(z) = l(z)$, also l holomorph auf V. Weiter ist $1 = (\exp \circ l)'(z) = \exp(l(z)) \cdot l'(z) = z \cdot l'(z)$.

3) Ist $1 \in G$ und l eine Logarithmusfunktion auf G, so muß $\exp(l(1)) = 1$ sein, also $l(1) = 2\pi\mathrm{i}k$. Ist umgekehrt $l : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $l'(z) = \dfrac{1}{z}$ und $l(1) = 2\pi\mathrm{i}k$, so ist l eine Stammfunktion von $f(z) := \dfrac{1}{z}$, also $F(z) := \displaystyle\int_1^z f(\zeta)\,d\zeta = l(z) - l(1)$ wohldefiniert und holomorph auf G. Wir wissen aber schon, daß F eine Logarithmusfunktion ist, und daher gilt das auch für l. ∎

Über die Existenz von Logarithmusfunktionen können wir im Augenblick noch nichts aussagen, was über die Existenz der schon behandelten Logarithmus-Zweige hinausginge.

Jetzt können wir auch beliebige Potenzen in $\mathbb{C}$ definieren.

Definition. Für komplexe Zahlen z und w mit $z \neq 0$ setzt man

$$z^w := \exp(w \cdot \log(z)).$$

Dabei kann der Exponent w beliebig gewählt werden. z muß im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Normalerweise benutzt man den Hauptzweig, dann darf z nicht in $\mathbb{R}_-$ liegen.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist i^{i}? Benutzen wir die Beziehung $\mathsf{i} = e^{\mathsf{i}\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:
$$\mathsf{i}^{\mathsf{i}} = \exp(\mathsf{i} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{\mathsf{i}\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathsf{i} \cdot \mathsf{i}\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879\ldots$$
Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich $e^{-\pi/2}e^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathsf{i}t}$ ist die Potenz
$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\mathsf{i}k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + \mathsf{i}t + 2\pi\mathsf{i}k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2}\ln(r)) \cdot \exp(\mathsf{i}(\frac{t}{2} + \pi k)) \\ &= \pm\sqrt{r} \cdot e^{\mathsf{i}\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$
je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist. Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel:
$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathsf{i}\frac{t}{n} + \mathsf{i}\frac{2k}{n}\pi} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathsf{i}\frac{t}{n}} \cdot (\zeta_n)^k,\ k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$
wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

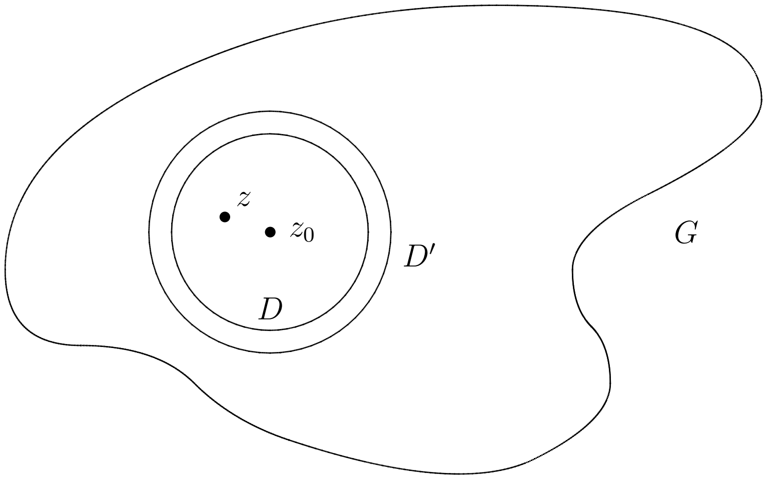
§ 2 Die Cauchyschen Integralformeln

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, B liegt *relativ-kompakt* in G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), wenn B beschränkt und $\overline{B} \subset G$ ist.

2.1 Die Cauchysche Integralformel. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.*

Dann gilt für alle $z \in D$:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis: Wir können ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß auch noch $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ ist.



Sei $z \in D$ beliebig vorgegeben. Da f in G holomorph ist, gibt es eine in z stetige Funktion Δ_z auf G, so daß für alle $\zeta \in G$ gilt:

$$f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z).$$

Dann ist

$$\Delta_z(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Nachdem Δ_z überall stetig und außerhalb z sogar holomorph ist, können wir auf der sternförmigen Menge D' den Cauchyschen Integralsatz auf Δ_z und den geschlossenen Weg $\partial D \subset D'$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Delta_z(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi \mathrm{i}. \end{aligned}$$

■

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist nun ganz deutlich die **komplexe** Differenzierbarkeit eingegangen. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde. Der ganze Paragraph ist diesen Konsequenzen gewidmet.

Beispiele.

1. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz$ berechnet werden. Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt,

bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z+2}\right] \cdot e^z\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\,dz - \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z-(-2)}\,dz \\
&= 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] \\
&= \pi\mathrm{i}(1-e^{-2}).
\end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}\mathrm{i})$. Dann liegt i im Innern von C, und $-\mathrm{i}$ nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{dz}{z^2+1} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{dz}{z+\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot [2\pi\mathrm{i} - 0] \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel. Der sogenannte „Entwicklungssatz“ ist höchst überraschend und läßt die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwuchs also aus der Idee, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte schließlich das passende Hilfsmittel.

2.2 Hilfssatz (Trick mit der geometrischen Reihe). *Ist $r > 0$, $|z| < r$ und $|\zeta| = r$, so ist*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n.$$

Dabei konvergiert die Reihe im Innern des Kreises $D_r(0)$ gleichmäßig.

Beweis: Bekanntlich ist $\dfrac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ für alle komplexen Zahlen w mit $|w| < 1$. Daher liegt es nahe, folgende Umformung zu machen:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}.$$

Da $|z| < |\zeta|$ ist, kann der zweite Faktor als Grenzwert einer geometrischen Reihe geschrieben werden. ∎

2.3 Entwicklungs-Lemma. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $f : |\alpha| \to \mathbb{C}$ stetig, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, |\alpha|)$.*

Dann gibt es eine Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, die im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen die auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ definierte Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten a_n genügen der Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Insbesondere ist F holomorph auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.

BEWEIS: Ist $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$, so ist $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$. Wir können den Trick mit der geometrischen Reihe anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n .
\end{aligned}$$

Da f auf der kompakten Menge $|\alpha|$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, ist

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n \right| \le \frac{C}{R} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^n, \text{ für } \zeta \in |\alpha|,$$

und diese Reihe konvergiert für jedes feste $z \in D_R(z_0)$.

Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann (für festes z) die Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

absolut und gleichmäßig in ζ auf $|\alpha|$. Da die Partialsummen stetig in ζ sind, kann man Grenzwertbildung und Integration vertauschen (Satz 1.2) und erhält:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n .$$

Die Reihe konvergiert für jedes $z \in D_R(z_0)$.

Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut und gleichmäßig im Innern von $D_R(z_0)$ gegen $F(z)$. Da man diese Konstruktion in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ durchführen kann, ist F überall holomorph. ∎

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

2.4 Entwicklungssatz von Cauchy. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpaßt, so gibt es eine Potenzreihe*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem ist dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

wobei r mit $0 < r < R$ beliebig gewählt werden kann.

Beweis: Sei $0 < r < R$ und $\alpha(t) := z_0 + re^{\mathsf{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist f auf $|\alpha|$ stetig und man kann das Entwicklungs-Lemma anwenden. Es gibt eine Potenzreihe $p(z)$, die im Innern von $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $F(z) := \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ konvergiert. Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

gegeben.

Nach der Cauchyschen Integralformel ist aber $F(z) = f(z)$, und es ist klar, daß die Koeffizienten a_n nicht von r abhängen. ∎

2.5 Folgerung (Höhere Cauchysche Integralformeln). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z \in G$ und $D_r(z) \subset\subset G$ ist*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

BEWEIS: Sei $D := D_r(z_0) \subset\subset D_R(z_0) \subset G$. Dann kann f in D in der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

geschrieben werden. Also ist f in z_0 beliebig oft differenzierbar, und es gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta.$$

■

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *in eine Potenzreihe entwickelbar*, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G *analytisch*, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwikkelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, daß man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

2.6 Satz von Morera. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$. Dann ist f holomorph auf G.*

BEWEIS: f besitzt zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F. Aber F ist beliebig oft komplex differenzierbar, und dann ist auch $f = F'$ holomorph. ■

Fassen wir nun zusammen:

2.7 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

1. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist holomorph.*
4. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
5. *f ist analytisch.*
6. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*

7. *f ist stetig, und es ist $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle$ in G.*

Wir haben eine erstaunliche Entdeckung gemacht. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie!

Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere bemerkenswerte Eigenschaften auf.

2.8 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.*

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt, daß f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. ∎

2.9 Riemannscher Hebbarkeitssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.*

Beweis: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z)\cdot(z-z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Beides zusammen ergibt, daß F auf ganz G holomorph ist.

Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z)\cdot(z-z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, muß Δ sogar auf ganz G holomorph sein. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. ∎

Von besonderer Bedeutung ist der folgende Satz:

2.10 Identitätssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (hier ist wichtig, daß G zusammenhängend ist!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:*

1. *$f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*
2. *$f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.*
3. *Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Ist $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Menge $M \subset G$, so gibt es eine Folge (z_n) in M, die gegen z_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit ist

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(z_0).$$

Weiter ist

$$f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} = g'(z_0),$$

usw.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Sei $h := f - g$ und $N := \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$. Dann liegt z_0 in N, also ist $N \neq \varnothing$. Außerdem ist N offen: Ist nämlich $w_0 \in N$, so sind in der Potenzreihenentwicklung von h in w_0 alle Koeffizienten $= 0$, und das bedeutet, daß h auf einer ganzen Umgebung von w_0 identisch verschwindet.

Andererseits ist auch $G \setminus N$ offen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} G \setminus N &= \{z \in G \mid \exists\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } h^{(k)}(z) \neq 0\} \\ &= \bigcup_k \{z \in G \mid h^{(k)}(z) \neq 0\}, \end{aligned}$$

und das ist eine Vereinigung offener Mengen.

Die charakteristische Funktion von N ist demnach auf G eine lokal-konstante Funktion, und da G ein Gebiet ist, muß sie konstant sein. Also ist $G = N$. ■

Die Menge M, die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

2.11 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht die Nullfunktion, so ist $\{z \in G \mid f(z) = 0\}$ in G abgeschlossen und diskret[1] in G.*

Die Cauchysche Integralformel zeigt, daß der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt sind. Noch deutlicher können wir das durch die folgende Formel ausdrücken:

2.12 Mittelwerteigenschaft. *Ist f holomorph auf dem Gebiet G, $z_0 \in G$ und $D_r(z_0) \subset\subset G$, dann ist*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})\, dt.$$

[1] Eine Teilmenge D eines topologischen Raumes X heißt *diskret in X*, falls es zu jedem Punkt $x \in D$ eine Umgebung U gibt, so daß $U \cap D = \{x\}$ ist.

Zum Beweis braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchysche Integralformel einzusetzen.

2.13 Maximumprinzip. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.*

Beweis: Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein Maximum besitzt, dann gibt es ein $r > 0$, so daß $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für $|z - z_0| \le r$ ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt für $0 < \varrho < r$:

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}t})| \, dt \le |f(z_0)|.$$

Dann muß natürlich überall sogar das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} \big(|f(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}t})| - |f(z_0)| \big) \, dt = 0.$$

Da der Integrand überall ≤ 0 und $\varrho < r$ beliebig ist, folgt:

$$|f(z)| = |f(z_0)| \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Also ist $|f|$ auf $D_r(z_0)$ konstant, und nach dem Hilfssatz auch f selbst. Schließlich wenden wir den Identitätssatz an und erhalten, daß f auf ganz G konstant sein muß. ∎

Man kann das Maximumprinzip auch so formulieren:

Eine nicht-konstante holomorphe Funktion nimmt nirgendwo in ihrem Definitionsbereich ein lokales Maximum an (worunter stets ein Maximum von $|f|$ zu verstehen wäre).

2.14 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf G, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.*

Beweis: Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge muß $|f|$ irgendwo auf $\overline{G}$ sein Maximum annehmen. Wegen des Maximumprinzips kann das nicht in G liegen. Da bleibt nur der Rand. ∎

2.15 Minimumprinzip. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Minimum, so ist f konstant.*

Der triviale Beweis sei dem Leser überlassen.

2.16 Cauchysche Ungleichungen. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset\subset G$. Dann gelten für $0 < \delta \le r$ und $z \in \overline{D_{r-\delta}(z_0)}$ die Abschätzungen*

$$|f^{(k)}(z)| \le k! \cdot \frac{r}{\delta^{k+1}} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f(\zeta)|.$$

BEWEIS: Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Für $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ ist $|\zeta - z| \ge \delta$. Also ergibt die Standardabschätzung:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| &\le \frac{k!}{2\pi} \cdot L(\partial D_r(z_0)) \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| \\ &\le k! \cdot r \cdot \frac{1}{\delta^{k+1}} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f(\zeta)|. \end{aligned}$$

Das ist die gewünschte Ungleichung. ∎

2.17 Folgerung. *Unter den obigen Voraussetzungen gibt es für f eine auf $\overline{D_r(z_0)}$ konvergente Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n},$$

wobei $M(r) := \max_{\partial D_r(z_0)} |f(\zeta)|$ ist.

BEWEIS: Man setze $\delta = r$ und $z = z_0$ im obigen Satz. ∎

2.18 Satz von Liouville. *Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.*

BEWEIS: Sei $|f(z)| \le C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. f kann in eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Aus den Cauchy-Ungleichungen folgt für ein beliebiges $r > 0$ und alle $n \ge 1$:

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \le \frac{C}{r^n}.$$

Läßt man r gegen ∞ gehen, so erhält man: $a_n = 0$ für alle $n \ge 1$, also $f(z) = a_0$ konstant. ∎

Wer das Wundern noch nicht verlernt hat, sollte an dieser Stelle einmal innehalten und sich bewußt machen, wieviele erstaunliche Eigenschaften holomorpher Funktionen wir in kurzer Zeit hergeleitet haben!

Definition. Eine *ganze Funktion* ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus, vor allem aber die Polynome.

2.19 Fundamentalsatz der Algebra.

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \ge 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \ne 0$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)}$$

eine ganze Funktion, und für $z \ne 0$ ist

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(\frac{1}{z})},$$

mit dem Polynom $q(w) := a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n$. Da $q(0) = a_n \ne 0$ ist, ist

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion und nach Liouville konstant, im Gegensatz zur Annahme. ∎

2.20 Folgerung. *Sei $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \ge 1$. Dann gibt es eine Konstante c und komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, so daß*

$$p(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

Dabei ist $c = a_n$, und die z_i sind – bis auf die Reihenfolge – eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir führen Induktion nach n.

Im Falle $n = 1$ ist

$$p(z) = a_1 z + a_0 = a_1(z - z_1), \qquad \text{mit } z_1 := -\frac{a_0}{a_1}.$$

Ist $n \geq 2$, so besitzt p nach dem Fundamentalsatz eine Nullstelle z_1, und dann gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$, so daß gilt:

$$p(z) = (z - z_1) \cdot q(z).$$

Aber $q(z)$ zerfällt nach Induktionsvoraussetzung in Linearfaktoren. ∎

2.21 Konvergenzsatz von Weierstraß. *Ist (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G, die auf G kompakt gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f holomorph, und für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $(f_n^{(k)})$ auf G kompakt gegen $f^{(k)}$.*

BEWEIS: Die Grenzfunktion f ist auf jeden Fall stetig. Sei $\triangle$ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann konvergiert (f_n) auf $\partial\triangle$ gleichmäßig, und man kann den Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung anwenden:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\triangle} f_n(z)\,dz = 0.$$

Also ist f nach dem Satz von Morera holomorph.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Es genügt zu zeigen, daß es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ gibt, so daß $(f_n^{(k)})$ auf U gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ konvergiert. Dazu sei $r > 0$ so gewählt, daß $D_r(z_0) \subset\subset G$ ist, und dann $U := D_{r/2}(z_0)$ gesetzt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $z \in U$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &= |(f_n - f)^{(k)}(z)| \\ &\leq 2^{k+1} \cdot \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |(f_n - f)(\zeta)|. \end{aligned}$$

Da k fest ist, kann man n_0 so groß wählen, daß gilt:

$$\max_{\partial D_r(z_0)} |(f_n - f)(\zeta)| < \frac{r^k}{2^{k+1} \cdot k!} \cdot \varepsilon.$$

Aber dann ist $|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| < \varepsilon$ für $z \in U$ und $n \geq n_0$. ∎

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch einmal auf die harmonischen Funktionen eingehen.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat die *Mittelwerteigenschaft* (kurz MWE), falls gilt:

Zu jedem $z \in G$ gibt es ein $R > 0$ mit $D_R(0) \subset\subset G$, so daß für alle r mit $0 < r \leq R$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt.$$

2.22 Satz.

1. *Holomorphe Funktionen haben die MWE.*
2. *Mit f und g haben auch alle Linearkombinationen $c_1 f + c_2 g$ die MWE.*
3. *Mit f haben auch $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ und $\overline{f}$ die MWE.*
4. *Harmonische Funktionen haben die MWE.*

BEWEIS: 1) haben wir schon gezeigt.

2) folgt trivial aus der $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals.

3) Wegen $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\, dt = \overline{\int_a^b f(t)\, dt}$ erfüllt mit f auch $\overline{f}$ die MWE, und daher auch $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(f - \overline{f})$.

4) Jede harmonische Funktion ist Realteil einer holomorphen Funktion. ■

2.23 Satz. *Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig. Außerdem habe f auf G die MWE. Dann nimmt f sein globales Maximum und Minimum auf ∂G an.*

BEWEIS: Wir nehmen an, daß f sein globales Maximum in $a \in G$ annimmt. Dann ist $c := f(a) \geq f(z)$ für $z \in G$.

Sei $D_r(a) \subset\subset G$ und $0 < \varrho \leq r$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \varrho e^{\mathrm{i}t})\, dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a)\, dt \;=\; f(a). \end{aligned}$$

Es muß also überall das Gleichheitszeichen stehen. Das bedeutet:

$$0 = \int_0^{2\pi} (f(a) - f(a + \varrho e^{\mathrm{i}t}))\, dt.$$

Da der Integrand ≥ 0 ist, ist f auf $D_r(a)$ konstant. So folgt, daß $M := \{z \in G : f(z) = c\}$ offen (und nicht leer) ist. Außerdem ist M natürlich abgeschlossen, also $M = G$. Damit ist f konstant. Im Falle eines Minimums schließt man analog. ■

Definition. Sei $z \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$, sowie $z \neq Re^{\mathrm{i}\theta}$. Dann nennt man

$$P_R(z,\theta) := \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{\mathrm{i}\theta} - z|^2}$$

den *Poisson-Kern.*

Setzt man

$$F(z,\zeta) := \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \text{ (für } z \neq \zeta),$$

so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z,\zeta) &= \operatorname{Re}\left(\frac{(\zeta+z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}{|\zeta - z|^2}\right) \\ &= \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \end{aligned}$$

also $P_R(z,\theta) = \operatorname{Re} F(z, Re^{\mathrm{i}\theta})$.

2.24 Satz. *Sei $D = D_R(0)$ und f holomorph auf einer offenen Umgebung U von $\overline{D}$. Dann ist*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{\mathrm{i}\theta})P_R(z,\theta)\,d\theta, \text{ für alle } z \in D.$$

Beweis: Sei g eine beliebige holomorphe Funktion auf U. Dann ist

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{g(\zeta)\zeta\overline{\zeta}}{\zeta\overline{\zeta} - z\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(Re^{\mathrm{i}\theta})R^2}{R^2 - z\cdot Re^{-\mathrm{i}\theta}}\,d\theta\,. \end{aligned}$$

Sei nun $z \in D$ fest gewählt und speziell $g(w) = \dfrac{f(w)}{R^2 - w\overline{z}}$. Offensichtlich ist g holomorph auf einer Umgebung von $\overline{D}$. Dann folgt:

$$\frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} = g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(Re^{\mathrm{i}\theta})R^2}{R^2 - z\cdot Re^{-\mathrm{i}\theta}}\,d\theta\,,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\mathrm{i}\theta})R^2(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - z\cdot Re^{-\mathrm{i}\theta})(R^2 - \overline{z}\cdot Re^{\mathrm{i}\theta})}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\mathrm{i}\theta})(R^2 - |z|^2)}{|Re^{\mathrm{i}\theta} - z|^2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{\mathrm{i}\theta})P_R(z,\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

∎

2.25 Folgerung. *Für alle $R > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ist* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(z,\theta)\,d\theta = 1.$

BEWEIS: Setze $f(z) \equiv 1$ in die obige Formel ein. ∎

2.26 Satz. *Sei $R > 0$, $D = D_R(0)$ und $u : \partial D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $\widehat{u}$ auf $\overline{D}$, so daß gilt:*

1. *$\widehat{u}$ ist harmonisch in D.*
2. *$\widehat{u}|_{\partial D} = u$.*

BEWEIS: Für $z \in D$ sei $v(z) := \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\mathrm{i}\theta})P_R(z,\theta)\,d\theta$. Dann setzen wir

$$\widehat{u}(z) := \begin{cases} v(z) & \text{für } z \in D, \\ u(z) & \text{für } z \in \partial D. \end{cases}$$

1) Für $z \in D$ ist

$$\begin{aligned} \widehat{u}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\mathrm{i}\theta})P_R(z,\theta)\,d\theta \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\mathrm{i}\theta})F(z,Re^{\mathrm{i}\theta})\,d\theta\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D} u(\zeta)F(z,\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}\right) \end{aligned}$$

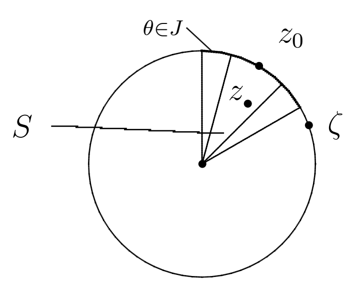
Als Realteil einer (in z) holomorphen Funktion ist $\widehat{u}$ harmonisch in D.

2) Es bleibt zu zeigen, daß $\widehat{u}$ stetig ist. Sei also $z_0 \in \partial D$ und $\varepsilon > 0$. Zur Vereinfachung setzen wir $R = 1$ und nehmen an, daß $z_0 = e^{\mathrm{i}\theta_0}$ mit $\theta_0 \neq 0, 2\pi$ ist. Wir schreiben dann auch P an Stelle von P_R.

Wir können nun ein $\delta_0 > 0$ finden, so daß gilt:

1. $J := [\theta_0 - 2\delta_0, \theta_0 + 2\delta_0] \subset [0, 2\pi]$.
2. $|u(\zeta) - u(z_0)| < \varepsilon/2$ für $\zeta = e^{\mathrm{i}\theta}$ und $\theta \in J$.

Nun sei $S := \{z \in D \,:\, z = re^{\mathrm{i}t} \text{ mit } \theta_0 - \delta_0 \le t \le \theta_0 + \delta_0\}$.



Es gibt ein $c > 0$, so daß $|\zeta - z| \geq c$ für $z \in S$ und $\zeta = e^{\mathrm{i}\theta}$ mit $\theta \in M := [0, 2\pi] \setminus J$. Für solche Punkte z und ζ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(z) - \widehat{u}(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(e^{\mathrm{i}\theta}) - u(z_0)) P(z, \theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_J (u(e^{\mathrm{i}\theta}) - u(z_0)) P(z, \theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_M (u(e^{\mathrm{i}\theta}) - u(z_0)) P(z, \theta)\, d\theta \\
&= I_1(z) + I_2(z).
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
|I_1(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_J |u(e^{\mathrm{i}\theta}) - u(z_0)| P(z, \theta)\, d\theta \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \theta)\, d\theta \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ist $k := \max_{\partial D} |u|$, so gilt:

$$\begin{aligned}
|I_2(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_M (|u(e^{\mathrm{i}\theta})| + |u(z_0)|) \cdot \frac{1 - |z|^2}{|e^{\mathrm{i}\theta} - z|^2}\, d\theta \\
&\leq \frac{2k}{2\pi c^2} \cdot \int_M (1 - |z|^2)\, d\theta \\
&\leq \frac{k}{\pi c^2} (1 - |z|^2) \cdot 2\pi \\
&= \frac{2k}{c^2} (1 - |z|^2).
\end{aligned}$$

Nun wähle man $\delta > 0$ so klein, daß für $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt: $z \in S$ und $1 - |z|^2 < \varepsilon \cdot c^2/(4k)$. Dann ist $|I_2(z)| < \varepsilon/2$ und $|\widehat{u}(z) - \widehat{u}(z_0)| < \varepsilon$. ∎

Bemerkung. Das *Dirichlet'sche Problem* für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ lautet:

Gibt es zu einer stetigen Funktion $u : \partial G \to \mathbb{R}$ eine auf $\overline{G}$ stetige und auf G harmonische Funktion $\widehat{u}$ mit $\widehat{u}|_{\partial G} = u$?

Wir haben gezeigt, daß das Dirichlet'sche Problem für eine Kreisscheibe immer lösbar ist.

2.27 Folgerung. *Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn sie die MWE hat.*

Beweis: Es ist nur noch eine Richtung zu zeigen. Die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ sei stetig und habe die MWE. Es sei $z_0 \in G$ und $D = D_R(z_0) \subset\subset G$. Dann gibt es eine stetige Funktion $\widehat{u}$ auf $\overline{D}$, die harmonisch auf D ist, so daß $\widehat{u}|_{\partial D} = f|_{\partial D}$ ist. Dann ist $g := \widehat{u} - f$ stetig auf $\overline{D}$ und erfüllt auf D die MWE. Außerdem ist $g|_{\partial D} = 0$. Da g sein Maximum und Minimum auf ∂D annehmen muß, ist $g(z) \equiv 0$ auf ganz D. Also ist $f = \widehat{u}$ harmonisch auf D. Da z_0 beliebig war, ist f überall harmonisch. ■

Wir fassen noch einmal einige Eigenschaften harmonischer Funktionen zusammen:

2.28 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt:*

1. *f ist beliebig oft differenzierbar (und sogar reell-analytisch).*
2. *Gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset G$ mit $f|_U = 0$, so ist $f = 0$.*
3. *Hat f in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.*
4. *Ist G beschränkt und f auf $\overline{G}$ noch stetig, so nimmt f Maximum und Minimum auf ∂G an.*

BEWEIS: 1) ist trivial, da eine harmonische Funktion lokal Realteil einer holomorphen Funktion ist.

2) Sei $N := \{z \in G \mid \exists\, V = V(z) \subset G \text{ mit } f|_V = 0\}$. Dann ist N sicherlich eine offene Teilmenge von G, und nach Voraussetzung ist $N \neq \varnothing$. Aber N ist auch abgeschlossen in G :

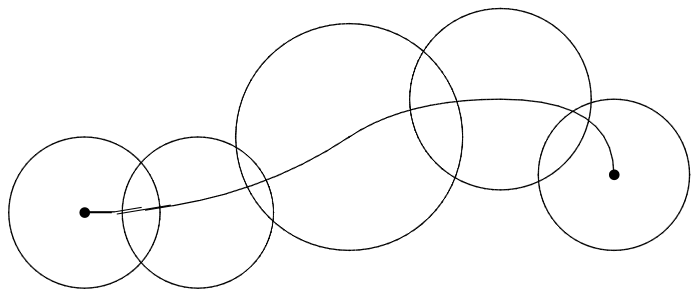
Ist nämlich $z_0 \in G$ ein Häufungspunkt von N, so gibt es eine Kreisscheibe $D \subset\subset G$ um z_0 und eine holomorphe Funktion F auf D, so daß $f|_D = \text{Re}(F)$ ist. Auf der (nicht leeren) offenen Menge $N \cap D$ verschwindet $\text{Re}(F)$ identisch. Aber dann ist F dort rein imaginär, also konstant, und daher ist $z_0 \in N$.

(3) und (4) folgen aus der MWE. ■

Warnung: Aus (2) folgt, daß die Nullstellenmenge einer nicht konstanten harmonischen Funktion f keine inneren Punkte besitzt. Sie braucht deshalb noch nicht diskret in G zu sein. So ist z.B. $f(z) := \text{Re}(z)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ harmonische nicht konstante Funktion, und $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ ist gerade die y-Achse.

§ 3 Die Umlaufszahl

3.1 Hilfssatz. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetiger Weg, so gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$, so daß $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ in D_i enthalten ist, für $i = 1, \ldots, n$.*



Man nennt $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ eine *Kreiskette längs* α.

Beweis: Sei

$$t^* := \sup\{t \in [a,b] \;:\; \exists \text{ Kreiskette längs } \alpha|_{[a,t]}\}.$$

Offensichtlich existiert t^* mit $a < t^* \leq b$.

Ist $t^* = b$, so ist alles bewiesen. Andernfalls setzen wir $z^* := \alpha(t^*)$ und wählen ein $r > 0$, so daß $D := D_r(z^*) \subset G$ ist. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $\alpha([t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon]) \subset D$ ist. Dann gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t^*-\varepsilon$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$ mit $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$. Dann ist $(D_1, \ldots, D_n, D)$ eine Kreiskette längs $\alpha|_{[a,s]}$, für $s := t^* + \varepsilon$. Wegen $s > t^*$ ist das ein Widerspruch. ■

3.2 Satz. *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ ein stetiger Weg. Dann gibt es eine stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, so daß gilt:*

$$\alpha(t) = |\alpha(t)| \cdot e^{\mathrm{i}\varphi(t)}, \text{ für alle } t \in [a,b].$$

Beweis:

Es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und eine dazu passende Kreiskette $(D_1, \ldots, D_n)$ längs α. Auf jeder der Kreisscheiben D_i gibt es eine Logarithmusfunktion

$$l_i(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\psi_i(z),$$

so daß $\varphi_i := \psi_i \circ \alpha : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Weil $\alpha(t) = \exp \circ l_i(\alpha(t)) = |\alpha(t)| \cdot e^{\mathrm{i}\varphi_i(t)}$ für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ist, gibt es Zahlen $k_i \in \mathbb{Z}$, so daß gilt:

$$\varphi_{i+1}(t_i) = \varphi_i(t_i) + 2\pi k_i, \text{ für } i = 1, \ldots, n-1.$$

Jetzt kann man definieren:

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{für } t_0 \leq t < t_1 \\ \varphi_i(t) - 2\pi(k_1 + \cdots + k_{i-1}) & \text{für } i \geq 2 \text{ und } t_{i-1} \leq t < t_i. \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ stetig. ■

Für einen Weg α bezeichnen wir den Anfangs- bzw. Endpunkt von α mit $z_A(\alpha)$ bzw. $z_E(\alpha)$.

Wir wollen jetzt mit Hilfe von φ das Integral $\displaystyle\int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta}$ berechnen. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen von oben und setzen $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(l_i(\alpha(t_i)) - l_i(\alpha(t_{i-1})) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\ln|\alpha(t_i)| - \ln|\alpha(t_{i-1})| + \mathsf{i}\varphi_i(t_i) - \mathsf{i}\varphi_i(t_{i-1}) \Big) \\
&= \ln|z_E(\alpha)| - \ln|z_A(\alpha)| + \Big(\varphi_n(t_n) - \varphi_1(t_0) - 2\pi(k_1 + \cdots + k_{n-1}) \Big) \\
&= \ln|z_E(\alpha)| - \ln|z_A(\alpha)| + \mathsf{i}(\varphi(b) - \varphi(a)).
\end{aligned}$$

Dabei mißt die Größe $\varphi(b) - \varphi(a)$, welchen Winkel ein Punkt – vom Nullpunkt aus gesehen – insgesamt zurücklegt, wenn der Weg α durchlaufen wird.

Wenn α geschlossen ist, so ist $z_E(\alpha) = z_A(\alpha)$. Außerdem stimmen dann $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ beide bis auf die Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π mit $\arg(z_A(\alpha))$ überein. Es gibt also eine Zahl $n(\alpha)$, so daß $\varphi(b) - \varphi(a) = n(\alpha) \cdot 2\pi$ ist. Daraus folgt:

$$n(\alpha) = \frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta}\ .$$

Definition. Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $z \notin |\alpha|$. Dann heißt

$$n(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi\mathsf{i}} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die *Umlaufszahl* von α bezüglich z.

Wie im Falle $z = 0$ folgt: Ist α geschlossen, so ist $n(\alpha, z)$ eine ganze Zahl.

Erinnern wir uns nun an den Begriff der Kette von Wegen: Eine 1-Kette in einem Gebiet G ist eine formale Linearkombination

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i$$

von Wegen α_i in G mit ganzzahligen Koeffizienten n_i.

Analog versteht man unter einer *0-Kette* in G eine formale Linearkombination

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{N} n_i z_i$$

von Punkten $z_i \in G$.

Ist nun $K_1(G)$ die Gruppe der 1-Ketten und $K_0(G)$ die Gruppe der 0-Ketten, so definiert man einen Homomorphismus

$$\partial : K_1(G) \to K_0(G)$$

durch

$$\partial(\sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i) := \sum_{i=1}^{N} n_i(z_E(\alpha_i) - z_A(\alpha_i)).$$

Man spricht auch vom *Rand-Homomorphismus.*

Definition. Eine Kette Γ in G heißt ein *Zyklus*, falls $\partial\Gamma = 0$ ist.

3.3 Satz. *Ein Element $\Gamma \in K_1(G)$ ist genau dann ein Zyklus, wenn jeder Punkt von G gleich oft als Anfangs- und als Endpunkt irgendwelcher Wege von Γ auftritt. Dabei sind die Vielfachheiten zu berücksichtigen.*

BEWEIS: Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i$,

$$\{z_1, \dots, z_M\} = \{z_A(\alpha_i) \mid i = 1, \dots, N\} \cup \{z_E(\alpha_i) \mid i = 1, \dots, N\}.$$

Dann ist

$$\partial\Gamma = \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{z_E(\alpha_i)=z_k} n_i - \sum_{z_A(\alpha_j)=z_k} n_j \right) z_k.$$

Also gilt:

$$\partial\Gamma = 0 \iff \forall\, k : \sum_{z_E(\alpha_i)=z_k} n_i = \sum_{z_A(\alpha_j)=z_k} n_j.$$

Das ist die Behauptung. ∎

Beispiele.

1. Ist α ein geschlossener Weg, so ist $n \cdot \alpha$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Zyklus.
2. Der konstante Weg ist ein Zyklus.
3. Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ irgendwelche Wege mit $z_E(\alpha_i) = z_A(\alpha_{i+1})$ und $z_E(\alpha_N) = z_A(\alpha_1)$, so ist $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ ein Zyklus.
4. Sind $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ Zyklen und $a_1, \dots, a_n$ ganze Zahlen, so ist auch $a_1\Gamma_1 + \cdots + a_n\Gamma_n$ ein Zyklus.

3.4 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. f besitzt genau dann auf G eine Stammfunktion, wenn gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \textit{für jeden Zyklus } \Gamma \textit{ in } G.$$

Beweis: 1) Sei $f = F'$ auf G und $\Gamma = \sum_{i=1}^N n_i \alpha_i$ ein Zyklus in G. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= \sum_{i=1}^N n_i \int_{\alpha_i} F'(z)\,dz \\
&= \sum_{i=1}^N n_i [F(z_E(\alpha_i)) - F(z_A(\alpha_i))] \\
&= \sum_{z \in G} F(z) \cdot \left(\sum_{z_E(\alpha_i)=z} n_i - \sum_{z_A(\alpha_j)=z} n_j \right) \; = \; 0.
\end{aligned}$$

2) Ist umgekehrt das Kriterium erfüllt, so ist $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg α, und f besitzt eine Stammfunktion. ∎

Definition. Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^N n_i \alpha_i$ eine Kette in $\mathbb{C}$ und $z \notin |\Gamma|$. Dann heißt

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{i=1}^N n_i \int_{\alpha_i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die *Umlaufszahl* von Γ bezüglich z.

3.5 Satz.

1. *$n(\Gamma, z)$ hängt stetig von z ab.*
2. *$n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z)$.*
3. *$n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$.*

Der Beweis ist trivial.

3.6 Satz. *Ist Γ ein Zyklus und $z_0 \notin |\Gamma|$, so ist $n(\Gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis: Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^N n_i \alpha_i$. Dann gilt für alle $z \in G$:

$$\sum_{z_E(\alpha_i)=z} n_i = \sum_{z_A(\alpha_j)=z} n_j.$$

O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Dann folgt:

$$n(\Gamma, z_0) = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot n(\alpha_i, 0).$$

Ist α_i auf dem Intervall $[a_i, b_i]$ definiert, so gibt es eine stetige Funktion

$$\varphi_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R},$$

so daß gilt:

$$\alpha_i(t) = |\alpha_i(t)| \cdot e^{\mathrm{i}\varphi_i(t)}$$

und

$$n(\alpha_i, 0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\ln|z_E(\alpha_i)| - \ln|z_A(\alpha_i)|) + \frac{1}{2\pi}(\varphi_i(b_i) - \varphi_i(a_i)).$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{i=1}^{N} n_i(\ln|z_E(\alpha_i)| - \ln|z_A(\alpha_i)|) &= \\ = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{z\in|\Gamma|} \ln|z| \cdot \left(\sum_{z_E(\alpha_i)=z} n_i - \sum_{z_A(\alpha_j)=z} n_j \right) &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt ganze Zahlen k_i, so daß $\varphi_i(b_i) - \varphi_i(a_i) = \arg(z_E(\alpha_i)) - \arg(z_A(\alpha_i)) + 2\pi k_i$ ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} n_i \frac{1}{2\pi}(\varphi_i(b_i) - \varphi_i(a_i)) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} n_i(\arg(z_E(\alpha_i)) - \arg(z_A(\alpha_i)) + 2\pi k_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} n_i k_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{z\in|\alpha|} \arg(z) \cdot \left(\sum_{z_E(\alpha_i)=z} n_i - \sum_{z_A(\alpha_j)=z} n_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} n_i k_i. \end{aligned}$$

Also ist

$$n(\Gamma, z_0) = \sum_{i=1}^{N} n_i k_i \in \mathbb{Z}.$$

■

Beispiel.

Durch $\gamma_k(t) := z_0 + re^{\mathrm{i}kt}$, $t \in [0, 2\pi]$, wird der Kreis um z_0 mit Radius r parametrisiert, und zwar so, daß er k-mal durchlaufen wird. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{\mathrm{i}kt}} r\cdot \mathrm{i}k\cdot e^{\mathrm{i}kt}\,dt = \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = k.$$

Das Integral mißt tatsächlich, wie oft der Punkt z_0 von γ umlaufen wird.

Wir wollen jetzt Umlaufszahlen berechnen. Dazu sind weitere geometrische Betrachtungen erforderlich.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$. Dann heißt

$$C_B(z_0) := \{z \in B \mid \exists \text{ stetiger Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ in } B.\}$$

die *Zusammenhangskomponente* von z_0 in B.

3.7 Satz.

1. *$C_B(z_0)$ ist das größte Teilgebiet von B, das z_0 enthält.*
2. *Je zwei Zusammenhangskomponenten in B sind entweder gleich oder disjunkt.*
3. *B ist (höchstens abzählbare) Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.*
4. *Ist $Z \subset B$ ein Gebiet, so liegt Z in einer Zusammenhangskomponente.*

BEWEIS: 1) Sei $C := C_B(z_0)$. Offensichtlich lassen sich je zwei Punkte von C innerhalb von C durch einen stetigen Weg in C miteinander verbinden. Wir müssen noch zeigen, daß C offen ist. Dazu sei $z_1 \in C$. Es gibt dann eine Kreisscheibe D mit $z_1 \in D \subset B$, und jeder Punkt $z \in D$ kann innerhalb von D durch eine Strecke mit z_1 verbunden werden. Daher liegt ganz D in C. Also ist C ein Gebiet.

Ist andererseits $G \subset B$ ein Gebiet mit $z_0 \in G$, so kann jeder Punkt $z \in G$ innerhalb G (und damit auch innerhalb B) durch einen stetigen Weg mit z_0 verbunden werden. Also liegt G in C.

2) Sei $C_1 = C_B(z_1)$ und $C_2 = C_B(z_2)$. Gibt es einen Punkt $z_0 \in C_1 \cap C_2$, so können Punkte $z' \in C_1$ und $z'' \in C_2$ durch einen über z_0 führenden Weg in B miteinander verbunden werden. Also ist $C_1 \subset C_2$ und $C_2 \subset C_1$.

3) Ist $z \in B$, so liegt z in $C_B(z)$. Wegen (2) wird B in paarweise disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegt. Man spricht dann auch von den Zusammenhangskomponenten von B. In jeder solchen Komponente kann man einen Punkt mit rationalen Koordinaten auswählen. Aber dann kann es auch nur höchstens abzählbar viele Komponenten geben.

4) Sei nun $Z \subset B$ ein Gebiet. Ist Z leer, so ist nichts zu zeigen. Also können wir einen Punkt $z_0 \in Z$ auswählen. Dann ist $Z_0 := Z \cap C_B(z_0)$ eine offene und nicht leere Teilmenge von Z. Sind $C_1, C_2, \ldots$ die Zusammenhangskomponenten von B und ist $C_B(z_0) = C_1$, so ist

$$C' := \bigcup_{i=2}^{\infty} C_i$$

eine offene Teilmenge von B und $Z' := Z \cap C'$ offen in Z. Da $Z = Z_0 \cup Z'$ ist, muß $Z' = \varnothing$, also $Z_0 = Z$ sein. Das bedeutet, daß Z in $C_B(z_0)$ enthalten ist. ∎

3.8 Satz. *Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann enthält $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Die Umlaufszahl $n(\Gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente konstant und verschwindet auf der unbeschränkten Komponente.*

<u>Beweis:</u> Die Spur $|\Gamma|$ ist kompakt und daher in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_R(0)}$ enthalten. Die zusammenhängende Menge $U := \mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ liegt in einer (unbeschränkten) Komponente, jede andere Komponente muß in $D_R(0)$ enthalten, also beschränkt sein.

Da $n(\Gamma, z)$ stetig ist, aber nur ganzzahlige Werte annimmt, muß die Umlaufszahl auf jeder Zusammenhangskomponente konstant sein.

Die Umlaufszahl auf der unbeschränkten Komponente berechnen wir wie folgt: Für $|a| > R + 1$ ist $f(z) := \dfrac{1}{z - a}$ holomorph auf der sternförmigen Menge $D_{R+1}(0)$, besitzt dort also auch eine Stammfunktion. Daher ist

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

und sogar $n(\Gamma, z) = 0$ auf der gesamten unbeschränkten Komponente. ∎

Wir werden nun ein Verfahren entwickeln, wie man zu einem geschlossenen Integrationsweg α sämtliche Umlaufszahlen $n(\alpha, z)$ bestimmt. Ohne Beweis benutzen wir dabei die folgende geometrische Aussage:

3.9 Lemma. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und injektiv, $\alpha(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in (a, b)$ und α in t_0 sogar differenzierbar. Außerdem sei $\alpha'(t_0)$ reell und positiv. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle δ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$ gilt:*

1. *$D_\delta(0) \setminus |\alpha|$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.*

2. *Jeder Punkt aus $D_\delta(0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt von beiden Komponenten.*

3. *Ist ε klein genug, so ist*

$$(\mathbb{R}\mathrm{i}\alpha'(t_0)) \cap D_\varepsilon(0) \cap |\alpha| = \{0\}.$$

Ist $z_0 = \alpha(t_0)$ und $\alpha'(t_0)$ beliebig, so kann man durch eine Drehung des Koordinatensystems erreichen, daß die Bedingungen des Lemmas erfüllt sind. Man kann dann sogar erreichen, daß $\alpha'(0) = 1$ ist.

Sei $C_+(z_0, \varepsilon)$ diejenige Zusammenhangskomponente von $D_\varepsilon(z_0) \setminus |\alpha|$, in der die Punkte $z_0 + s\mathrm{i}\alpha'(t_0)$ mit $s > 0$ liegen, und $C_-(z_0, \varepsilon)$ die andere Komponente. Wir sagen, die Punkte von C_+ liegen „links" von α, und die Punkte von C_- liegen „rechts" von α. Auf diese Weise können wir zumindest in regulären Punkten von α zwischen der rechten und der linken Seite von α unterscheiden.

3.10 Satz. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer* ***geschlossener*** *Weg, $t_0 \in (a, b)$, $z_0 := \alpha(t_0)$ und α in t_0 sogar differenzierbar, mit $\alpha'(t_0) \neq 0$. Es gebe eine Umgebung $U = U(z_0)$, so daß $\alpha^{-1}(z)$ für jedes $z \in |\alpha| \cap U$ nur ein einziges Element enthält.*

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt:

1. *$D_\varepsilon(z_0) \setminus |\alpha|$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten C_+ und C_-.*
2. *Jeder Punkt aus $D_\varepsilon(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt von C_+ und C_-.*
3. *C_+ liegt links von α und C_- liegt rechts von α.*
4. *Ist $z_1 \in C_-$ und $z_2 \in C_+$, so ist $n(\alpha, z_2) = n(\alpha, z_1) + 1$.*

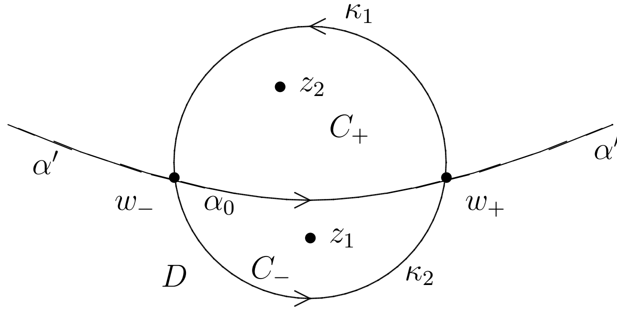
Beweis: Nach Voraussetzung ist α in der Nähe von t_0 injektiv. Wir können daher $\varepsilon > 0$ so wählen, daß die Eigenschaften (1), (2) und (3) erfüllt sind. Sei $D := D_\varepsilon(z_0)$. Weiter seien t_- und t_+ so gewählt, daß gilt:

1. $t_- < t_0 < t_+$.
2. $w_- := \alpha(t_-)$ und $w_+ := \alpha(t_+)$ liegen auf ∂D.
3. $\alpha(t) \in D$ für $t_- < t < t_+$.

Da $w_- \neq w_+$ ist, wird der Kreis ∂D durch diese Punkte in zwei Kreisbögen κ_1 und κ_2 (links und rechts von α) unterteilt, so daß $\partial D = \kappa_1 + \kappa_2$ ist. Schließlich sei noch

$$\alpha' := \alpha|_{[a,t_-]}, \quad \alpha_0 := \alpha|_{[t_-,t_+]} \quad \text{und} \quad \alpha'' := \alpha|_{[t_+,b]}.$$

Dann ist $\partial C_+ = \alpha_0 + \kappa_1$ und $\partial C_- = \kappa_2 - \alpha_0$.



Sei $w_0 := \alpha(a) = \alpha(b)$, $\Gamma := \alpha' - \kappa_1 + \alpha''$. Es ist $w_- = z_E(\kappa_1) = z_A(\kappa_2)$ und $w_+ = z_E(\kappa_2) = z_A(\kappa_1)$, und daher gilt:

$$\partial\Gamma = (w_- - w_0) - (w_- - w_+) + (w_0 - w_+) = 0,$$

d.h. Γ ist ein Zyklus. Da $|\alpha| \cap \overline{D} = |\alpha_0|$ und $|\alpha_0| \cap |\alpha' + \alpha''| = \{w_-, w_+\}$ ist, ist $|\Gamma| \cap D = \varnothing$. Also liegt D ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$, und es ist $n(\Gamma, z_1) = n(\Gamma, z_2)$.

Weiter gilt:

1. $n(\kappa_1 + \kappa_2, z) = n(\partial D, z) = 1$ für jedes $z \in D$.
2. Es ist

$$n(\alpha_0 + \kappa_1, z_1) = n(\partial C_+, z_1) = 0 \quad \text{und} \quad n(\kappa_2 - \alpha_0, z_2) = n(\partial C_-, z_2) = 0.$$

Alles zusammen ergibt:

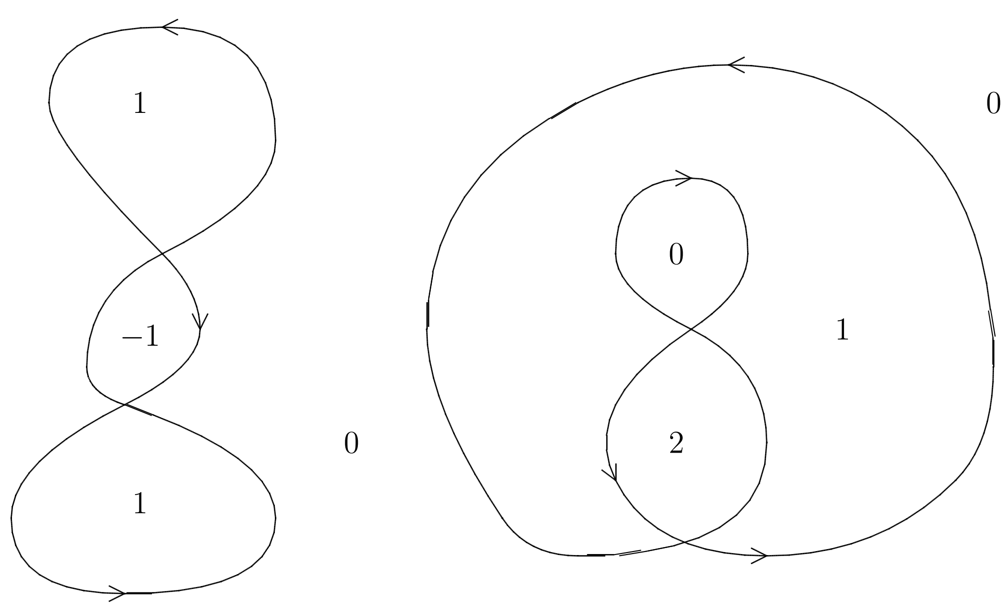
$$\begin{aligned} n(\alpha, z_2) - n(\alpha, z_1) &= n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_2) - n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_1) \\ &= n(\Gamma, z_2) + n(\kappa_1 + \alpha_0, z_2) - n(\Gamma, z_1) - n(\kappa_1 + \alpha_0, z_1) \\ &= n(\kappa_1 + \kappa_2, z_2) + n(\alpha_0 - \kappa_2, z_2) \;=\; 1. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Die Moral von der Geschichte ist nun:

1. „Weit draußen“ ist auf jeden Fall $n(\alpha, z) = 0$.
2. Überquert man α (in einem glatten Punkt) so, daß α dabei von „links“ kommt, dann erhöht sich die Umlaufszahl um 1. Kommt α von rechts, so erniedrigt sie sich um 1.

Beispiel.



Eine Folgerung ist:

3.11 Jordanscher Kurvensatz. *Sei α ein einfach geschlossener Integrationsweg. Dann gilt:*

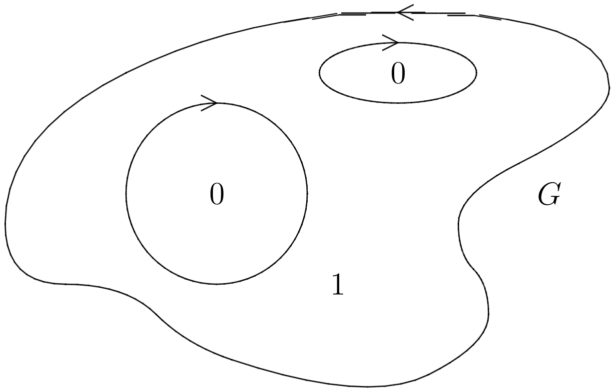
1. *$\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.*
2. *Jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten.*
3. *Es ist $|n(\alpha, z)| = 1$ auf der beschränkten Komponente.*

Beweis: Sei $\mathbb{C} \setminus |\alpha| = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten und dabei C_0 die unbeschränkte Komponente.

