Kapitel 1 Holomorphe Funktionen

§ 1 Komplexe Zahlen

Der (wahrscheinlich aus Usbekistan stammende) arabische Mathematiker

Muhammad ben Musa al-Khwarizmi (um 833 n. Chr.)

schrieb ein Buch über die Lösung von Problemen durch *al-jabr* (Addition eines Terms auf beiden Seiten einer Gleichung, oder Multiplikation beider Seiten mit dem gleichen Term) und *al-muqabala* (Subtraktion eines Terms von beiden Seiten einer Gleichung).

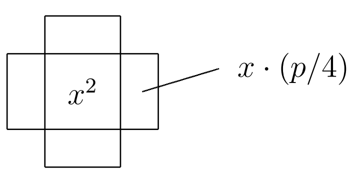
In diesem Buch beschreibt al-Khwarizmi die Lösung der drei Typen von gemischten quadratischen Gleichungen:

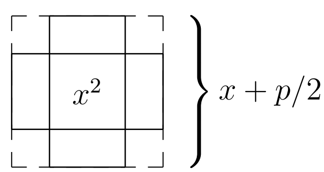
$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & x^2 + px & = & q, \\ \text{(II)} & x^2 + q & = & px, \\ \text{(III)} & x^2 & = & px + q. \end{array}$$

Eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ wurde damals als sinnlos angesehen, denn Zahlen waren immer positiv, und es kann nicht auf einer Seite einer Gleichung eine positive Größe und auf der anderen Seite Null stehen.

Geometrisches Lösungsverfahren für (I):

Betrachte ein Quadrat, das als Seitenlänge die gesuchte Größe x hat. Ergänze dann diese Fläche durch 4 Rechtecke mit den Seiten x und $p/4$.





Dann ist die Gesamtfläche $= q$. Um ein komplettes Quadrat zu erhalten, muß man 4 Quadrate der Seitenlänge $p/4$ ergänzen. Das große Quadrat hat dann die Seitenlänge $x + p/2$. Also ist

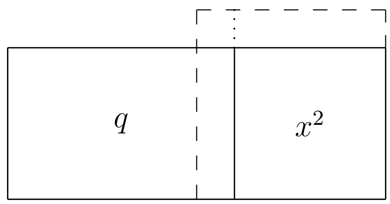
$$(x + p/2)^2 = q + 4 \cdot (p/4)^2,$$

d.h.

$$x = \sqrt{q + (p/2)^2} - p/2.$$

Es wurde immer nur nach **einer** positiven Lösung gesucht. Beim Typ (II) ist folgendes zu beachten:

Ergänzt man ein Quadrat der Seitenlänge x durch ein Rechteck mit den Seiten x und y und dem Flächeninhalt q, so entsteht ein Rechteck mit den Seiten x und $p = x + y$. Dann muß $q \leq (p/2)^2$ sein.



Ist nämlich $y = p/2 + z$ und $x = p/2 - z$, so ist

$$q = y \cdot x = (p/2) \cdot x + z \cdot x = x^2 + 2 \cdot (z \cdot x) \leq (p/2)^2.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn $x = p/2 + z$ und $y = p/2 - z$ ist. Deshalb gilt der Fall $q > (p/2)^2$ als „unmöglicher Fall“, der nicht betrachtet werden muß. Es wurde also z.B. nicht versucht, die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$ zu lösen.

Der persische Dichter, Philosoph, Mathematiker und Astronom

Omar Khayyam (1048 – 1131)

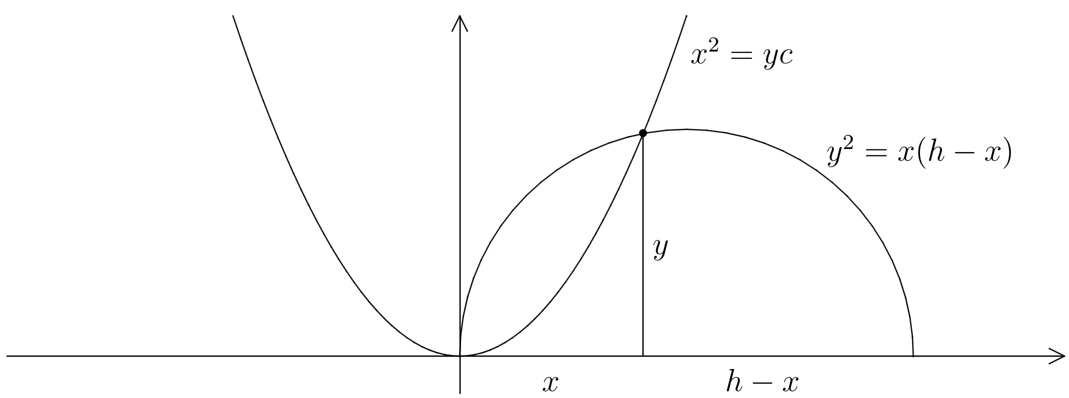
klassifizierte die Typen von kubischen Gleichungen und gab rein geometrische Lösungen an.

Im Falle $x^3 + ax = b$ ging er z.B. folgendermaßen vor:

1. Suche c und h mit $c^2 = a$ und $ah = b$. Das ist möglich, weil $ax < b$ ist.

   Das führt zu der Gleichung $x^3 = c^2(h - x)$ bzw. $x^4 = c^2x(h - x)$.

2. Suche dann den Schnittpunkt (x, y) der Parabel $x^2 = yc$ mit dem Kreis $y^2 = x(h - x)$.



   Es ist $x^4 = y^2c^2 = c^2x(h - x)$ und damit x die gesuchte Größe.

Leider bekommt man so keine explizite Lösung.

Im Jahre 1202 veröffentlichte der Italiener

Leonardo von Pisa (genannt **Fibonacci**, ca. 1180 – 1250)

sein berühmtes Buch „Liber abaci“, in dem er Kaufleuten eine umfassende Einführung in Arithmetik und Algebra auf der Grundlage der algebraischen Kenntnisse gab. Er behandelte das Rechnen mit indischen Ziffern, führte bestimmte Bezeichnungen (z.B. „res“) für die Unbekannten ein und ließ erstmals auch negative Lösungen von Gleichungen zu. In der 1225 geschriebenen Arbeit „Flos“ löste er auf geometrischem Wege die kubische Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ und zeigte u.a., daß die Lösung x keine rationale Zahl und auch nicht die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl sein kann. Er gab auch eine Näherungslösung an, sagte aber nicht, wie er sie gefunden hat.

Bis ca. 1500 wurden diese Erkenntnisse von Rechenschulen und Rechenmeistern weiter verbreitet. Entscheidende neue Ergebnisse in der Algebra gab es nicht, lediglich die Symbolik wurde weiter ausgebaut. „res“ wurde im Italienischen zu „cosa“, im Deutschen dann zu „Coß“ (vgl. z.B. die Coss von Adam Ries, 1492 – 1559). So wurde etwa geschrieben:

„cubus aequalis 24.p.32.rebus“ für $x^3 = 24 + 32x$

oder

„5.p.R.37“ für $5 + \sqrt{37}$.

Luca Pacioli (ein Freund von Leonardo da Vinci, 1445 – 1514) bezeichnete noch 1494 in seinem Hauptwerk „Summa de arithmetica … “ die allgemeinen kubischen Gleichungen als unlösbar.

Die Wende kam erst mit

Scipione del Ferro, Professor an der Universität von Bologna (1465 – 1526).

Ihm gelang es erstmals, die Gleichung

$$x^3 + px = q$$

zu lösen. Als Lösung gab er $x = \sqrt[3]{r + (q/2)} - \sqrt[3]{r - (q/2)}$ an, mit $r^2 = (p/3)^3 + (q/2)^2$. Wie er diese Vorschrift gefunden hat, gab er nicht bekannt. Unter dem Siegel der Verschwiegenheit teilte er seine Lösung seinem Nachfolger und Schwiegersohn Annibale della Nave (1500 – 1557) und seinem Schüler Antonio Maria Fiore mit.

Letzterer war wohl eher ein kleiner Geist. Voller Stolz über sein neues Wissen forderte er öffentlich den Rechenmeister Tartaglia zum Wettstreit auf. Jeder sollte 30 Aufgaben bei einem Notar hinterlegen, 50 Tage Zeit waren zur Lösung gelassen.

Niccolo von Brescia (1500 – 1557), genannt **Tartaglia** (der „Stotterer“),

kam aus sehr einfachen Verhältnissen. Bei der Eroberung von Brescia durch die Franzosen im Jahre 1512 wurde er durch einen Säbelhieb so schwer verletzt, daß er für sein Leben gezeichnet war und auch nicht richtig sprechen konnte. Trotz spärlicher Schulbildung wurde er ab 1517 Rechenlehrer in Verona und 1534 Rechenmeister in Venedig. Einen Namen machte er sich als Ballistiker.

Tartaglia bereitete eine Reihe unterschiedlicher Probleme vor, während Fiore nur Aufgaben vom Typ $x^3+px=q$ stellte. Kurz vor dem Wettstreit, in der Nacht vom 12. zum 13. Februar 1535, hatte Tartaglia angeblich eine Inspiration. Er entdeckte nicht nur eine Lösungsmethode für Gleichungen des obigen Typs, sondern er fand auch heraus, wie man etwa Gleichungen vom Typ $x^3+ax^2=q$ zu bearbeiten hatte. Zu Fiores Überraschung löste Tartaglia nicht nur sämtliche Aufgaben in wenigen Stunden, sondern er stellte seinerseits Aufgaben, von denen Fiore keine einzige bewältigen konnte.

Zu dieser Zeit lebte in Mailand der Arzt und Universalgelehrte

Girolamo Cardano (1501 – 1576).

Er war der erfahrenste Algebraiker seiner Zeit. Als der Ausgang des Wettstreites zwischen Fiore und Tartaglia bekannt geworden war, bedrängte Cardano den Sieger, er möge ihm doch das Geheimnis verraten. Er lud Tartaglia in sein Haus ein und versprach ihm, er werde ihn mit dem Marchese Alfonso d'Avalos, dem Militärkommandeur von Mailand, bekanntmachen. Nach langem Zögern gab Tartaglia schließlich nach, ließ sich unter Eid Verschwiegenheit zusichern und verriet Cardano seine Formeln, wenn auch in dunklen Versen versteckt.

Zusammen mit seinem Schüler

Ludovico Ferrari (1522 – 1569),

einem als zügellos geltenden Privatgelehrten, untersuchte Cardano die Formeln und entdeckte auch die Lösungen von Gleichungen vom Typ $x^3=px+q$ und $x^3+q=px$. Außerdem wandte Ferrari die Methoden auf Gleichungen 4. Grades an. Die beiden wollten nun unbedingt die für ihre Zeit sensationellen Ergebnisse veröffentlichen, aber Cardano fühlte sich durch den Eid gebunden. Deshalb besuchten sie Annibale della Nave in Bologna und ließen sich die Papiere des verstorbenen Scipione del Ferro zeigen. Da Tartaglias Methoden mit denen del Ferros übereinstimmten, kam Cardano zu der Ansicht, daß der Rechenmeister seine Ergebnisse nicht auf redlichem Wege erworben habe. Er fühlte sich nicht mehr an die Schweigepflicht gebunden und veröffentlichte 1545 in seinem großen Werk „Ars magna sive de regulis algebraicis" („Die hohe Kunst" oder „Über die Regeln der Algebra") unter anderem auch die Methode zur Auflösung kubischer Gleichungen. Obwohl er Tartaglia als Urheber benannte, war dieser hell empört und bezichtigte Cardano des Eidbruches.

Ferrari nahm an Stelle seines Meisters den Fehdehandschuh auf, und es kam zu einem öffentlichen Briefwechsel zwischen Tartaglia und Ferrari, in dem beide die gelehrte Mitwelt wissen ließen, daß sie einander im Gebrauch von Ausdrücken, wie sie sonst nur auf Fischmärkten zu hören waren, durchaus ebenbürtig waren.

Nach längerem Zögern nahm Tartaglia die Einladung zu einem öffentlichen Disput in Mailand im August 1548 an. Cardano war dabei nicht zugegen, jedoch zahlreiche Freunde Ferraris. Der Vormittag verging mit Streitigkeiten über die Auswahl der Kampfrichter, polemischen Vorwürfen und weitschweifigen Reden, dann nahte die Mittagsstunde, die Menge zerstreute sich und Tartaglia reiste eilends wieder ab.

Es ist bis heute nicht klar, ob der Rechenmeister die Lösung der kubischen Gleichung tatsächlich aus Aufzeichnungen von del Ferro entnommen oder aus eigener Kraft wiederentdeckt hat. Sicher ist aber, daß Cardano die Theorie vervollständigt hat.

Hier ist die rechnerische Lösung der Gleichung $x^3+px=q$ für $p,q>0$, wie sie von Scipione del Ferro und Tartaglia entdeckt und von Cardano veröffentlicht wurde.

Der Trick besteht in dem Ansatz $x=u-v$. Dann ist

$$x^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v)\,.$$

Kann man u und v so finden, daß $u^3-v^3=q$ und $uv=p/3$ ist, so hat man die Gleichung gelöst. Und das ist tatsächlich möglich:

Bekanntlich ist $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$, also $\frac{1}{2}(a+b) = \sqrt{ab + (\frac{a-b}{2})^2}$. Mit $a=u^3$ und $b=v^3$ bedeutet das:

$$\frac{1}{2}(u^3+v^3) = \sqrt{(uv)^3 + \left(\frac{u^3-v^3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} =: r\,.$$

Zusammen mit der Gleichung

$$\frac{1}{2}(u^3-v^3) = \frac{q}{2}$$

ergibt das

$$u^3 = r + \frac{q}{2} \qquad \text{und} \qquad v^3 = r - \frac{q}{2}$$

und damit die *Cardanosche Formel*

$$\boxed{x = u - v = \sqrt[3]{r+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{r-\frac{q}{2}}.}$$

Beispiel.

Wir betrachten die Gleichung $x^3+3x=4$ („Ein Kubus und das dreifache seiner Länge sei gleich 4“).

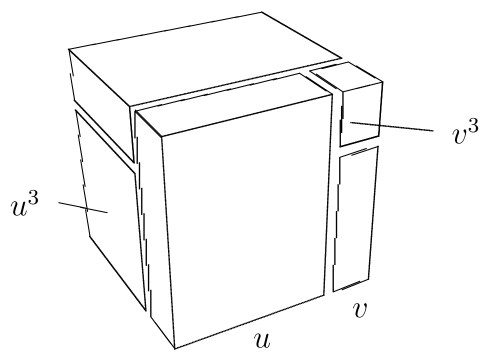
Dann ist

$$r = \sqrt{(3/3)^3 + (4/2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,,$$

also
$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$
Üblicherweise erhält man die Lösung in solch einer komplizierten Form. Die Renaissance-Mathematiker konnten recht gut mit diesen Wurzelausdrücken umgehen.

In unserem Beispiel kann man allerdings folgende Tatsache gut gebrauchen:
$$(\sqrt{5} \pm 1)^3 = 5\sqrt{5} \pm 15 + 3\sqrt{5} \pm 1 = 8\sqrt{5} \pm 16 = 8 \cdot (\sqrt{5} \pm 2)\,.$$
Also ist
$$x = u - v = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5}-1) = 1.$$

Bei der erstmals von Cardano untersuchten Gleichung $x^3 = px + q$ machte er den Ansatz $x = u+v$. Die Beziehung $(u+v)^3 = u^3+v^3+2uv(u+v)$ bewies er geometrisch durch eine Zerlegung des Würfels mit der Seitenlänge $u + v$. Nimmt man einen Würfel mit Kantenlänge u heraus, so zerfällt das übrigbleibende „Gnomon“ in eine Würfel mit Kantenlänge v und drei Quader mit den Seiten u, v und $u + v$.



Dann müssen die Gleichungen $p = 3uv$ und $q = u^3 + v^3$ gelöst werden. Mit $r := \sqrt{(q/2)^2 - (p/3)^3}$ erhält man die Lösung
$$\boxed{x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+r} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-r}\,.}$$

Bei dem Versuch, möglichst viele verschiedene kubische Gleichungen zu lösen, stieß Cardano erstmals auf den sogenannten „casus irreducibilis“. Er tritt z.B. bei der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ auf. Der obige Lösungsansatz liefert
$$r = \sqrt{(q/2)^2 - (p/3)^3} = \sqrt{2^2 - 5^3} = \sqrt{-121}\,,$$
einen unmöglichen Ausdruck, oder eine „sophistische Größe“, wie Cardano sich ausdrückte. Rechnet man formal weiter, so erhält man als Lösung den fiktiven Wert

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano sprach auch von *weniger reinen Wurzeln*, mit denen er nicht viel anzufangen wußte.

Erst der Ingenieur

Rafael Bombelli (1526 - 1572)

führte in seiner 1572 in Venedig und später in Bologna erschienen Einführung in die Algebra die Überlegungen zu Ende.

Zunächst behandelte er die numerische Berechnung von Wurzeln und die Lösungsmethoden von Cardano für Gleichungen bis zum Grade 4. Dann wandte er sich besonders dem „casus irreducibilis“ zu. Er verbesserte die Bezeichnungsweisen und begann systematisch mit Wurzeln aus negativen Zahlen zu rechnen. Er führte die Bezeichnungen „più di meno“ für $+\sqrt{-1}$ und „meno di meno“ für $-\sqrt{-1}$ ein und behandelte diese Größen wie eine neue Art von Vorzeichen. So stand z.B.

$$\text{„R.c.}\llcorner\text{ 2 p.di m.11 }\lrcorner\text{“} \quad \text{für} \quad \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}\,.$$

Dabei bedeutete „R.c.“ *Radice cubica* und „p.di m.“ *più di meno.*

Bombelli gab Multiplikationsregeln für alle Vorzeichen incl. „p.di m.“ und „m.di m.“ an (wie z.B. $(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$, und er stellte fest:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ und } (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Setzt man dies in die fiktive Lösung von $x^3 = 15x + 4$ ein, so erhält man:

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.$$

Tatsächlich ist die reelle Zahl $x = 4$ eine Lösung. Bombelli war sehr stolz darauf, die Gültigkeit der Cardanoschen Formeln auch in diesem Falle zeigen zu können. Wie Cardano sprach er bei den Wurzeln aus negativen Zahlen von „wahrhaft sophistischen Größen“, aber er verwendete sie systematisch zur Berechnung reeller Lösungen kubischer Gleichungen. Als Lösungen quadratischer Gleichungen kamen diese Größen nach wie vor nicht in Frage. Cardano übernahm später Bombellis Darstellung, versuchte aber vergeblich, den sophistischen Größen einen Sinn zu geben.

Der französische Mathematiker René Descartes (1596 – 1650) bezeichnete in seinem 1637 erschienenen Werk zur Geometrie die Wurzeln aus negativen Zahlen als *imaginäre Zahlen* oder *falsche Wurzeln*. Sie blieben aber ihm und den nachfolgenden Mathematikern noch lange Zeit suspekt.

Am Ende des 17. Jahrhunderts entwickelten Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) fast gleichzeitig und unabhängig voneinander den Kalkül der Differential- und Integralrechnung. Für Newton waren Wurzeln aus negativen Zahlen noch immer das Indiz für die Unlösbarkeit eines Problems, und er versuchte sie nach Möglichkeit zu vermeiden. Bei Leibniz fand sich immerhin die Rechnung $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$.

Zu Anfang des 18. Jahrhunderts formulierte der Franzose

Abraham de Moivre (1667 – 1754)

einen Satz, der implizit die folgende später nach ihm benannte Formel enthielt:

$$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^n=\cos(nx)+\sqrt{-1}\sin(nx).$$

Bekannt wurde dieses Ergebnis allerdings erst um 1748 durch den Schweizer Mathematiker

Leonhard Euler (1707 – 1783).

Euler hatte großen Einfluß auf die Weiterentwicklung der Mathematik. Er führte das Zeichen e für die Basis des natürlichen Logarithmus ein, er benutzte ab 1736 systematisch das 1706 von William Jones erstmals eingeführte Symbol π für die Zahl $3.14159\ldots$ und ab 1777 das Symbol i für die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$. Euler führte Rechnungen mit imaginären Größen in genialer Weise durch, blieb aber eine exakte Erklärung der Wurzeln aus negativen Zahlen schuldig. Er bezeichnete sie als Größen, die ihrer Natur nach nur in der Einbildung existieren.

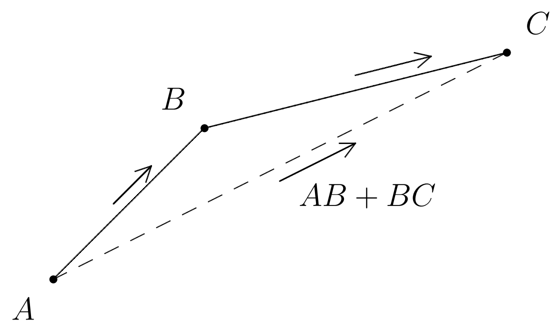
John Wallis (1616 – 1703) entwickelte erstmals vage Vorstellungen von einer Beziehung zwischen imaginären Zahlen und Punkten der Ebene. Er kam aber zu keinem vernünftigen Ergebnis. Die erste einwandfreie geometrische Interpretation imaginärer Größen gab der norwegische Geodät

Caspar Wessel (1745 - 1818).

Er wurde vor allem als Oberaufseher der dänischen Landesvermessung bekannt. Als seine wichtigste Leistung gilt die Vermessung der Grafschaft Oldenburg. Wessel veröffentlichte seine Arbeit 1797 in einer Schriftenreihe der Königlichen Dänischen Akademie. Bekannt wurde diese Arbeit allerdings erst 1897 durch eine französische Übersetzung.

Caspar Wessels Ziel war es, eine analytische Beschreibung für den Begriff „Richtung“ zu finden. So schrieb er am Anfang seiner Arbeit:

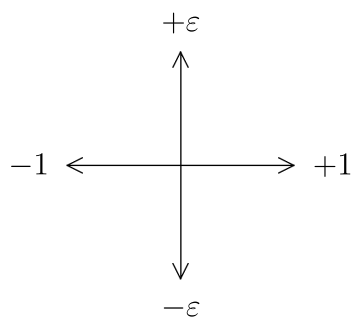
„Die Addition zweier gerichteter Strecken geschieht in der folgenden Weise: Man setzt sie zusammen, indem man die eine von dem Punkt ausgehen läßt, an dem die andere endet; dann verbindet man durch eine neue Strecke die beiden Enden der so entstandenden gebrochenen Linie. Diese neue Strecke heißt die Summe der gegebenen Strecken.“



Wessel erlaubt diese „Vektoraddition“ in der Ebene und im Raum. Er führt weiter eine Multiplikation gerichteter Strecken ein, allerdings nur für koplanare Strecken. Die Beschreibung dieser Multiplikation ist recht kompliziert, sie soll aber auf jeden Fall folgenden Regeln genügen:

1. Die Länge des Produkts zweier Strecken ist gleich dem Produkt der Längen.
2. Der Richtungswinkel des Produkts ist gleich der Summe der Richtungswinkel.

Es wird eine positive Einheit $+1$ eingeführt, und rechtwinklig dazu eine weitere Einheit $+\varepsilon$.



Die Einheit $+1$ hat den Richtungswinkel $0°$, $+\varepsilon$ den Winkel $90°$, -1 den Winkel $180°$ und $-\varepsilon$ den Winkel $270°$. Insbesondere ist $(+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) = -1$, also $+\varepsilon$ gleich $\sqrt{-1}$. Eine beliebige (vom Ursprung ausgehende) Strecke kann in der Form

$$a + \varepsilon b = A \cdot \cos \alpha + A \cdot \varepsilon \cdot \sin \alpha$$

dargestellt werden. Für das Produkt erhält man dann

$$(a + \varepsilon b) \cdot (c + \varepsilon d) = (ac - bd) + \varepsilon(ad + bc).$$

Im Raum betrachtet Wessel drei zueinander orthogonale Einheiten $+1$, $+\eta$ und $+\varepsilon$ mit $\varepsilon^2 = -1$, $\eta^2 = -1$, multipliziert aber Ausdrücke der Form $x + \eta y + \varepsilon z$ nicht miteinander.

Unabhängig von Wessel entwickelte

Jean Robert Argand (1768 - 1822),

ein Buchhalter und Amateurmathematiker, ein ähnliches Konzept. Da die Multiplikation einer reellen Zahl mit (-1) einer Spiegelung am Nullpunkt, also einer Drehung um $180°$, entspricht, kam er zu der Auffassung, daß die Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ einer Drehung um $90°$ entsprechen müsse. Auch seine Arbeit, die erst 1813 verbreitet wurde, blieb ohne großen Einfluß.

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855),

der schon frühzeitig eine genaue Vorstellung von den imaginären Größen hatte (und sich heftig über den Gebrauch des mystifizierenden Wortes „imaginär“ beschwerte), gelang es endlich, sie hoffähig zu machen. Er übernahm das Eulersche Symbol i und führte 1831 den Begriff „komplexe Zahl“ für einen Ausdruck der Form $z = a+b\mathsf{i}$ mit reellen Zahlen a und b ein. Schon 1797 hatte er den ersten einwandfreien Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geliefert: „Jedes nicht-konstante Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle“.

Im Jahre 1835 beschrieb Sir William Rowan Hamilton die komplexen Zahlen erstmals rein algebraisch als Paare reeller Zahlen.

Definition. Unter dem Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* versteht man die Menge aller (geordneten) Paare (a, b) von reellen Zahlen mit folgenden Rechenoperationen:

1. $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$.
2. $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd,\ ad + bc)$.

Das Element $(1, 0)$ wird mit 1 bezeichnet, das Element $(0, 1)$ mit i.

Bezüglich der Addition ist $\mathbb{C}$ dann eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $0 = (0, 0)$. Identifiziert man $x \in \mathbb{R}$ mit dem Paar $(x, 0)$, so kann man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Weil $(x, 0) \cdot (a, b) = (xa, xb)$ ist, induziert die Multiplikation die bekannte $\mathbb{R}$-Vektorraum-Struktur auf $\mathbb{R}^2$. Die Elemente 1 und i bilden dann eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$. Jede komplexe Zahl besitzt also eine eindeutige Darstellung

$$z = a + \mathsf{i}b\,,\ \text{mit}\ a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Man nennt dann a den *Realteil* und b den *Imaginärteil* der komplexen Zahl z.

