

3. Test zur Funktionentheorie

Name:

Matr.-Nr.:

Geb.-Datum:

17) Berechnen Sie möglichst einfach $\int_{|z-1|=2} \frac{\exp(z)}{z^3} dz$.

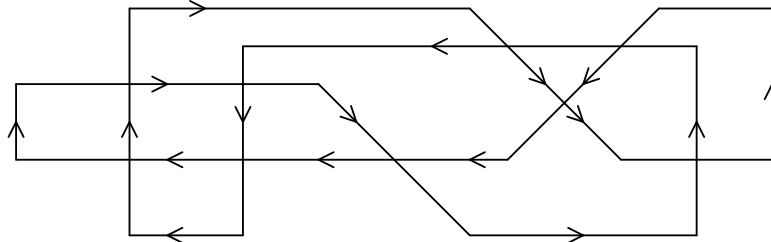
18) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, die nicht die Nullfunktion ist, so dass $f(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt?

Begründen Sie Ihre Antwort!

19) Sei $f(z) := \frac{z-2}{z+2}$. Ist $f(D_1(0))$ einfach zusammenhängend?

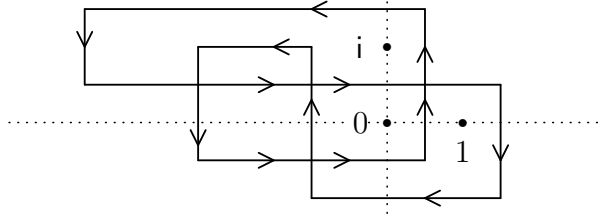
Auch hier sollen Sie Ihre Antwort begründen!

20) Tragen Sie in der folgenden Skizze alle Umlaufszahlen ein:



b.w.!

21) Ist der folgende Zyklus nullhomolog in $\mathbb{C}^*$? Warum?



(Achtung: 0, 1 und i beschreiben in der Skizze das Koordinatensystem)

22) Welcher Typ von Singularität liegt bei den folgenden Funktionen im Nullpunkt vor?

$$f(z) = z^2 \cdot \exp(1/z),$$

$$g(z) = \frac{\exp(z) - 1}{z},$$

$$h(z) = \frac{\exp(z^2)}{z}.$$

Sie haben 15 Minuten Zeit!

Daraus folgt: $\int_{\partial D_2(1)} \frac{\exp(z)}{z^3} dz = \frac{\exp^{(2)}(0)}{2} \cdot 2\pi i = \pi i$.

Lösg. zu Afg. 19: JA! f ist eine Möbius-Transformation, die für $z \neq -2$ definiert ist. Also ist f auf $D_1(0)$ holomorph und injektiv. Mit $D_1(0)$ ist dann auch $f(D_1(0))$ einfach zusammenhängend.

Lösg. zu Afg. 22: Am besten benutzt man die Laurent-Entwicklung.

$g(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!\right)/z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/(n+1)!$ hat in 0 eine hebbare Singularität.

Man kann auch mit Folgen argumentieren, das geht am besten bei $f(z)$. Eine Regel von de l'Hospital steht leider nicht zur Verfügung. Man müsste sie erst mal beweisen, um zu klären, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen.