2. Test zur Funktionentheorie

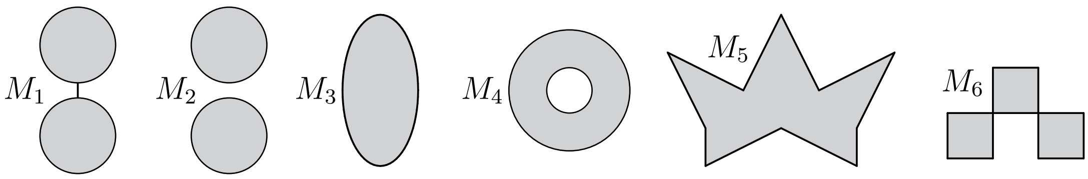
Name:

Matr.-Nr.:

Geb.-Datum:

9) Kreuzen Sie an, welche Mengen zusammenhängend bzw. sternförmig sind:

zusammenhängend:	1	2	3	4	5	6
sternförmig:	1	2	3	4	5	6



10) Sei $f(z) := |1 + z\overline{z}|^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)$.

11) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\gamma(t) := \mathsf{i} + 2\, e^{\mathsf{i}\, t}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z - \mathsf{i}}$ mit Hilfe dieser Parametrisierung.

12) Parametrisieren Sie die Verbindungsstrecke zwischen i und $3 + 2\,\mathsf{i}$.

Bitte wenden!

13) Sei $R := \{z = x + \mathsf{i}\,y \,:\, |x| < 1 \text{ und } 0 < y < 2\}$. Bestimmen Sie – **ohne Rechnung** – den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial R} \frac{dz}{(z-\mathsf{i}\,)^3}$.

14) Bestimmen Sie den Radius des größten Kreises um $z_0 = \mathsf{i}$, in dem $f(z) := 1/(z-1)$ in eine Potenzreihe um z_0 entwickeln lässt.

15) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z-\pi/4}\,dz$.

16) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $|f(1/2)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in D_1(0)$.

Sie haben 12 Minuten Zeit!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	3	2	3	2	3	2	3	2

Lösg. zu Afg. 9:

Zusammenhängend: 1, 3, 4, 5, 6.

Sternförmig: 3, 5.

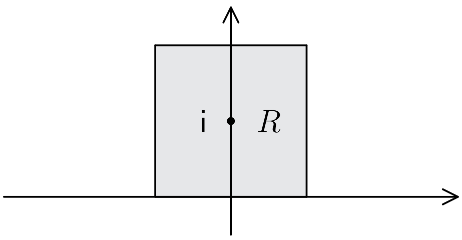
Lösg. zu Afg. 10: Es ist $f(z) = (1 + z\overline{z})^2$, also $f_{\overline{z}}(z) = 2z(1 + z\overline{z})$.

Lösg. zu Afg. 11: Es ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - \mathsf{i}} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \mathsf{i}}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{2\,\mathsf{i}\, e^{\mathsf{i}\,t}}{2e^{\mathsf{i}\,t}}\, dt = \mathsf{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,\mathsf{i}\,.$$

Lösg. zu Afg. 12: Die Parametrisierung ist gegeben durch $\gamma(t) := \mathsf{i} + t(3 + \mathsf{i})$.

Lösg. zu Afg. 13:



$F(z) := -\frac{1}{2}(z - \mathsf{i})^{-2}$ ist Stammfunktion von $f(z) = (z - \mathsf{i})^{-3}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\,\mathsf{i}\,\}$. Also ist $\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial R} F'(z)\, dz = 0$.

Lösg. zu Afg. 14: $f(z)$ ist auf $G := \mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph. Der größte Kreis um $z_0 = \mathsf{i}$, der noch in G hineinpasst, hat den Radius $r := |1 - \mathsf{i}\,| = \sqrt{2}$.

Lösg. zu Afg. 15: Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z - \pi/4}\, dz = 2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sin(\pi/4) = \pi\,\mathsf{i}\,\sqrt{2}.$$

Lösg. zu Afg. 16: Nach dem Maximumprinzip kann eine nicht-konstante, holomorphe Funktion ihr Maximum nicht im Innern des Definitionsgebietes annehmen. Aber f darf ja konstant sein, dann ist f holomorph und erfüllt die gewünschte Gleichung.