Ist $z = a + b\mathsf{i} \in \mathbb{C}$, so nennt man $\overline{z} := a - b\mathsf{i}$ die zu z *konjugierte (komplexe) Zahl*. Man gewinnt sie durch Spiegelung an der x–Achse. Es gilt:

1. Ist $z = a + b\mathsf{i}$, so ist $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ eine nicht-negative reelle Zahl.
2. Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind gegeben durch

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \text{ und } \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Die reelle Zahl $|z| := +\sqrt{z\overline{z}}$ nennt man den *Betrag* der komplexen Zahl z. Sie stimmt mit der euklidischen Norm des Vektors z überein.

Ist $z \neq 0$, so ist $z\overline{z} = |z|^2 > 0$, und es gilt:

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}\ ,\ \text{also} \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\ .$$

Wir können jetzt eine anschauliche Vorstellung von der Multiplikation in $\mathbb{C}$ gewinnen. Ist $z = a + \mathsf{i}b \neq 0$, so ist $z = |z| \cdot \dfrac{z}{|z|}$ und $\dfrac{z}{|z|} = \alpha + \mathsf{i}\beta$, mit

$$\alpha := \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Offensichtlich ist $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, es gibt also einen (eindeutig bestimmten) Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $\alpha = \cos\theta$ und $\beta = \sin\theta$. Damit folgt:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + \mathsf{i}\sin\theta).$$

Das ist die (eindeutig bestimmte) „Polarkoordinaten–Darstellung“ der komplexen Zahl z. Die Zahl $\arg(z) := \theta \in [0, 2\pi)$ nennt man das *Argument* von z. Für $z = 0$ ist überhaupt kein Winkel festgelegt.

Beispiele.

1. Es ist $|\mathsf{i}| = 1$ und $\arg(\mathsf{i}) = \pi/2$.

2. Sei $z = 1 + \mathsf{i}$. Dann ist $z\overline{z} = (1+\mathsf{i})(1-\mathsf{i}) = 2$, also $|z| = \sqrt{2}$. Weil $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ist, folgt: $\arg(z) = \pi/4$.

Ist $z = r(\cos\theta + \mathsf{i}\sin\theta)$, so können wir die Multiplikation $w \mapsto z \cdot w$ in zwei Schritten durchführen:

1. Zunächst multiplizieren wir $w = c + \mathsf{i}\,d$ mit $\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta$:

   $$(c,d) \mapsto ((\cos\theta)c - (\sin\theta)d, (\cos\theta)d + (\sin\theta)c) = (c,d) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Das ist eine Drehung um den Winkel θ, das Ergebnis bezeichnen wir mit $R_\theta(w)$.

2. Anschließend wird $R_\theta(w)$ mit der reellen Zahl $r = |z|$ multipliziert, also um den Faktor r gestreckt. Diese Streckung bezeichnen wir mit H_r.

Insgesamt ist die Multiplikation mit einer komplexen Zahl also nichts anderes als eine *Drehstreckung.*

1.1 Satz. *Für $\theta, \theta' \in [0, 2\pi)$ und $r, r' > 0$ gilt:*

1. $H_r \circ R_\theta = R_\theta \circ H_r$.

2. $H_r \circ H_{r'} = H_{rr'}$

3. $R_\theta \circ R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.

BEWEIS: Die Eigenschaften (2) und (3) sind trivial bzw. aus der Linearen Algebra bekannt. Ist $\alpha = \cos\theta$ und $\beta = \sin\theta$, so ist

$$H_r \circ R_\theta(c + \mathsf{i}d) = H_r((\alpha c - \beta d) + \mathsf{i}\,(\beta c + \alpha d)) = ((r\alpha c - r\beta d) + \mathsf{i}\,(r\beta c + r\alpha d))$$

und

$$R_\theta \circ H_r(c + \mathsf{i}d) = R_\theta(rc + \mathsf{i}rd) = ((r\alpha c - r\beta d) + \mathsf{i}\,(r\beta c + r\alpha d))\,.$$

∎

Aus diesem Satz ergibt sich die Assoziativität und die Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$.

Die letzte Gleichung kann verallgemeinert werden zu $(R_\theta)^n = R_{n\theta}$. Das ergibt die Formel von Moivre.

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\zeta_n := \cos(\frac{2\pi}{n}) + \mathsf{i} \cdot \sin(\frac{2\pi}{n}).$$

Ist $m = k \cdot n$, so ist $(\zeta_n)^m = \cos(2k\pi) + \mathsf{i} \cdot \sin(2k\pi) = 1$.

1.2 Satz. *Für jede natürliche Zahl n hat die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen, nämlich*

$$(\zeta_n)^0 = 1,\ (\zeta_n)^1 = \zeta_n,\ (\zeta_n)^2,\ (\zeta_n)^3,\ \ldots,\ (\zeta_n)^{n-1}.$$

BEWEIS: Wir haben schon gesehen, daß $((\zeta_n)^k)^n = (\zeta_n)^{n\cdot k} = 1$ ist, für $k = 0, \ldots, n-1$. Offensichtlich sind die n Zahlen $(\zeta_n)^k$ paarweise verschieden.

Ist umgekehrt w irgend eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$, so ist auch $|w|^n = 1$, also $|w| = 1$. Das bedeutet, daß es ein $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $R_\theta(1) = w$ gibt. Und es ist $R_{n\theta}(1) = w^n = 1$, also $\cos(n\theta) = 1$ und $\sin(n\theta) = 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n\theta = k \cdot 2\pi$. Wegen $0 \le \theta < 2\pi$ ist $0 \le n\theta < n \cdot 2\pi$. Also kommen für k nur die Werte 0, 1, 2, $\ldots, n-1$ in Frage. Damit ist alles bewiesen. ∎

Definition. Die Zahlen $1, \zeta_n, (\zeta_n)^2, \ldots, (\zeta_n)^{n-1}$ nennt man die *n-ten Einheitswurzeln.*

1.3 Satz. *In $\mathbb{C}$ besitzt jede Zahl $z \ne 0$ genau n n–te Wurzeln.*

BEWEIS: Sei $z = r(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta)$, mit $r = |z|$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann setzen wir

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\theta}{n} + \mathsf{i}\,\sin\frac{\theta}{n}) \cdot \zeta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Offensichtlich sind dies n verschiedene komplexe Zahlen z_k mit $z_k^n = z$.

Ist andererseits w irgendeine Lösung der Gleichung $w^n = z$, so ist $w^n = z_0^n$, also $(wz_0^{-1})^n = 1$. Das bedeutet, daß es eine n–te Einheitswurzel ζ_k gibt, so daß $w = z_0 \cdot \zeta_k$ ist. ∎

Der Satz zeigt, daß man in $\mathbb{C}$ nie von *der* n–ten Wurzel einer Zahl z sprechen kann, es gibt stets n verschiedene. Das gilt auch im Falle $n = 2$. Das Symbol $\sqrt{z}$ ist also zweideutig, und es fällt schwer, eine der beiden Wurzeln auszuzeichnen. Zum Beispiel sind $\frac{1}{2}(1 - \mathsf{i})$ und $\frac{1}{2}(\mathsf{i} - 1)$ die beiden Wurzeln von $-\frac{\mathsf{i}}{2}$. Welche davon sollte man bevorzugen?

In $\mathbb{R}$ gibt es entweder überhaupt keine oder eine positive und eine negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$, und wir haben die positive Lösung als *die* Wurzel aus a definiert. Das läßt sich nicht übertragen, weil $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann. Daher ist es in $\mathbb{C}$ nicht möglich, zwischen positiven und negativen Zahlen zu unterscheiden.

Die Geschichte endete nicht bei den komplexen Zahlen. Das verdanken wir vor allem

Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865).

Hamilton war eine Art Wunderkind. Er interessierte sich nicht nur für Naturwissenschaften, sondern auch für Literatur, insbesondere beherrschte er 13 Sprachen. Nachdem er die komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen beschrieben hatte, beschäftigte er sich mit Zahlentripeln (a, b, c). Er suchte nach einer Möglichkeit, solche Tripel miteinander zu multiplizieren, und zwar so, daß die Rechenstrukturen von $\mathbb{C}$ dadurch fortgesetzt werden und daß das folgende Gesetz („Law of moduli“) erfüllt ist:

$$|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2 \,, \text{ mit } |(a, b, c)|^2 := a^2 + b^2 + c^2 \,.$$

13 Jahre lang suchte er verbissen, aber vergeblich nach dieser Multiplikation. Er führte Ausdrücke der Form $a + b\,\mathsf{i} + c\,\mathsf{j}$ mit $\mathsf{i}\,\mathsf{i} = \mathsf{j}\,\mathsf{j} = -1$ ein und versuchte herauszubekommen, was dann $\mathsf{i}\mathsf{j}$ und $\mathsf{j}\mathsf{i}$ sein müßte. Die Möglichkeiten $\mathsf{i}\mathsf{j} = 1$ oder $\mathsf{i}\,\mathsf{j} = -1$ konnten schnell ausgeschlossen werden. Erfolgversprechender schien der Versuch, $\mathsf{i}\,\mathsf{j} = 0$ zu setzen, aber letztlich klappte auch das nicht. Dann bemerkte Hamilton, daß er nur die Beziehung $2\mathsf{i}\mathsf{j} = 0$ brauchte, und genau genommen sogar nur $\mathsf{i}\mathsf{j} + \mathsf{j}\mathsf{i} = 0$. Schon damit konnte das „Law of moduli“ erfüllt werden. Also gab er die Forderung nach Kommutativität auf, führte eine weitere Größe k ein und setzte $\mathsf{i}\mathsf{j} = \mathsf{k}$ und $\mathsf{j}\mathsf{i} = -\mathsf{k}$. Nun mußte er herausfinden, was k sein könnte.

Jeden Morgen fragten ihn seine Söhne: „Na, Papa, kannst Du jetzt Tripel multiplizieren?“ Und er antwortete mit traurigem Kopfschütteln: „Nein, ich kann sie nur addieren und subtrahieren!“

Bei einem Spaziergang mit seiner Frau am 16. Oktober 1843 hatte er den entscheidenden Gedanken: Statt mit drei reellen Komponenten versuchte er es mit vier. Die Einheiten nannte er 1, i, j und k, und er setzte

$$\mathsf{i}\mathsf{j} = -\mathsf{j}\mathsf{i} =: \mathsf{k}.$$

Mit dem Sprung in die 4. Dimension hatte er Erfolg. Die neuen Zahlen nannte er „Quaternionen“. Er war selbst so begeistert von seiner Entdeckung, daß er sein Leben fortan der Erforschung der Quaternionen widmete. Auch nach seinem Tod blieben sie eines der wichtigsten Themen der Mathematik in England und vor allem in Irland. Spät erst zeigte sich, daß man ihre Bedeutung doch gewaltig überschätzt und dadurch andere Fragen vernachlässigt hatte.

Definition. Im vierdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis

$$1 = (1,0,0,0),\ \mathsf{i} := (0,1,0,0),\ \mathsf{j} := (0,0,1,0) \text{ und } \mathsf{k} := (0,0,0,1)$$

wird die *Hamiltonsche Multiplikation* durch

$$\mathsf{i}^2 = \mathsf{j}^2 = \mathsf{k}^2 = \mathsf{ijk} = -1 \quad \text{und} \quad \mathsf{ij} = -\mathsf{ji} = \mathsf{k}$$

eingeführt. Dabei ist 1 das neutrale Element bei der Multiplikation.

Den so erhaltenen Zahlenbereich nennt man die *Algebra der Quaternionen* und bezeichnet ihn mit $\mathbb{H}$.

Zahlerweiterungen von $\mathbb{C}$ nannte man zunächst *hyperkomlexe Systeme*, seit Beginn des 20. Jahrhunderts auch *(reelle) Algebren*. Nachdem die Erfindung der Quaternionen bekannt geworden war, kam es zu einer Flut von neuen hyperkomplexen Systemen. Schon 1843 entdeckte J.T.Graves die acht–dimensionale Algebra $\mathbb{O}$ der „Oktaven“ oder „Oktonionen“, die allerdings – im Gegensatz zu den Quaternionen – nicht mehr assoziativ ist. 1845 wurde sie von Arthur Cayley wiedergefunden. Heute weiß man, daß $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ die einzigen reellen Algebren sind, in denen die Division eindeutig ausführbar ist.

Den von i, j und k aufgespannten Teil einer Quaternion nannte Hamilton ihren *Imaginärteil* oder *Vektor (Träger)*, den von 1 aufgespannten Teil den *Skalar* (weil sich alle Werte auf einer Skala bewegen). Er deutete die vektoriellen Komponenten als räumliche Koordinaten, die skalare Komponente als Zeit. Bei den Physikern hat sich diese Interpretation der vierten Dimension bis heute erhalten.

Definition. Ist $x = \alpha \cdot 1 + \mathfrak{u}$ eine allgemeine Quaternion mit $\mathfrak{u} \in \text{Im}(\mathbb{H})$, so setzt man

$$\overline{x} := \alpha \cdot 1 - \mathfrak{u}.$$

Offensichtlich ist $\overline{\overline{x}} = x$ und $\text{Im}(\mathbb{H}) = \{x \mid \overline{x} = -x\}$. Die Konjugation läßt sich in $\mathbb{H}$ ähnlich nutzbringend anwenden wie in $\mathbb{C}$.

Mit Hilfe des Quaternionenproduktes können wir auch die Produkte der Vektorrechnung wiederentdecken:

1.4 Satz. *Sind* $\mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{v}$ *zwei vektorielle Quaternionen, so ist*

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v} = -\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{v} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}.$$

Beweis: Sei

$$\mathfrak{u} = a_1\mathsf{i} + a_2\mathsf{j} + a_3\mathsf{k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v} = b_1\mathsf{i} + b_2\mathsf{j} + b_3\mathsf{k}.$$

Wegen $\mathsf{ij} = -\mathsf{ji} = \mathsf{k}$, $\mathsf{ik} = -\mathsf{ki} = -\mathsf{j}$ und $\mathsf{jk} = -\mathsf{kj} = \mathsf{i}$ ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}\mathfrak{v} &= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &\quad +(a_2b_3 - a_3b_2)\mathsf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathsf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathsf{k} \\ &= -\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{v} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}. \end{aligned}$$

■

Zusammen mit Hamilton gilt

Hermann Günther Graßmann (1809 - 1877)

als Erfinder der Vektorrechnung. Graßmann war Gymnasiallehrer in Stettin und erwarb sich darüber hinaus internationale Anerkennung durch seine Forschungen zur Sprachgeschichte, insbesondere über Sanskrit. 1839 veröffentlichte er eine mathematisch-physikalische Arbeit zur Theorie von Ebbe und Flut, um die Lehrbefähigung in Naturwissenschaften bis zum Abitur zu erhalten. In der 200-Seiten-Arbeit verwendete er schon Methoden der Vektorrechnung und der Vektoranalysis, seine Prüfer verstanden nichts davon.

1844 erschien Graßmanns „Lineale Ausdehnungslehre“, eine völlig neue und schwer verständliche Theorie. Er führte darin den Begriff des n-dimensionalen Vektorraumes ein, sowie ein *inneres* und ein *äußeres Produkt*. Das innere Produkt entsprach dem von Hamilton eingeführten Skalarprodukt. Während aber das Vektorprodukt von Hamilton je zwei Vektoren wieder einen Vektor zuordnete, ergab das äußere Produkt von k Vektoren einen Vektor k-ter Stufe, eine neuartige Größe, die Grassmann versuchte geometrisch zu deuten. Tatsächlich hat er die „Grassmann-Algebra“ erfunden. Diese Arbeit hat damals niemand verstanden, die meisten Exemplare wurden später eingestampft.

Auf Empfehlung von August Ferdinand Möbius (1790 – 1868), der mit seinem „baryzentrischen Kalkül“ ebenfalls eine Art Vektorrechnung entwickelt hatte, bewarb sich Graßmann um einen Preis, den die Jablonowskischen Gesellschaft für die Ausarbeitung einer fast vergessenen Idee von Leibniz ausgeschrieben hatte. Mit seiner Arbeit „Die geometrische Analyse“, die wieder Ideen aus der Ausdehnungslehre benutzte, gewann er den Preis.

1862 veröffentlichte Graßmann eine überarbeitete und ergänzte Version der Ausdehnungslehre. Obwohl seine Arbeiten Gauß und Hamilton bekannt waren, blieb ihm die wissenschaftliche Anerkennung versagt. Er wurde regelrecht totgeschwiegen und verzichtete enttäuscht auf weitere mathematische Forschungen. Erst in den letzten Jahren seines Lebens wuchs das Interesse der Fachwelt an seinem Werk, u.a. dank Hankel und Clebsch.

Die geometrische Deutung von Skalar– und Vektorprodukt stammt von Graßmann. Populär wurden die Vektoren und ihre Produkte jedoch erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts durch den amerikanischen Physiker und Mathematiker Josiah Willard Gibbs.

§ 2 Komplexe Funktionen

Ist $\varepsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, so ist $D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ die Kreisscheibe mit Radius ε um z_0. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls es zu jedem $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $D_\varepsilon(z)$ noch ganz in U enthalten ist. Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$ stimmen damit mit denen in $\mathbb{R}^2$ überein.

Definition. Ein *Gebiet* in $\mathbb{C}$ ist eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß je zwei Punkte von G innerhalb von G durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können.

2.1 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $U \subset G$ eine nicht-leere Teilmenge, die zugleich offen und (relativ) abgeschlossen ist, so ist $U = G$.*

BEWEIS: Sei $z_0 \in U$ und w_0 ein beliebiger Punkt in G. Dann gibt es einen stetigen Weg $\alpha : [0,1] \to G$ mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = w_0$. Sei $M := \{t \in [0,1] : \alpha(s) \in U$ für $0 \le s \le t\}$ und $t_0 := \sup(M)$. Weil U in G abgeschlossen ist, liegt $\alpha(t_0)$ in U und t_0 in M. Weil U offen ist, ist auch $\alpha^{-1}(U)$ offen in $[0,1]$. Ist $t_0 < 1$, so kann t_0 nicht das Supremum von M sein. Also ist $t_0 = 1$ und $w_0 \in U$. ∎

2.2 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so können je zwei Punkte von G durch einen Streckenzug in G verbunden werden.*

BEWEIS: Sei $z_0 \in G$ beliebig und

$$U := \{\in G : z \text{ kann in } G \text{ durch einen Streckenzug mit } z_0 \text{ verbunden werden }\}.$$

U ist eine nicht-leere Teilmenge von G. Ist $z_1 \in U$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $D_\varepsilon(z_1) \subset G$ ist. Aber jeder Punkt von $D_\varepsilon(z_1)$ kann innerhalb dieser Kreisscheibe durch eine Strecke mit z_1 und damit durch einen Streckenzug in G mit z_0 verbunden werden. Also liegt die Kreisscheibe in U, und U ist offen.

U ist auch abgeschlossen in G. Ist nämlich $z_2 \in G$ ein Häufungspunkt von U, so kann man wieder eine Kreisscheibe $D_\delta(z_2)$ in G finden. Aber diese Kreisscheibe enthält mindestens einen Punkt von U, und dann ist klar, daß auch z_2 in G durch einen Streckenzug mit z_0 verbunden werden kann. Also gehört z_2 zu U. ∎

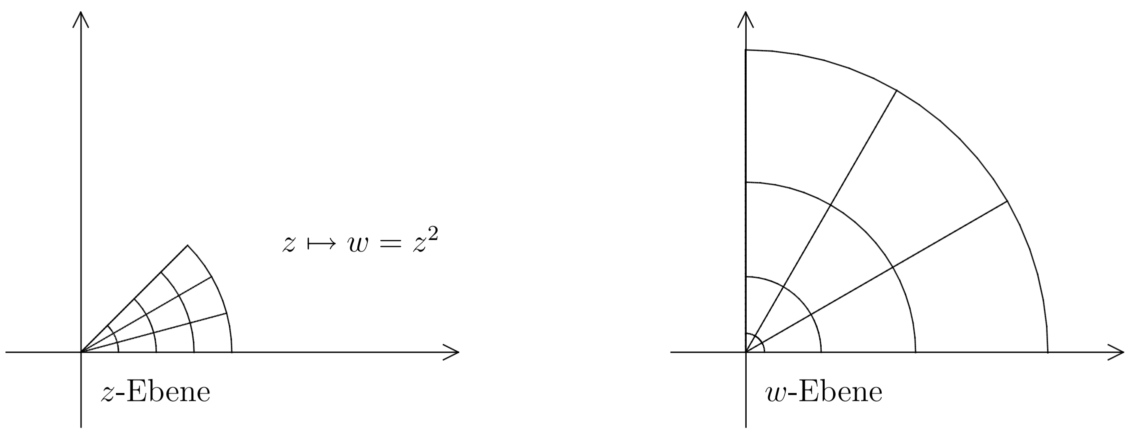
Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wie kann man sich eine solche Funktion anschaulich vorstellen? Wir untersuchen das in dem einfachen Beispiel der Funktion $f(z) = z^2$.

Im Reellen versuchen wir, eine Funktion durch ihren Graphen darzustellen. Das geht hier schlecht, denn der Graph einer komplexen Funktion lebt im $\mathbb{R}^4$. Allerdings gibt es dabei viel Redundanz, der eigentliche Graph ist eine reell 2-dimensionale Fläche.

Beschränkt man sich auf die reellwertige Funktion $z = x + \mathrm{i}y \mapsto |f(z)| = |z|^2 = x^2 + y^2$, so verliert man zuviele Informationen.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, mit zwei Ebenen zu arbeiten. Ist $w = z^2$, so ist

$$|w| = |z|^2 \quad \text{und} \quad \arg(w) = 2 \cdot \arg(z).$$



Soweit funktioniert das ganz gut. Jetzt suchen wir nach der Umkehrabbildung. Wenn wir f auf die rechte Halbebene beschränken, dann erhalten wir als Wertemenge die ganze w-Ebene. Auf dem Rand gibt es allerdings ein Problem. Es ist $f(\mathrm{i}t) = f(-\mathrm{i}t) = -t^2$. Damit f injektiv bleibt, dürfen wir in der z-Ebene nur die Menge aller z mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ betrachten. Als Bildmenge erhalten wir dann die längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzte w-Ebene.

Sei $g_1 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ definiert durch

$$g_1(r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)) := \sqrt{r}\,(\cos(\varphi/2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi/2)).$$

Dann ist g_1 eine Umkehrung von $f|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Im}(z)>0\}}$.

Definieren wir $g_2 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$ durch

$$g_2(w) := -g_1(w),$$

so ist g_2 eine Umkehrung von $f|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Im}(z)<0\}}$.

Um also eine globale Umkehrfunktion $g(w) = \sqrt{w}$ von $f(z) = z^2$ zu definieren, brauchen wir als Definitionsbereich zwei Exemplare der geschlitzten Ebene. Dabei ist folgendes zu beachten: Nähert man sich in der w-Ebene von oben dem Schlitz bei $w = -r$, so nähert sich der Wert von g_1 der Zahl $z = \mathrm{i}\sqrt{r}$. Bei Annäherung von unten ergibt sich als Wert die Zahl $z = -\mathrm{i}\sqrt{r}$. Dagegen ist es bei g_2 gerade umgekehrt. Um nun $\sqrt{z}$ **stetig** zu definieren, muß man die Oberkante der ersten

Ebene mit der Unterkante der zweiten Ebene zusammenkleben, und die Unterkante der ersten Ebene mit der Oberkante der zweiten Ebene. Es entsteht eine Fläche R, die in zwei Blättern über $\mathbb{C}^*$ liegt. Der Nullpunkt fehlt dabei.

Die Fläche R nennt man die *Riemannsche Fläche* von $\sqrt{w}$. Man kann sie auch folgendermaßen gewinnen:

$$R = \{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \,:\, w = z^2\}.$$

Die Projektion $\pi := \mathrm{pr}_2|_R : R \to \mathbb{C}^*$ hat die Eigenschaft, daß $\pi^{-1}(w) = \{g_1(w), g_2(w)\}$ genau die beiden Wurzeln aus w enthält. Andererseits ist R aber auch der Graph von $f(z) = z^2$, bezüglich der Projektion pr_1.

Als nächstes versehen wir $\mathbb{C}$ mit einem unendlich fernen Punkt. Es sei ∞ ein einmal fest gewähltes Objekt, das nicht zu $\mathbb{C}$ gehört. Dann setzen wir

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Der Begriff der *Umgebung* wird in $\overline{\mathbb{C}}$ folgendermaßen definiert:

1. Ist z_0 sogar ein Punkt von $\mathbb{C}$, so heißt eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ eine Umgebung von z_0, falls es eine offene Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ mit $z_0 \in B \subset U$ gibt.

2. Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt Umgebung von $z_0 = \infty$, falls ∞ in U liegt und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C} \setminus K \subset U$ existiert.

Eine Teilmenge $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ wird nun *offen* genannt, wenn es zu jedem $z \in M$ eine Umgebung U von z in $\overline{\mathbb{C}}$ mit $U \subset M$ gibt. Jede in $\mathbb{C}$ offene Menge ist dann auch offen in $\overline{\mathbb{C}}$.

2.3 Satz. *$\overline{\mathbb{C}}$ ist ein kompakter Hausdorffscher topologischer Raum.*

BEWEIS: 1) Ein topologischer Raum ist eine Menge X, zusammen mit einem System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, so daß gilt: $\varnothing$ und X gehören zu $\mathcal{T}$, endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{T}$ gehören wieder zu $\mathcal{T}$. Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden die „offenen Mengen" von X genannt. Komplemente von offenen Mengen heißen „abgeschlossen".

Offensichtlich ist der Durchschnitt zweier Umgebungen eines Punktes $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ wieder eine Umgebung von z_0. Daraus folgt ganz leicht, daß $\overline{\mathbb{C}}$ mit den oben definierten offenen Mengen ein topologischer Raum ist.