Weiter sei α auf $[a, b]$ definiert und $t \in [a, b]$ ein beliebiger Parameterwert. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(\alpha(t))$, so daß $U \setminus |\alpha|$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Die liegen wiederum in gewissen Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$. Es sei $\{p(t), q(t)\}$ die Menge der Nummern der beiden Komponenten, sowie $\Phi_-(t) := \min(p(t), q(t))$ und $\Phi_+(t) := \max(p(t), q(t))$. Das ergibt zwei Funktionen $\Phi_-, \Phi_+ : [a, b] \to \mathbb{Z}$, die auf Grund ihrer Konstruktion lokal-konstant sind. Sie müssen dann natürlich sogar konstant sein.

Jede der Komponenten C_i hat Randpunkte, die dann auf $|\alpha|$ liegen müssen. Sei etwa $\alpha(t_0) \in \partial C_0$. Dann ist $p(t_0) = 0$ oder $q(t_0) = 0$, also $\Phi_-(t) \equiv 0$. Sucht man sich nun ein t_1, in dem α sogar differenzierbar ist, so ändert sich dort die Umlaufszahl beim Wechsel auf die andere Seite von α um 1. Also ist $\Phi_+(t_1) \neq 0$. Da Φ_+ konstant ist, gibt es neben C_0 noch genau eine weitere (beschränkte) Komponente in $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$, und auf der muß $n(\alpha, z) = \pm 1$ sein. ∎

In Wirklichkeit handelt der Jordansche Kurvensatz von stetigen Kurven, und dann ist er erheblich schwieriger zu beweisen. Für unsere Zwecke reicht aber die vorliegende Version. Wir nennen einen einfach geschlossenen Integrationsweg eine *Jordankurve*. Und die Jordankurve heißt *positiv orientiert*, wenn die Umlaufszahl auf der beschränkten Komponente = 1 ist. In dem Fall berandet die Kurve ein beschränktes Gebiet, das immer links von der Kurve liegt.



Unter einem *positiv berandeten* Gebiet verstehen wir ein beschränktes Gebiet G, das von endlich vielen Jordankurven berandet wird und das immer links von diesen Kurven liegt. Es ist dann $n(\partial G, z) = 1$ für jedes $z \in G$.

Ist G ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und α eine geschlossene Kurve in G, so ist $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$. Das stimmt nicht mehr, wenn das Gebiet G „Löcher" hat und α um ein solches Loch herumläuft, etwa im Falle $G = \mathbb{C}^*$ und $f(z) = 1/z$. Wir können diese Probleme vielleicht vermeiden, wenn wir dafür sorgen, daß $n(\alpha, z) = 0$ ist, falls z in einem solchen Loch, also nicht in G liegt. Das führt zu folgendem Begriff:

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen. Ein Zyklus Γ in B heißt *nullhomolog* in B, falls $n(\Gamma, z) = 0$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus B$ ist.

Zwei Zyklen Γ_1, Γ_2 in B heißen *homolog* in B, falls ihre Differenz nullhomolog in B ist.

Nun kann man den Cauchyschen Integralsatz in folgender Weise verallgemeinern:

3.12 Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein nullhomologer Zyklus in B. Dann gilt:*

1. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$
2. *Ist $z \in B \setminus |\Gamma|$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so ist*

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

BEWEIS: Der hier vorgestellte Beweis wurde von J.D.Dixon 1971 veröffentlicht.

1) Auf $B \times B$ wird folgende Funktion definiert:

$$g(w, z) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Wir zeigen, daß g stetig und bei festem w holomorph in z ist.

Die Stetigkeit von g in Punkten (w, z) mit $w \neq z$ ist klar. Also untersuchen wir Differenzen der Gestalt $g(w, z) - g(z_0, z_0)$.

a) Ist $w = z$, so erhält man

$$g(w, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0),$$

und das strebt für $z \to z_0$ gegen Null.

b) Ist $w \neq z$, so ist

$$g(w, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0) = \frac{1}{w - z} \int_z^w [f'(\zeta) - f'(z_0)]\,d\zeta.$$

In der Nähe von z_0 kann man das Integral über die Verbindungsstrecke von z und w erstrecken und erhält:

$$|g(w,z) - g(z_0,z_0)| \le \sup_{[0,1]} |f'(z + t(w-z)) - f'(z_0)|.$$

Wegen der Stetigkeit von f' strebt auch dieser Ausdruck für $(w,z) \to (z_0,z_0)$ gegen Null.

Bei festem w ist $g(w,z)$ stetig und für $z \ne w$ holomorph, also überhaupt holomorph.

2) Wir wollen zunächst die Formel (2) im Falle $k = 0$ beweisen.

Sei $z \in B \setminus |\Gamma|$. Es ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Um also die verallgemeinerte Integralformel für $k = 0$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $\displaystyle\int_\Gamma g(\zeta,z)\, d\zeta = 0$ ist. Wir definieren daher $h_0 : B \to \mathbb{C}$ durch

$$h_0(z) := \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Offensichtlich ist h_0 stetig, und wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Morera, daß h_0 sogar holomorph ist:

Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in B. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\, dz = \int_{\partial\Delta} \int_\Gamma g(\zeta,z)\, d\zeta\, dz = \int_\Gamma \left[\int_{\partial\Delta} g(\zeta,z)\, dz \right] d\zeta.$$

Die Vertauschbarkeit der Integrale ist gegeben, weil g stetig auf $B \times B$ ist. Aber weil $g(\zeta, z)$ bei festem ζ holomorph in z ist, verschwindet das innere Integral auf der rechten Seite und damit auch das Gesamtintegral auf der linken Seite. h_0 ist tatsächlich holomorph auf B.

3) Der entscheidende Trick des Beweises kommt jetzt:

Sei $B_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma| \mid n(\Gamma, z) = 0\}$. Als Vereinigung von Zusammenhangskomponenten ist B_0 offen. Da Γ nullhomolog in B ist, liegt $\mathbb{C} \setminus B$ in B_0, und daher ist $B \cup B_0 = \mathbb{C}$. Auf $B \cap B_0$ gilt jedoch:

$$h_0(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =: h_1(z),$$

und h_1 ist auf $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ und damit insbesondere auf B_0 holomorph.

h_0 läßt sich also mit Hilfe von h_1 zu einer ganzen Funktion h fortsetzen. Die Standardabschätzung zeigt sofort, daß $h_1(z)$ für $z \to \infty$ gegen Null strebt. Damit ist h beschränkt und nach Liouville konstant. Aber diese Konstante muß sogar $= 0$ sein.

4) Wir haben die Integralformel für den Fall $k = 0$ bewiesen:

$$n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Die Fälle $k \geq 1$ ergeben sich hieraus durch fortgesetztes Differenzieren. Den verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatz erhält man, indem man die Formel auf die Funktion $F(z) := f(z)(z - z_0)$ anwendet:

$$0 = n(\Gamma, z_0) \cdot F(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma f(z)\, dz.$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Nun liegt es nahe, die folgenden Gebiete besonders auszuzeichnen:

Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls jeder Zyklus in G nullhomolog in G ist.

3.13 Folgerung. *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion f auf G und jeden Zyklus Γ in G.

Sternförmige Gebiete sind einfach zusammenhängend. Aber wir werden bald sehen, daß es auch noch andere Beispiele gibt.

3.14 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *G ist einfach zusammenhängend.*
2. *$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$ für jeden Zyklus Γ und jede holomorphe Funktion f in G.*
3. *Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion.*
4. *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen, so gibt es eine holomorphe Funktion q auf G mit $\exp \circ q = f$.*

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Das haben wir oben gerade gezeigt.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Das ist ein Satz, den wir schon bewiesen haben.

(3) $\Longrightarrow$ (4) : Nach Voraussetzung ist $g := \dfrac{f'}{f}$ holomorph auf G und besitzt daher eine Stammfunktion F. Nun sei $h := f \cdot e^{-F}$. Dann ist $h' = f' \cdot e^{-F} - f \cdot \dfrac{f'}{f} \cdot e^{-F} = 0$, also h konstant $= c$. Daraus folgt:

$$f = c \cdot e^F, \text{ mit } c \neq 0, \text{ also } c = e^\gamma.$$

Nun kann man $q := \gamma + F$ setzen.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : Sei Γ ein Zyklus in G und $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann hat $f(z) := z - a$ keine Nullstelle in G und es gibt eine holomorphe Funktion q mit $f = \exp \circ q$. Nun folgt:

$$f'(z) = q'(z) \cdot f(z), \text{ also } q'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}.$$

Daher ist

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{1}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma q'(z)\, dz = 0.$$

Letzteres gilt, weil q' holomorph ist und eine Stammfunktion besitzt. ∎

3.15 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}^*$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gibt es auf G eine Logarithmusfunktion.*

Beweis: $f(z) = z$ ist auf G holomorph und ohne Nullstellen. Also gibt es eine holomorphe Funktion l mit $\exp(l(z)) = z$. ∎

Wir haben noch immer nichts über die Existenz von einfach zusammenhängenden Gebieten herausgefunden, die nicht sternförmig sind. Das soll sich nun ändern. Zunächst zeigen wir:

3.16 Satz. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset B$ kompakt. Dann gibt es einen Zyklus Γ in $B \setminus K$, so daß gilt:*

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \textit{für } z \in K, \\ 0 & \textit{für } z \in \mathbb{C} \setminus B. \end{cases}$$

Beweis: Da K kompakt ist, gibt es endlich viele achsenparallele offene Quadrate $P_1, \ldots, P_N \subset\subset B$, die K überdecken. Dann sei

$$\widetilde{K} := \bigcup_{i=1}^N \overline{P_i}.$$

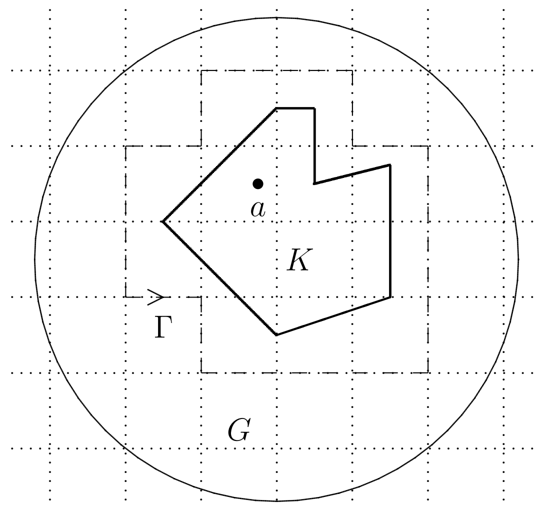
Auch $\widetilde{K}$ ist kompakt, und es gilt: $K \subset \widetilde{K} \subset B$. Es genügt, einen in B nullhomologen Zyklus Γ in $B \setminus \widetilde{K}$ zu konstruieren, so daß $n(\Gamma, z) = 1$ für $z \in \widetilde{K}$ ist. Aber $\widetilde{K}$ besteht schlimmstenfalls aus endlich vielen Wegkomponenten. Wir können daher o.B.d.A. gleich annehmen, daß K selbst nur aus endlich vielen Wegkomponenten besteht.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß K sogar wegzusammenhängend ist. Es gibt ein $\delta > 0$, so daß $2\delta < \operatorname{dist}(K, \partial B)$ ist. Wir wählen nun einen Punkt $a \in K$ beliebig, aber fest, und einen Punkt a_0, so daß gilt:

$$\operatorname{Re}(a_0) < \operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(a_0) + \delta \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(a_0) < \operatorname{Im}(a) < \operatorname{Im}(a_0) + \delta.$$

Weiter sei $a_{n,m} := a_0 + n\delta + \mathrm{i}m\delta$, für $n, m \in \mathbb{Z}$. So entsteht ein quadratisches Gitter der Maschenbreite δ. $Q_{(n,m)}$ sei das (abgeschlossene) Quadrat, das $a_{n,m}$ als linke untere Ecke hat. $\partial Q_{(n,m)}$ sei stets positiv orientiert.

$$\exists\, J \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ endlich, s.d. gilt: } Q_\iota \cap K \neq \varnothing \iff \iota \in J.$$



Wir setzen $\Gamma := \sum_{\iota \in J} \partial Q_\iota$. Das ist ein Zyklus, und da es genau ein $\iota_0 \in J$ mit $a \in Q_{\iota_0}$ gibt, folgt:

$$n(\Gamma, a) = \sum_{\iota \in J} n(\partial Q_\iota, a) = n(\partial Q_{\iota_0}, a) = 1.$$

Schreiben wir $\partial Q_\iota = \sum_{\nu=1}^{4} \sigma_{\iota,\nu}$, wobei die $\sigma_{\iota,\nu}$ die 4 Kanten darstellen, so gilt:

Ist $|\sigma_{\iota,\nu}| \cap K \neq \varnothing$, so wird K von zwei nebeneinander liegenden Quadraten getroffen, die $\sigma_{\iota,\nu}$ als gemeinsame Kante haben. Aber weil die Kante dann mit zwei entgegengesetzten Orientierungen versehen ist, trägt sie nichts zur Spur von Γ bei. Also ist $|\Gamma| \cap K = \varnothing$.

Ist $Q_\iota \cap K \neq \varnothing$, so ist

$$\sup\{|z - w| \,:\, z \in \partial Q_\iota,\, w \in K\} \leq \sqrt{2}\delta,$$

d.h. für $z \in |\Gamma|$ ist $\operatorname{dist}(z, K) < 2\delta < \operatorname{dist}(\partial B, K)$. Damit liegt $|\Gamma|$ in B.

Jetzt nutzen wir aus, daß K zusammenhängend ist. Dann muß $n(\Gamma, z)$ nämlich auf K konstant $= 1$ sein. Und für $z \in \mathbb{C} \setminus B$ und $\iota \in J$ ist $z \notin Q_\iota$, also $n(\partial Q_\iota, z) = 0$.

Jetzt müssen wir noch den Fall untersuchen, daß K aus mehreren Komponenten besteht: $K = K_1 \cup \ldots \cup K_N$. Dann wählen wir in jeder Komponente K_i einen Punkt a_i und die Zahl δ so klein, daß jeder der Punkte a_i im Innern eines der Quadrate liegt. Der Beweis läßt sich dann ganz analog durchführen. ∎

Jetzt folgt:

3.17 Satz. *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn gilt: Ist $\mathbb{C} \setminus G = A' \cup A''$ eine Zerlegung in zwei disjunkte nicht-leere in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Teilmengen, so kann keine der beiden kompakt sein.*

Beweis: 1) Sei G einfach zusammenhängend, $\mathbb{C} \setminus G = A' \cup A''$ eine Zerlegung in zwei disjunkte nicht-leere abgeschlossene Teilmengen. Wir nehmen an, A' sei kompakt.

Die Menge $B := G \cup A'$ ist offen, denn $\mathbb{C} \setminus B = A''$ ist abgeschlossen. Also gibt es einen Zyklus Γ in $B \setminus A' = G$ mit

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in A' \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus B. \end{cases}$$

Aber da G einfach zusammenhängend ist, muß jeder Zyklus in G nullhomolog in G sein, also insbesondere $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \in A' \subset \mathbb{C} \setminus G$. Das ist ein Widerspruch.

2) Ist G hingegen nicht einfach zusammenhängend, so gibt es einen Zyklus Γ in G, der dort nicht nullhomolog ist. Sei nun

$$\begin{aligned} A' &:= \{z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) \neq 0\} \\ \text{und} \quad A'' &:= \{z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) = 0\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $A' \neq \varnothing$, und da nur auf den beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ die Umlaufszahl $\neq 0$ sein kann, ist A' beschränkt.

Sei nun $A \in \{A', A''\}$. Eine Folge von Punkten $a_\nu \in A$, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, muß auch schon in der abgeschlossenen Menge $\mathbb{C} \setminus G$ gegen ein a_0 konvergieren. Dann kann aber a_0 nicht auf der Spur von Γ liegen, und es gibt eine offene Umgebung $U = U(a_0)$, so daß $n(\Gamma, z)$ auf U konstant ist. Liegen also die a_ν alle in A' (bzw. alle in A''), so muß auch a_0 in A' (bzw. in A'') liegen. Also sind A' und A'' beide abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Und oben haben wir gesehen, daß A' dann sogar kompakt sein muß.

Soll dieser Fall nicht eintreten, so muß G einfach zusammenhängend sein. ■

Nun sind wir endlich in der Lage, neue Beispiele von einfach zusammenhängenden Gebieten anzugeben.

Beispiel.

Sei $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\alpha(t) := t \cdot e^{\mathrm{i}t}$. Dann ist $|\alpha|$ eine bei Null startende und nach ∞ strebene Spirale, die offensichtlich abgeschlossen, zusammenhängend und nicht kompakt ist. Also ist $G := \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ ein in $\mathbb{C}^*$ enthaltenes einfach zusammenhängendes Gebiet. Insbesondere gibt es auf G eine Logarithmusfunktion.