1. Test zur Funktionentheorie

Name:

Matr.-Nr.:

Geb.-Datum:

1) Nennen Sie alle Teilmengen von

$$M := \{z \in \mathbb{C} \, : \, z \in D_1(0) \text{ oder } z \in D_1(3\,\mathsf{i}\,)\},$$

die (in der Relativtopologie) zugleich offen und abgeschlossen sind.

2) Nennen Sie alle 2. Einheitswurzeln:

3) Geben Sie Betrag und Argument von $z = -1 + \mathsf{i}$ an:

4) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $z = 2 \cdot e^{\mathsf{i}\,\pi/3}$ an:

5) Geben Sie den Konvergenzradius von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 6^n (z - \mathsf{i}\,)^n$ an:

6) Ist $f(x + \mathsf{i}\,y) := e^x \sin y$ holomorph?

7) Nennen Sie eine Funktion, die in 0 komplex differenzierbar, aber nicht holomorph ist:

8) Berechnen Sie den Hauptzweig des Logarithmus von i :

Sie haben 8 Minuten Zeit!

Lösg. zu Afg. 1:

$\varnothing$, $D_1(0)$, $D_1(3\,\mathsf{i}\,)$ und M.

Erklärung: Die leere Menge und der ganze Raum sind in jedem topologischen Raum zugleich offen und abgeschlossen. Die beiden beteiligten Kreise sind nicht nur in $\mathbb{C}$, sondern auch in M offen. Also ist ihr Komplement (der jeweils andere Kreis) abgeschlossen.

Lösg. zu Afg. 2: 1, -1.

Lösg. zu Afg. 3: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 3\pi/4$.

Erklärung: Das Argument einer komplexen Zahl liegt immer in $[0, 2\pi)$.

Lösg. zu Afg. 4: $\mathrm{Re}(z) = 2\cos(\pi/3) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Lösg. zu Afg. 5: $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} = 6$, also $R = 1/6$.

Lösg. zu Afg. 6:

Die Funktion ist reellwertig, aber nicht konstant. Sie kann also nicht holomorph sein. (Man kann natürlich auch die CR-DGLn benutzen).

Lösg. zu Afg. 7: $f(z) := z\overline{z}$. Das wurde in der Vorlesung gezeigt.

Bemerkung: Es wurden einige andere Beispiele genannt, aber die waren **nicht mal** komplex differenzierbar.

Lösg. zu Afg. 8: Es ist $\mathsf{i} = e^{\mathsf{i}\,\pi/2}$ und $-\pi < \pi/2 < \pi$, also $\log_{(-\pi)}(\,\mathsf{i}\,) = \mathsf{i}\,\dfrac{\pi}{2}$.