2) Seien $z_0, w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \neq w_0$. Um zu zeigen, daß $\overline{\mathbb{C}}$ ein Hausdorffscher Raum ist, müssen wir disjunkte Umgebungen dieser Punkte finden. Liegen beide Punkte in $\mathbb{C}$, so ist das kein Problem, denn der $\mathbb{R}^2$ erfüllt bekanntlich das Hausdorffsche Axiom. Sei also $z_0 = \infty$ und $w_0 \in \mathbb{C}$. Wir können dann ein $\varepsilon > 0$ und ein $R > 0$ mit $|w_0| + \varepsilon < R$ finden. Setzen wir $U := D_\varepsilon(w_0)$ und $V := \{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)})$, so ist $U = U(w_0)$ und $V = V(\infty)$, und es ist $U \cap V = \varnothing$, denn für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$ gilt:

$$|z - w_0| \geq |z| - |w_0| > R - (R - \varepsilon) = \varepsilon,$$

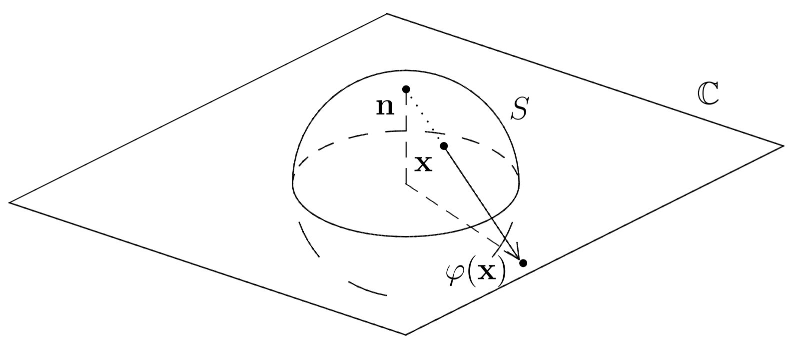
d.h. $z \notin U$.

In einem Hausdorffraum ist offensichtlich jede einpunktige Menge abgeschlossen.

3) Ein Hausdorffscher topologischer Raum X heißt bekanntlich kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Sei also $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$. Dann gibt es ein $\iota_0 \in I$, so daß $\infty \in U_{\iota_0}$ ist. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C} \setminus K \subset U_{\iota_0}$.

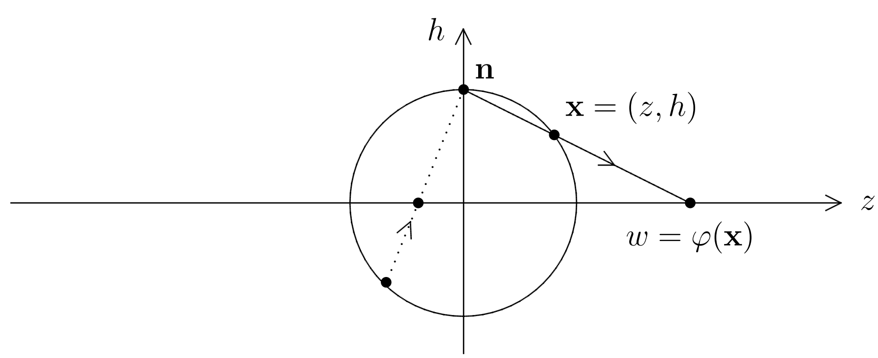
Für $\iota \in I$ sei $U'_\iota := U_\iota \setminus \{\infty\}$. Da in $\overline{\mathbb{C}}$ jede einpunktige Menge abgeschlossen ist, sind die U'_ι offen. Insbesondere bildet $(U'_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von K in $\mathbb{C}$. Ist $I_0 \subset I$ endlich, so daß schon $(U'_\iota)_{\iota \in I_0}$ eine Überdeckung von K ist, so stellt $\{U_\iota \mid \iota \in I_0\} \cup \{U_{\iota_0}\}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$ dar. ■

Das ist ein wenig seltsam! $\mathbb{C}$ ist weit davon entfernt, kompakt zu sein. Fügt man aber noch einen einzigen Punkt hinzu, so wird das Ergebnis kompakt. Um das besser zu verstehen, geben wir eine anschauliche Deutung für $\overline{\mathbb{C}}$.



Sei $S := S^2 = \{(z, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + h^2 = 1\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} := (0, 1) \in S$ der „Nordpol“. Dann wird die *stereographische Projektion* $\varphi : S \setminus \{\mathbf{n}\} \to \mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:

Ist $\mathbf{x} = (z, h) \in S \setminus \{\mathbf{n}\}$, so trifft der Strahl, der von $\mathbf{n}$ ausgeht und bei $\mathbf{x}$ die Sphäre S durchstößt, in einem Punkt $\varphi(\mathbf{x})$ die komplexe Ebene:



Ist $w = \varphi(z,h)$, so liegen w und z auf dem gleichen Strahl in $\mathbb{C}$, der von 0 ausgeht. Also muß $w = \lambda z$ sein, mit einem reellen Faktor $\lambda > 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: Ist $h > 0$, so ist $z \neq 0$, $\lambda > 1$, und nach dem Strahlensatz besteht das Verhältnis

$$h : 1 = |w - z| : |w|.$$

Also ist $h = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$, und daher $\lambda = \dfrac{1}{1-h}$.

Ist $-1 < h < 0$, so ist ebenfalls $z \neq 0$ und $0 < \lambda < 1$, und man kommt zum gleichen Ergebnis. Schließlich ist $\varphi(0,-1) = 0$. Somit ist die stereographische Projektion gegeben durch

$$\boxed{\varphi(z,h) = \frac{1}{1-h} \cdot z.}$$

Diese Abbildung ist sogar bijektiv! Ist nämlich $w \in \mathbb{C}$, so ist der Strahl, der von $\mathbf{n}$ aus durch w geht, gegeben durch die Menge

$$\{(t(w,0) + (1-t)(0,1) \, : \, t \geq 0\} = \{(tw, 1-t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t \geq 0\}.$$

Es gibt genau ein t mit $|tw|^2 + (1-t)^2 = 1$, nämlich $t = \dfrac{2}{|w|^2 + 1}$. Bei diesem Parameter trifft der Strahl die Sphäre im Punkt

$$\boxed{\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right).}$$

φ und φ^{-1} sind beides stetige Abbildungen. Nähert sich $\mathbf{x} = (z,h) \in S$ dem Nordpol $(0,1)$, so wandert $\varphi(\mathbf{x})$ immer weiter ins Unendliche, denn es ist

$$|\varphi(z,h)|^2 = \frac{|z|^2}{(1-h)^2} = \frac{1-h^2}{(1-h)^2} = \frac{1+h}{1-h}\ .$$

Wir wollen sehen, daß man φ zu einer stetigen Abbildung $\widehat{\varphi} : S \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen kann, mit $\widehat{\varphi}(\mathbf{n}) = \infty$. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

Definition. Sei (z_ν) eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge *konvergiert gegen eine komplexe Zahl* z_0, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \nu_0, \text{ so daß } \forall\, \nu \geq \nu_0 \text{ gilt: } |z_\nu - z_0| < \varepsilon.$$

Die Folge *konvergiert gegen* ∞, falls gilt:

$$\forall\, R > 0 \ \exists\, \nu_0, \text{ so daß } |z_\nu| > R \text{ für alle } \nu \geq \nu_0 \text{ ist.}$$

Damit konvergiert (z_ν) genau dann gegen ∞, wenn $1/z_\nu$ gegen 0 konvergiert. Analog werden auch *Häufungspunkte* von komplexen Zahlenfolgen definiert. Eine Menge in $\mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls sie in einer Kreisscheibe $D_r(0)$ enthalten ist. Eine Folge heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgeglieder beschränkt ist. Auch in $\mathbb{C}$ gilt der **Satz von Bolzano-Weierstraß**: Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt. Und wie üblich kann man eine Teilfolge konstruieren, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert.

Ist (z_ν) eine unbeschränkte Folge komplexer Zahlen, so gibt es zu jedem $R > 0$ ein Folgeglied z_ν mit $|z_\nu| > R$. Aber das bedeutet, daß ∞ ein Häufungspunkt der Folge ist. Also hat in $\overline{\mathbb{C}}$ **jede** Folge einen Häufungspunkt. Das liegt daran, daß $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt ist.

Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. Wir nennen f in z_0 *stetig*, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0, \text{ so daß für } z \in G \text{ gilt: } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Diese Bedingung läßt sich schlecht auf den unendlich fernen Punkt übertragen. Es gibt aber äquivalente Bedingungen, z.B.:

$$\forall \text{ Umgebungen } V(f(z_0)) \ \exists \text{ Umgebung } U(z_0) \text{ mit } f(U) \subset V\,.$$

Wenden wir das z.B. auf die *Inversion* $I : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (mit $I(z) = 1/z$) an! Sei V eine Umgebung von ∞ in $\overline{\mathbb{C}}$. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$, so daß $\mathbb{C} \setminus K \subset V$ ist. Da K in einer Kreisscheibe $D_r(0)$ liegt, gehört $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ erst recht zu V. Sei nun $\varepsilon := 1/r$ und $z \in U := D_\varepsilon(0)$. Dann ist $|I(z)| = 1/|z| > 1/\varepsilon = r$. Das bedeutet, daß $I(U) \subset V$ ist. Die Inversion ist stetig im Nullpunkt. Ähnlich kann man zeigen, daß sie auch in ∞ stetig ist.

Nun ist klar, daß die Fortsetzung $\widehat{\varphi}$ der stereographischen Projektion S stetig auf $\overline{\mathbb{C}}$ abbildet. Offensichtlich ist auch $\widehat{\varphi}$ umkehrbar, und man überzeugt sich leicht davon, daß $\widehat{\varphi}$ ein Homöomorphismus (also stetig in beiden Richtungen) ist. Jetzt ist klar, wie die „Kompaktifizierung“ von $\mathbb{C}$ funktioniert.

Man kann sich S als ein Modell für $\overline{\mathbb{C}}$ vorstellen. Zwar stimmen im Modell die Entfernungen nicht mehr, aber man kann zeigen, daß die Winkel unter der Abbildung φ erhalten bleiben. Und die Kreise auf S entsprechen eineindeutig den Kreisen in $\mathbb{C}$, wenn man Geraden als Kreise durch ∞ auffaßt. Letzteres wollen wir hier auch beweisen:

2.4 Lemma. *Jede Gerade und jeder Kreis kann durch eine Menge der Gestalt*

$$M = \{\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ *und* $c\bar{c} > \alpha\delta$ *beschrieben werden.*

Ist $\alpha = 0$, *so liegt eine Gerade vor, andernfalls ein Kreis.*

BEWEIS:
1) Ist $\alpha = 0$, so muß automatisch $c \neq 0$ sein, und die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

ist eine Gerade. Umgekehrt kann jede Gerade so geschrieben werden.

2) Ist $\alpha \neq 0$, so kann man dadurch dividieren, also o.B.d.A. annehmen, daß $\alpha = 1$ ist. Dann ist $r := \sqrt{c\bar{c} - \delta}$ eine positive reelle Zahl, und der Kreis um $u := -\bar{c}$ mit Radius r ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |z-u| = r &\iff (z-u)(\bar{z}-\bar{u}) = r^2 \\ &\iff z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + (u\bar{u} - r^2) = 0 \\ &\iff z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0. \end{aligned}$$

■

2.5 Satz. *Die stereographische Projektion bildet Kreise auf S^2 auf Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ ab.*

BEWEIS: Ein Kreis auf $S = S^2$ ist der Durchschnitt von S mit einer Ebene

$$E := \{(z,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid cz + \overline{cz} + \varrho h + \sigma = 0\},$$

mit $(c, \varrho) \neq (0,0)$. Der Abstand der Ebene E vom Ursprung ist die Zahl

$$d := \frac{|\sigma|}{\sqrt{4c\bar{c} + \varrho^2}}.$$

Damit E und S sich tatsächlich in einem Kreis treffen, muß $d < 1$ sein, also $\sigma^2 - \varrho^2 < 4c\bar{c}$.

Setzt man nun $\alpha := \frac{1}{2}(\sigma + \varrho)$ und $\delta := \frac{1}{2}(\sigma - \varrho)$, so ist $\alpha\delta < c\bar{c}$. Für $(z,h) \in S \cap E$ und $w := \varphi(z,h)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \alpha w\overline{w} + cw + \overline{cw} + \delta &= \alpha\frac{1+h}{1-h} + \frac{cz}{1-h} + \frac{\overline{cz}}{1-h} + \delta \\ &= \frac{1}{1-h} \cdot (\alpha(1+h) + cz + \overline{cz} + \delta(1-h)) \\ &= \frac{1}{1-h} \cdot (cz + \overline{cz} + (\alpha - \delta)h + (\alpha + \delta)) \\ &= \frac{1}{1-h} \cdot (cz + \overline{cz} + \varrho h + \sigma) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt genauso, daß das Urbild einer solchen Kurve auf S ein Kreis ist. ■

Wir betrachten nun eine wichtige Klasse von komplexen Funktionen.

Definition. Eine *(gebrochen) lineare Transformation* oder *Möbius-Transformation* ist eine Abbildung der Gestalt

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad - bc \neq 0.$$

Die Funktion T ist für alle $z \neq -\dfrac{d}{c}$ definiert und stetig.

Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle.

1. Fall: $c = 0$.
Setzt man $A := \dfrac{a}{d}$ und $B := \dfrac{b}{d}$, so erhält man die komplexe affin-lineare Funktion

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

Da A eine komplexe Zahl ist, stellt die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ eine Drehstreckung dar. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene.

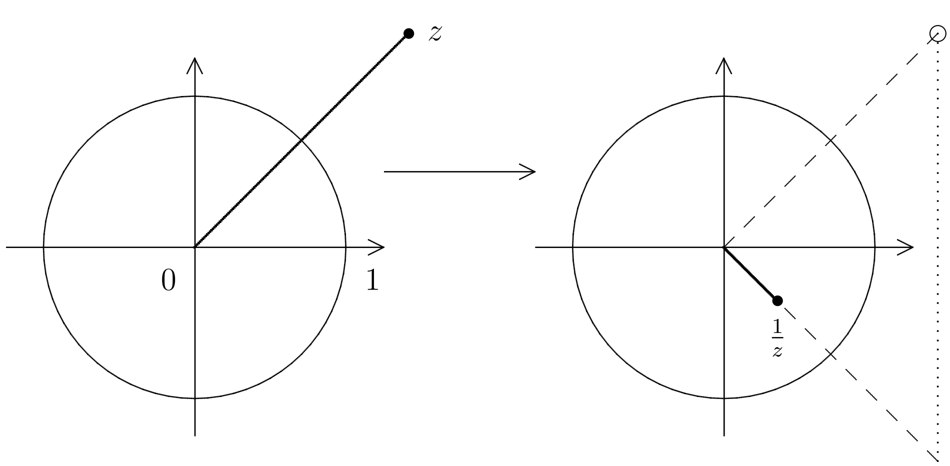
2. Fall: Die „Inversion" $I(z) := \dfrac{1}{z}$. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z}.$$

Schreibt man z in der Form $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i}\,\sin t)$, mit reellem $r > 0$ und $t \in [0, 2\pi)$, so ist $z\bar{z} = r^2$ und $\bar{z} = r \cdot (\cos t - \mathrm{i}\,\sin t)$. Also gilt:

$$|I(z)| = \frac{1}{|z|} \quad \text{und} \quad \arg(I(z)) = -\arg(z)\,.$$

Für $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i}\,\sin t)$ bedeutet der Übergang $r \mapsto 1/r$ eine Spiegelung am Einheitskreis, der Übergang $t \mapsto -t$ eine Spiegelung an der x–Achse.



Ist $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ eine beliebige Möbius-Transformation mit $c \neq 0$, so setzen wir

$$A := \frac{bc - ad}{c} \quad \text{und} \quad B := \frac{a}{c}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz+d} + B &= \frac{(a(cz+d) + (bc-ad)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{az+b}{cz+d} \quad = \quad T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

2.6 Satz. *Eine lineare Transformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ac - bd \neq 0$ bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.*

Zum BEWEIS betrachten wir eine Menge der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$. Wir müssen zeigen, daß $T(M)$ wieder eine solche Gestalt hat:

Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Sei $w = Az + B$. Dann gilt:

$$z = Cw + D, \text{ mit } C := \frac{1}{A} \text{ und } D := -\frac{B}{A}.$$

Liegt $z \in M$, dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(Cw+D)(\overline{Cw+D}) + c(Cw+D) + \bar{c}(\overline{Cw+D}) + \delta \\ &= (\alpha C\bar{D})w\bar{w} + (\alpha C\bar{D} + cC)w + (\alpha\bar{C}D + \bar{c}\bar{C})\bar{w} \\ &\quad + (\alpha D\bar{D} + cD + \bar{c}\bar{D} + \delta), \end{aligned}$$

Also liegt w wieder auf einer Menge vom gewünschten Typ.

2) Nun sei $w = \dfrac{1}{z}$. Dann ist auch $z = \dfrac{1}{w}$, und es gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muß, können wir mit $w\bar{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Auch hier ist das Bild von M wieder eine Menge vom gewünschten Typ. ∎

Man kann T_A zu einer Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ nach $\overline{\mathbb{C}}$ erweitern. Dabei bildet eine affin-lineare Transformation ∞ auf ∞ ab, und die Inversion bildet 0 auf ∞ und ∞ auf 0 ab. Allgemein ist

$$T_A(-\frac{d}{c}) = \infty \quad \text{und} \quad T_A(\infty) = \frac{a}{c}\,.$$

Die erweiterte Abbildung ist ein Homöomorphismus.

§ 3 Potenzreihen

Eine *unendliche Reihe* komplexer Zahlen $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ heißt *konvergent*, falls die Folge ihrer Partialsummen

$$S_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu$$

konvergiert. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|$ konvergiert. Es gelten die gleichen Sätze und Konvergenzkriterien wie im Reellen, insbesondere das Quotientenkriterium für die absolute Konvergenz.

Wir kommen jetzt zu Funktionen-Folgen und -Reihen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexwertigen Funktionen auf M.

1. (f_ν) *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion f auf M, falls für alle $z \in M$ gilt: $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z) = f(z)$.

2. (f_ν) *konvergiert auf M gleichmäßig* gegen f, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0, \text{ s.d. } \forall\, \nu \geq \nu_0 \text{ und } \forall\, z \in M\ :\ |f_\nu(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

3. (f_ν) *konvergiert auf M lokal gleichmäßig* gegen f, wenn es zu jedem $z \in M$ eine offene Umgebung $U = U(z) \subset \mathbb{C}$ gibt, so daß (f_ν) auf $U \cap M$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

4. (f_ν) *konvergiert auf M kompakt* gegen f, wenn (f_ν) auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset M$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

5. (f_ν) ist eine *Cauchy-Folge auf M*, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0, \text{ s.d. } \forall\, \nu, \mu \geq \nu_0 \text{ und } \forall\, z \in M\ :\ |f_\nu(z) - f_\mu(z)| < \varepsilon.$$

Der folgende Satz wird wie im Reellen bewiesen:

3.1 Satz. *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf M.*

1. *$(f)_\nu$ ist genau dann eine Cauchy-Folge auf M, wenn (f_ν) auf M gleichmäßig konvergiert.*
2. *Sind alle f_ν stetig und konvergiert (f_ν) auf M gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, so ist auch f auf M stetig.*

3.2 Satz. *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf M.*

1. *Es gelten folgende Implikationen:*

$$\begin{aligned} \textit{gleichmäßig konvergent} &\Longrightarrow \textit{lokal gleichmäßig konvergent} \\ &\Longrightarrow \textit{kompakt konvergent} \\ &\Longrightarrow \textit{punktweise konvergent.} \end{aligned}$$

2. *Ist M kompakt, so gilt auf M :*

$$\textit{lokal gleichmäßig konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \textit{gleichmäßig konvergent.}$$

Der BEWEIS ist trivial. Da jeder Punkt eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ eine in G enthaltene kompakte Umgebung besitzt, ist auf Gebieten die kompakte Konvergenz äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz. Sie hat aber i.a. nicht die (globale) gleichmäßige Konvergenz zur Folge.

Die obigen Begriffe übertragen sich in gewohnter Weise auf *Reihen von Funktionen*, die man ja als Folgen ihrer Partialsummen auffassen kann. Zusätzlich sagt man:

Definition. Eine Reihe von Funktionen $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ heißt *auf M absolut konvergent*, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu(z)|$ für jedes $z \in M$ konvergiert.

3.3 Satz (Majorantenkriterium von Weierstraß). *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf M. Weiter sei (a_ν) eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, und es gelte:*

1. *$|f_\nu(z)| \leq a_\nu$, für alle $z \in M$ und alle $\nu \geq \nu_0$.*
2. *$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$.*

Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ *auf* M *absolut und gleichmäßig.*

BEWEIS: Die absolute Konvergenz ist trivialerweise gegeben.

Sei nun $s_N := \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu$ und $S_N(z) := \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu(z)$. Dann konvergiert (s_N) gegen eine reelle Zahl, ist also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, $z \in M$ beliebig und $N_0 \in \mathbb{N}$ genügend groß gewählt, so gilt für $N > M \geq N_0$:

$$\begin{aligned} |S_N(z) - S_M(z)| &= |\sum_{\nu=M+1}^{N} f_\nu(z)| \\ &\leq \sum_{\nu=M+1}^{N} |f_\nu(z)| \\ &\leq \sum_{\nu=M+1}^{N} a_\nu \\ &= |s_N - s_M| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist (S_N) eine Cauchy-Folge auf M und konvergiert somit gleichmäßig. ∎

Da man den Satz auch direkt auf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}|f_\nu|$ anwenden kann, ist klar, daß auch diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Darüber hinaus darf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ beliebig umgeordnet werden, ohne daß sich an der Konvergenz etwas ändert.

Sei (c_n) eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* a. Die Zahlen c_n heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Den folgenden Satz habe ich schon in Analysis 1 bewiesen:

3.4 Satz. *Die Potenzreihe* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *konvergiere für ein* $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$. *Es sei* $0 < \varrho < |z_1 - a|$. *Dann konvergiert* $f(z)$ *auf der abgeschlossenen Kreisscheibe* $\overline{D_\varrho(a)}$ *absolut und gleichmäßig, und die Reihe*

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$$

konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig auf $\overline{D_\varrho(a)}$.

BEWEIS: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß $|c_n(z_1-a)^n| \le M$ für alle n ist. Und da $\varrho < |z_1 - a|$ sein soll, ist $q := \dfrac{\varrho}{|z_1-a|} < 1$.

Für alle z mit $|z-a| \le \varrho$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |c_n(z-a)^n| &= |c_n(z_1-a)^n| \cdot |\frac{z-a}{z_1-a}|^n \\ &\le M \cdot q^n. \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n$ konvergiert. Mit dem Weierstraßkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{D_\varrho(a)}$ konvergiert.

2) Nach (1) ist $|n \cdot c_n(z-a)^{n-1}| \le n \cdot M \cdot q^{n-1}$, und

$$\frac{(n+1)\cdot M \cdot q^n}{n \cdot M \cdot q^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q$$

konvergiert gegen $q < 1$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot M \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ auf $\overline{D_\varrho(a)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. ∎

Definition. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Die Zahl

$$R := \sup\{r \ge 0 \mid \exists\, z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |z_1 - a|, \text{ so daß } f(z) \text{ in } z_1 \text{ konvergiert}\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen!

Der Kreis um a mit Radius R heißt der *Konvergenzkreis* der Reihe.

3.5 Satz. *R sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$. Dann gilt:*

1. *Für $0 < r < R$ konvergiert $f(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ absolut und gleichmäßig.*
2. *Ist $|z_1 - a| > R$, so divergiert $f(z)$ in z_1.*

BEWEIS: 1) ist klar, wegen des obigen Satzes.

2) Nach Definition von R kann $f(z)$ in einem Punkt z_1 mit $|z_1 - a| > R$ nicht mehr konvergieren. ∎

3.6 Satz. *Hat $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ den Konvergenzradius R, so ist $f(z)$ im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ stetig.*

BEWEIS: Jedes komplexe Polynom ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig. Die Folge der Partialsummen der gegebenen Potenzreihe ist eine Folge von komplexen Polynomen, und sie konvergiert auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_\varrho(a)}$, $0 \le \varrho < R$, gleichmäßig. Deshalb ist auch die Grenzfunktion f dort stetig. ∎

Für den Konvergenzradius gibt es verschiedene Berechnungsmethoden:

3.7 Lemma von Abel. *Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Dann ist*

$$R = \sup\{r \ge 0 \mid (|c_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt }\}.$$

BEWEIS: Sei r_0 der Wert auf der rechten Seite der Gleichung.

Wenn eine Reihe nicht-negativer reeller Zahlen konvergiert, dann bilden ihre Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Ist also $r < R$ und $|z-a| = r$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n < \infty$ und damit $(|c_n|r^n)$ beschränkt, d.h., $r \le r_0$. Das bedeutet, daß $R \le r_0$ ist.

Da $R > 0$ vorausgesetzt wurde, muß auch $r_0 > 0$ sein. Ist nun $0 < r < r_0$, so kann man noch ein r' mit $r < r' < r_0$ finden. Dann ist $(|c_n|(r')^n)$ beschränkt, etwa durch eine Konstante M. Wir setzen $q := \dfrac{r}{r'}$ und erhalten:

1. $0 < q < 1$.
2. $|c_n|r^n = |c_n|(r'q)^n \le M \cdot q^n$.

Mit dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$, also $r \le R$.

Aber damit ist $r_0 \le R$. ∎

3.8 Folgerung. *Die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ und die reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ haben den gleichen Konvergenzradius.*

3.9 Formel von Cauchy-Hadamard. *Sei* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe und* $c := \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}$.
Dann gilt für den Konvergenzradius R *der Potenzreihe:*

1. *Wenn* c *eine endliche Zahl* > 0 *ist, dann ist* $R = \dfrac{1}{c}$.
2. *Wenn* $c = \infty$ *ist, dann ist* $R = 0$.
3. *Wenn* $c = 0$ *ist, dann ist* $R = \infty$.

Beweis: Für reelle Potenzreihen ist die Formel von Cauchy-Hadamard aus der Analysis bekannt. Aber die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe. ∎

Beispiel.

Die Reihen

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \text{und} \qquad \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ und stellen dort stetige Funktionen dar. Auf $\mathbb{R}$ stimmen sie natürlich mit den bekannten Funktionen überein.

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt die **Eulersche Formel**:

$$\boxed{\exp(\mathrm{i}t) = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\,.}$$

Da die Exponentialreihe absolut konvergiert, sind nämlich beliebige Umordnungen erlaubt, und so folgt:

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(\mathrm{i}t)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(\mathrm{i}t)^{2k+1} \\ &= \cos(t) + \mathrm{i} \cdot \sin(t). \end{aligned}$$

Schreiben wir $e^{\mathrm{i}t}$ an Stelle von $\exp(\mathrm{i}t)$, so hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eine Polarkoordinatendarstellung $z = r \cdot e^{\mathrm{i}t}$, mit $r > 0$ und $t \in [0, 2\pi)$.

3.10 Identitätssatz. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < R$, so daß $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \varepsilon$ ist, so ist $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS: Zunächst ist $0 = f(0) = c_0$.

Für $0 < |x| < \varepsilon$ ist also $0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$ und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = 0$. Aus Stetigkeitsgründen muß diese Gleichung auch für $x = 0$ gelten, d.h. es ist $c_1 = 0$. Per Induktion folgt die Behauptung. ∎

Summen und Produkte konvergenter Potenzreihen (mit gleichem Entwicklungspunkt) sind im gemeinsamen Konvergenzgebiet wieder konvergent, und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

und

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big) z^n \,.$$

Bewiesen wird das wie im Reellen. Entscheidend ist die absolute Konvergenz.

3.11 Satz (Additionstheorem). *Es ist $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.*

BEWEIS: Auf Grund der eben gemachten Bemerkung kann der Satz wie im Reellen mit Hilfe der Produktformel für Potenzreihen bewiesen werden. ∎

3.12 Folgerung. *Es ist $\exp(z + 2\pi \mathrm{i}) = \exp(z)$, für alle $z \in \mathbb{C}$.*

BEWEIS: Es ist $\exp(2\pi \mathrm{i}) = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\, \sin(2\pi) = 1$, also

$$\exp(z + 2\pi \mathrm{i}) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}) = \exp(z).$$

Das ist alles! ∎

Die Exponentialfunktion ist also über $\mathbb{C}$ periodisch! Wir haben hier ein erstes Indiz dafür, daß wir im Komplexen neue Informationen über die aus dem Reellen bekannten elementaren Funktionen erhalten.

Ist $p(X_1, \ldots, X_k)$ ein (komplexes) Polynom in k Veränderlichen und sind $f_1, \ldots, f_k$ Potenzreihen um 0, die in $D_r(0)$ konvergieren, so ist auch $p(f_1(z), \ldots, f_k(z))$ eine Potenzreihe um 0, die in $D_r(0)$ konvergiert. Auf diese Weise können z.B. Relationen aus dem Reellen ins Komplexe übertragen werden.

Ist etwa $p(X_1, X_2) := X_1^2 + X_2^2 - 1$, so verschwindet $p(\sin(x), \cos(x))$ für reelle x, und dann muß wegen des Identitätssatzes sogar $p(\sin(z), \cos(z)) \equiv 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ sein, also

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) \equiv 1\,.$$

Auch viele andere Relationen, die aus dem Reellen bekannt sind, kann man so oder mit Hilfe des Additionstheorems der Exponentialfunktion ins Komplexe übertragen:

1. $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ und $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$,
2. $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$,
3. $\sin(-z) = -\sin(z)$ und $\cos(-z) = \cos(z)$,
4. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,
5. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

Man bekommt aber auch neue Relationen, z.B.:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{\mathsf{i}z} + e^{-\mathsf{i}z}) \\ \text{und} \quad \sin(z) &= \frac{1}{2\mathsf{i}}(e^{\mathsf{i}z} - e^{-\mathsf{i}z}), \end{aligned}$$

denn für reelle Argumente folgen diese Gleichungen aus der Eulerschen Formel.

Daraus folgt die Eulersche Formel für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(\mathsf{i}z) = \cos(z) + \mathsf{i}\sin(z)\,.$$

§ 4 Komplexe Differenzierbarkeit

Der wichtigste Begriff in der Analysis ist die „Differenzierbarkeit“. Sieht man einmal von der anschaulichen Bedeutung der Ableitung ab, so liefert der Differential-Kalkül zunächst einmal einen handlichen algebraischen Apparat zur Untersuchung von Funktionen. Um z.B. die Ableitung von $f(x) = x^n$ zu berechnen, braucht man keine Grenzwertuntersuchungen. Als Euler seinerzeit recht sorglos begann, mit komplexen Zahlen, komplexen Funktionen und Reihen zu rechnen, benutzte er die üblichen Regeln:

$$\begin{aligned} (z^n)' &= n \cdot z^{n-1}\,, \\ (e^z)' &= e^z\,, \\ \sin'(z) &= \cos(z) \\ \text{und } \cos'(z) &= -\sin(z)\,. \end{aligned}$$

Das erreicht man offensichtlich mit folgender Definition:

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. f heißt in z_0 *komplex differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Die komplexe Zahl $f'(z_0)$ nennt man dann die *Ableitung* von f in z_0.

f heißt auf G komplex differenzierbar, falls f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.

Beispiele.

1. Weil $z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}$ ist, ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = n \cdot z_0^{n-1}\,.$$

2. Es ist

$$\exp(z) - \exp(z_0) = \exp(z_0) \cdot (\exp(z - z_0) - 1) = \exp(z_0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z - z_0)^n\,,$$

also

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0).$$

Daß das alles so schön geht, liegt daran, daß $\mathbb{C}$ eben mehr als der $\mathbb{R}^2$ ist. $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Im $\mathbb{R}^2$ ist alles komplizierter. Zur Erinnerung:

f heißt in z_0 *(reell) differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte Funktion r gibt, so daß gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ für z nahe z_0.
2. $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L nennt man die *Ableitung* von f in z_0 und bezeichnet sie mit $Df(z_0)$.

Die komplexen Zahlen

$$f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := Df(z_0)(1) \quad \text{und} \quad f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := Df(z_0)(\mathrm{i})$$

nennt man die *partiellen Ableitungen* von f nach x und y. Ist $f = g + \mathrm{i}h$, so gilt:

$$f_x(z_0) = g_x(z_0) + \mathrm{i}h_x(z_0) \quad \text{und } f_y(z_0) = g_y(z_0) + \mathrm{i}h_y(z_0).$$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Df(z_0)$ wird bezüglich der Basis $\{1, \mathrm{i}\}$ durch die Funktionalmatrix

$$J_f(z_0) := \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Erinnert man sich nun daran, daß $\mathbb{C}$ nicht nur zum $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ isomorph, sondern sogar selbst ein Körper ist, so kann man sich fragen, wann eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zusätzlich $\mathbb{C}$-linear ist. Offensichtlich ist das genau dann der Fall, wenn es eine komplexe Zahl c_0 gibt, so daß $L(w) = c_0 \cdot w$ ist. Schreibt man $c_0 = a_0 + \mathrm{i}\, b_0$, so ist

$$c_0 \cdot 1 = a_0 + \mathrm{i}\, b_0 \quad \text{und} \quad c_0 \cdot \mathrm{i} = -b_0 + \mathrm{i}\, a_0 .$$

Das bedeutet, daß L bezüglich $\{1, \mathrm{i}\}$ durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Das ist der Schlüssel zum Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit.

4.1 Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.*
2. *Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : G \to \mathbb{C}$, so daß für alle $z \in G$ gilt:*

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0).$$

3. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
4. *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die*

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$g_x = h_y \quad \textit{und} \quad g_y = -h_x.$$

BEWEIS:

(1) $\Longrightarrow$ (2): Ist $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, so gibt es eine komplexe Zahl c_0, so daß $Df(z_0)(w) = c_0 \cdot w$ ist. Wir setzen

$$\Delta(z) := c_0 + \frac{r(z - z_0)}{z - z_0}.$$

Eigentlich ist Δ dann nur für $z \neq z_0$ definiert, kann aber durch $\Delta(z_0) := c_0$ stetig ergänzt werden. Für z nahe z_0 gilt nun:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + c_0 \cdot (z - z_0) + r(z - z_0) \\ &= f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0). \end{aligned}$$

Außerhalb von z_0 ist $\Delta(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ der „Differenzen-Quotient“, und deshalb ist Δ auf ganz G definiert.

(2) $\iff$ (3): Klar, denn nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \Delta(z)$.

(2) $\implies$ (4): Setzt man $L(h) := \Delta(z_0) \cdot h$ und $r(h) := (\Delta(z_0 + h) - \Delta(z_0)) \cdot h$, so ist L $\mathbb{C}$-linear (und damit erst recht $\mathbb{R}$-linear), und es gilt $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$, sowie $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. Also ist f in z_0 reell differenzierbar, und da die Ableitung durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben ist, muß die Funktionalmatrix die Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ haben, es muß also $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$ sein.

(4) $\implies$ (1): f ist nach Voraussetzung differenzierbar, und die Funktionalmatrix $\begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ h_x & g_x \end{pmatrix}$ beschreibt die Multiplikation mit der komplexen Zahl $f_x(z_0)$. Also ist $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear. ∎

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$f'(z_0) := Df(z_0)(1) = \Delta(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_x(z_0) = -\mathrm{i} f_y(z_0).$$

(Zur letzten Gleichung: $-\mathrm{i} f_y = -\mathrm{i}(g_y + \mathrm{i} h_y) = h_y - \mathrm{i} g_y = g_x + \mathrm{i} h_x = f_x$.)

Beispiele.

1. Sei $f(z) := z\overline{z}$. Dann ist $f(z) - f(0) = \overline{z} \cdot (z - 0)$. Also ist f in $z_0 := 0$ komplex differenzierbar und $f'(0) = 0$.

2. Sei $f(z) \equiv c$ eine konstante Funktion auf G. Man sieht sofort, daß f dann überall komplex differenzierbar und $f'(z) \equiv 0$ ist.

   Ist umgekehrt $f'(z) \equiv 0$ auf dem Gebiet G, so folgt aus der Analysis, daß f lokal-konstant ist. Aber dann muß f sogar konstant sein.

4.2 Satz. *$f, g : G \to \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, $a, b \in \mathbb{C}$ seien Konstanten.*

1. *$a \cdot f + b \cdot g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$\begin{aligned} (a \cdot f + b \cdot g)'(z_0) &= a \cdot f'(z_0) + b \cdot g'(z_0) \\ \textit{und} \qquad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \end{aligned}$$

2. *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0, $\dfrac{f}{g}$ ist in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. *Ist f in $w_0 := g(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $f \circ g$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(w_0) \cdot g'(z_0).$$

Der BEWEIS geht genauso wie im Reellen. Exemplarisch soll hier nur die Kettenregel bewiesen werden:

Ist $g(z) = g(z_0) + \Delta^*(z) \cdot (z - z_0)$ und $f(w) = f(w_0) + \Delta^{**}(w) \cdot (w - w_0)$, so folgt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(z) &= f(w_0) + \Delta^{**}(g(z)) \cdot (g(z) - w_0) \\ &= (f \circ g)(z_0) + \Delta^{**}(g(z)) \cdot \Delta^*(z) \cdot (z - z_0). \end{aligned}$$

Nun kann man $\Delta(z) := \Delta^{**}(g(z)) \cdot \Delta^*(z)$ setzen.

Beispiele.

1. Die komplexen Polynome $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, die Ableitung gewinnt man in gewohnter Weise.

2. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich komplex differenzierbar. Das gilt insbesondere für alle Möbius-Transformationen.

3. Die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ ist in keinem Punkt $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar, denn sonst wäre dort auch die Funktion

$$k(z) := \overline{z} = \frac{1}{z} \cdot f(z)$$

komplex differenzierbar. Es ist aber $J_k(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt!

4. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f in jedem Punkt z des Konvergenzkreises $D_R(z_0)$ komplex differenzierbar, und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

BEWEIS: Wir wissen schon, daß die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$f^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z - z_0)^{n-1}$$

den gleichen Konvergenzradius wie $f(z)$ hat.

Wegen der absoluten Konvergenz der Potenzreihen können wir folgende Umformung machen:

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z - z_0)^n.$$

Das zeigt, daß f im Entwicklungspunkt z_0 differenzierbar und $f'(z_0) = c_1$ ist.

Schwieriger wird es, wenn wir die komplexe Differenzierbarkeit von $f(z)$ in einem beliebigen Punkt z_1 des Konvergenzkreises $D_R(z_0)$ zeigen wollen. Um die Schreibarbeit zu verringern, betrachten wir nur den Fall $z_0 = 0$.

Ist $F_N(z) := \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ die N–te Partialsumme von $f(z)$, so ist

$$\begin{aligned} F_N(z) - F_N(z_1) &= \sum_{n=1}^{N} c_n (z^n - z_1^n) \\ &= (z - z_1) \cdot \Delta_N(z), \end{aligned}$$

mit

$$\Delta_N(z) := \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_1^{n-i-1}.$$

Wir wählen ein r mit $0 < r < R$, so daß $|z_1| < r$ ist. Für $z \in D_r(0)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_1^{n-i-1}| &\leq |c_n| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i |z_1|^{n-i-1} \\ &\leq |c_n| \cdot n \cdot r^{n-1}. \end{aligned}$$

Da $f^*(z)$ auf $\overline{D_r(0)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, konvergiert insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$.

Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann $\Delta_N(z)$ gleichmäßig auf $D_r(0)$ gegen die stetige Funktion

$$\Delta(z) := \lim_{N \to \infty} \Delta_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_1^{n-i-1}.$$

Mit $\lim_{N \to \infty} F_N(z)$ und $\lim_{N \to \infty} F_N(z_1)$ existiert auch

$$\lim_{N \to \infty} (F_N(z) - F_N(z_1)) = \lim_{N \to \infty} F_N(z) - \lim_{N \to \infty} F_N(z_1) = f(z) - f(z_1).$$

Also ist

$$f(z) - f(z_1) = \lim_{N\to\infty}(F_N(z) - F_N(z_1)) = (z - z_1) \cdot \lim_{N\to\infty} \Delta_N(z) = (z - z_1) \cdot \Delta(z).$$

Damit ist f in z_1 komplex differenzierbar, und

$$f'(z_1) = \Delta(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z_1^{n-1}$$

hat den gewünschten Wert. ∎

5. Daß $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, haben wir weiter oben schon gezeigt. Es ist $\exp'(z) = \exp(z)$.
6. Aus der Beschreibung von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ durch die Exponentialfunktion folgt sofort:
$$\sin'(z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

4.3 Lemma. *Sei $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen c, c', so daß gilt:*

$$L(z) = c \cdot z + c' \cdot \overline{z}\,.$$

L ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $c' = 0$ ist. Und L ist genau dann reellwertig, wenn $c' = \overline{c}$ ist.

Beweis: Zunächst die Existenz: Wir setzen

$$c := \frac{1}{2}(L(1) - \mathsf{i} \cdot L(\mathsf{i})) \quad \text{und} \quad c' := \frac{1}{2}(L(1) + \mathsf{i} \cdot L(\mathsf{i}))\,.$$

Dann ist $c + c' = L(1)$ und $c' - c = \mathsf{i} \cdot L(\mathsf{i})$, also

$$L(x + \mathsf{i}y) = x \cdot L(1) + y \cdot L(\mathsf{i}) = x(c + c') - \mathsf{i}y(c' - c) = c(x + \mathsf{i}y) + c'(x - \mathsf{i}y)\,.$$

Zur Eindeutigkeit: Ist $c_1 \cdot z + c_1' \cdot \overline{z} = c_2 \cdot z + c_2' \cdot \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$(c_1 - c_2) \cdot z = (c_2' - c_1') \cdot \overline{z} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $z = 1$ und $z = \mathsf{i}$ ein, so erhält man die Gleichungen

$$c_1 - c_2 = c_2' - c_1' \quad \text{und} \quad c_1 - c_2 = -(c_2' - c_1')\,,$$

also $c_1' = c_2'$ und $c_1 = c_2$.

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung ist klar, daß L genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn $c' = 0$ ist.

L ist genau dann reellwertig, wenn $L(z) = \overline{L(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, also (wenn man $z = 1$ und $z = \mathrm{i}$ einsetzt) $c + c' = \overline{c} + \overline{c'}$ und $c - c' = -(\overline{c} - \overline{c'})$. Daraus folgt $c' = \overline{c}$. ■

4.4 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $f_z(z_0)$ und $f_{\overline{z}}(z_0)$, so daß gilt:*

$$Df(z_0)(h) = f_z(z_0) \cdot h + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{h}.$$

Nach den vorangegangenen Bemerkungen ist der Beweis jetzt trivial.

Definition. Die Zahlen $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) := f_z(z_0)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := f_{\overline{z}}(z_0)$ nennt man die *Wirtinger-Ableitungen von f nach z und $\overline{z}$.*

4.5 Satz (Wirtinger-Kalkül).

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ in z_0 reell differenzierbar. Dann gilt:

1. $f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - \mathrm{i} f_y(z_0))$ *und* $f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + \mathrm{i} f_y(z_0))$.
2. *f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ ist. In dem Falle ist $f_z(z_0) = f'(z_0)$.*
3. *Die Ableitungen $f \mapsto f_z(z_0)$ und $f \mapsto f_{\overline{z}}(z_0)$ sind in f $\mathbb{C}$-linear und erfüllen die Produktregel.*
4. *Höhere Wirtinger-Ableitungen werden wie üblich induktiv definiert. Insbesondere gilt für $2\times$ stetig differenzierbares f:* $f_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})$.
5. *Ist $\alpha : I \to G$ ein differenzierbarer Weg mit $\alpha(t_0) = z_0$, so ist*

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = f_z(z_0) \cdot \alpha'(t_0) + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{\alpha'(t_0)}.$$

Beweis:

1) Es ist $Df(z_0)(1) = g_x(z_0) + \mathrm{i} h_x(z_0) = f_x(z_0)$ und $Df(z_0)(\mathrm{i}) = g_y(z_0) + \mathrm{i} h_y(z_0) = f_y(z_0)$, also

$$\begin{aligned} f_z(z_0) &= \frac{1}{2}(Df(z_0)(1) - \mathrm{i} \cdot Df(z_0)(\mathrm{i})) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - \mathrm{i} f_y(z_0)) \\ \text{und} \quad f_{\overline{z}}(z_0) &= \frac{1}{2}(Df(z_0)(1) + \mathrm{i} \cdot Df(z_0)(\mathrm{i})) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + \mathrm{i} f_y(z_0)). \end{aligned}$$

2) Es gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ in } z_0 \text{ komplex diffb.} &\iff g_x(z_0) = h_y(z_0) \text{ und } g_y(z_0) = -h_x(z_0) \\ &\iff f_x(z_0) = h_y(z_0) - \mathrm{i} g_y(z_0) = -\mathrm{i} f_y(z_0) \\ &\iff f_{\overline{z}}(z_0) = 0 \text{ und } f_z(z_0) = f_x(z_0). \end{aligned}$$

3) $\mathbb{R}$-Linearität und Produktregel folgen aus den entsprechenden Regeln für $Df(z_0)$. Und offensichtlich ist

$$(\mathsf{i}f)_x = (-h + \mathsf{i}g)_x = -h_x + \mathsf{i}g_x = \mathsf{i} \cdot (g_x + \mathsf{i}h_x) = \mathsf{i} \cdot f_x$$

und analog $(\mathsf{i}f)_y = \mathsf{i} \cdot f_y$. Daraus ergibt sich die $\mathbb{C}$-Linearität.

4) Es ist $f_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}[(f_x - \mathsf{i}f_y)_x + \mathsf{i}(f_x - \mathsf{i}f_y)_y] = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})$.

5) Es ist $(f \circ \alpha)'(t) = Df(\alpha(t))(\alpha'(t)) = f_z(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) + f_{\overline{z}}(\alpha(t)) \cdot \overline{\alpha'(t)}$. ∎

4.6 Folgerung. *Es ist*

$$f_x = f_z + f_{\overline{z}} \quad \textit{und} \quad f_y = \mathsf{i}(f_z - f_{\overline{z}}).$$

Der BEWEIS ist eine simple Umformung von Aussage (1) des Satzes.

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Vorlesung.

Definition. Eine Funktion f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ *holomorph*, wenn sie in einer offenen Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist.

Komplexe Polynome sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist auf dem Konvergenzkreis der Reihe holomorph. Die Funktion $f(z) := z\overline{z}$ ist zwar in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph!

Auf Gebieten in $\mathbb{C}$ stimmen die Begriffe „holomorph auf G" und „komplex differenzierbar auf G" überein.

4.7 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

1. *Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.*
2. *Ist $|f|$ konstant, so ist auch f konstant.*

BEWEIS: 1) Nimmt $f = g + \mathsf{i}h$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$. Da f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen DGLn, und es ist $g_x = g_y = 0$. Das ist nur möglich, wenn g lokal-konstant und daher überhaupt konstant ist. Also ist auch f konstant. Im Falle rein imaginärer Werte geht es genauso.

2) Sei $|f|$ konstant. Ist diese Konstante $= 0$, so ist $f(z) \equiv 0$. Ist aber $|f| =: c \neq 0$, so ist die Funktion $f\overline{f} = c^2$ konstant und damit holomorph, und f besitzt keine Nullstellen. Daraus folgt, daß $\overline{f} = \dfrac{c^2}{f}$ holomorph ist, und damit auch $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2\mathsf{i}}(f - \overline{f})$. Wegen (1) muß f dann konstant sein. ∎

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, so ist auch $Df(z_0) \neq 0$. Setzen wir zusätzlich voraus, daß die partiellen Ableitungen von f stetig sind, so folgt aus dem Satz über inverse Abbildungen, daß es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$ gibt, so daß $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Und wie im Reellen kann man dann zeigen, daß f^{-1} in $w_0 = f(z_0)$ komplex differenzierbar ist.

Wir setzen jetzt voraus, daß $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist. Wegen der Cauchy-Riemannschen DGLn ist dann

$$\det Df(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ h_x & g_x \end{pmatrix} = (g_x)^2 + (h_x)^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Das bedeutet, daß f – aufgefaßt als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ – orientierungserhaltend ist!

Ist f holomorph, so ist $\overline{f}$ natürlich nicht holomorph. Man nennt eine solche Funktion aber *antiholomorph*. Es ist

$$\det D\overline{f}(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ -h_x & -g_x \end{pmatrix} = -|f'(z)|^2 < 0.$$

Antiholomorphe Funktionen sind orientierungsumkehrend.

Holomorphe und antiholomorphe Funktionen haben eine weitere Eigenschaft gemeinsam. Sie lassen Winkel invariant. Allerdings müssen wir erst einmal erklären, was darunter zu verstehen ist.

Sind $z = r_1 \cdot e^{\mathrm{i}t_1}$ und $w = r_2 \cdot e^{\mathrm{i}t_2}$ zwei komplexe Zahlen $\neq 0$, so verstehen wir unter dem Winkel zwischen z und w die Zahl

$$\angle(z, w) = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{falls } t_2 > t_1 \\ 2\pi + t_2 - t_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Winkel $\angle(z, w)$ wird also von z aus immer in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen.

Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zwei glatte differenzierbare Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, so setzt man

$$\angle(\alpha, \beta) := \angle(\alpha'(0), \beta'(0)).$$

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ mit nicht verschwindender Ableitung heißt in z_0 *winkeltreu*, falls für beliebige glatte differenzierbare Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gilt:

$$\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta).$$

Ist f lokal umkehrbar, überall winkeltreu und orientierungserhaltend, so nennt man f *lokal konform*. Ist f sogar global injektiv, so nennt man f *konform*.

4.8 Satz. *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, mit stetigen partiellen Ableitungen, und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$, so ist f lokal konform.*

BEWEIS: Wir müssen nur zeigen, daß f winkeltreu ist. Aber es ist

$$\begin{aligned}
\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) &= \angle((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)) \\
&= \angle(f'(z_0) \cdot \alpha'(0), f'(z_0) \cdot \beta'(0)) \\
&= \arg\Big(\frac{f'(z_0) \cdot \beta'(0)}{f'(z_0) \cdot \alpha'(0)}\Big) \\
&= \arg\Big(\frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\Big) \\
&= \angle(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

■

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ist.

Der Differentialoperator $\Delta : f \mapsto f_{xx} + f_{yy}$ heißt *Laplace-Operator*.

Sei nun $f = g + \mathrm{i}h : G \to \mathbb{C}$ wieder eine komplexwertige (und zweimal stetig reell differenzierbare) Funktion. Ist f außerdem einmal komplex differenzierbar, so gelten die CR-DGLn : $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
g_{xx} + g_{yy} &= h_{yx} - h_{xy} = 0 \\
\text{und} \quad h_{xx} + h_{yy} &= -g_{yx} + g_{xy} = 0.
\end{aligned}$$

Re(f) und Im(f) sind jeweils harmonisch! Wir werden später sehen, daß dafür schon die Holomorphie von f allein ausreicht.

Aber es kommt noch besser!

4.9 Satz. *Sei $g : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so daß $g|_U = \mathrm{Re}(f)$ ist.*

BEWEIS: Wir suchen eine in der Nähe von z_0 definierte und zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion h mit $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Wegen der ersten Gleichung wird man es mit einer Stammfunktion

$$h(x + \mathrm{i}y) = \int g_x(x + \mathrm{i}y)\, dy + C$$

versuchen. Dabei ist aber zu beachten, daß die Integrationskonstante C noch von x abhängen kann. Wie sie zu wählen ist, sollte sich aus der zweiten zu erfüllenden Gleichung ergeben. Hier sind nun die Details:

Sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in G$ fest gewählt, und U eine in G enthaltene rechteckige offene Umgebung von z_0. Für $z = x + \mathrm{i}y \in U$ setzen wir

$$h(x + \mathrm{i}y) := \int_{y_0}^{y} g_x(x + \mathrm{i}t)\, dt + \varphi(x),$$

mit einer noch näher zu bestimmenden Funktion φ.

Dann ist offensichtlich $h_y = g_x$, und

$$\begin{aligned} h_x(x + \mathrm{i}y) &= \int_{y_0}^{y} g_{xx}(x + \mathrm{i}t)\, dt + \varphi'(x) \\ &= -\int_{y_0}^{y} g_{yy}(x + \mathrm{i}t)\, dt + \varphi'(x) \\ &= -(g_y(x + \mathrm{i}y) - g_y(x + \mathrm{i}y_0) + \varphi'(x). \end{aligned}$$

Damit $h_x = -g_y$ ist, sollte $\varphi'(x) = -g_y(x + \mathrm{i}y_0)$ sein. Also setzen wir

$$\varphi(x) := -\int_{x_0}^{x} g_y(s, y_0)\, ds.$$

Die so bestimmte Funktion h ist zweimal stetig differenzierbar und hat die gewünschten Eigenschaften. ∎

Bemerkung. Sind die harmonischen Funktionen g und h Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion f, so spricht man auch von *konjugierten harmonischen Funktionen*. Man beachte aber, daß h durch g nicht eindeutig bestimmt ist.