BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Klausur zur Einführung in die Funktionentheorie – SS 2017

Prof. Dr. Klaus Fritzsche 25.08.2017, 12:15 Uhr

Name	Vorname	Matr.-Nr.	Studienfach	Fachsem.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Erreichte Punkte							
Erreichbare Punkte	10	10	12	12	20	64	–

Hinweise:

1. Tragen Sie als erstes oben Ihre persönlichen Daten ein!
2. Außer Schreibwerkzeug sind **keine weiteren Hilfsmittel** zugelassen.
3. Kontrollieren Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit. Es gibt 5 Aufgaben.
4. Schreiben Sie leserlich und geben Sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an. Begründen Sie immer Ihre Antworten.
5. Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und nicht mit Rot.
6. Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Name: Matr.-Nr.:

---

1) a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass f in dieser Situation in z_0 sogar komplex differenzierbar ist. Was muss erfüllt sein, damit man f in z_0 „holomorph" nennen darf.

b) In welchen Punkten ist $f(x + \mathsf{i}\,y) := x^2 + \mathsf{i}\,y^3$ komplex differenzierbar? Wo ist f holomorph?

c) Sei $g(x + \mathsf{i}\,y) := 2x(1 - y)$. Ist g auf $\mathbb{C}$ harmonisch? Falls ja, bestimmen Sie eine Funktion h auf $\mathbb{C}$, so dass $f := g + \mathsf{i}\,h$ holomorph ist?

2) a) Formulieren Sie den **allgemeinen** Cauchy'schen Integralsatz.

b) Die Kette $\Gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ sei gegeben durch

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1(t) & := & -4 + t(4 + \mathsf{i}\,), \quad 0 \le t \le 1, & \alpha_2(t) & := \; 4\,\mathsf{i} + 3e^{\mathsf{i}\,t}, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2, \\ \alpha_3(t) & := & 7\,\mathsf{i}\,(1 - t), \quad 0 \le t \le 1, & \alpha_4(t) & := \; 2 + 2e^{\mathsf{i}\,t}, \quad -\pi \le t \le 0 \\ \alpha_5(t) & := & 4e^{\mathsf{i}\,t}, \quad 0 \le t \le \pi. & & \end{array}$$

Skizzieren Sie Γ und zeigen Sie:
Γ ist ein Zyklus und nullhomolog in $G := \{z \in \mathbb{C} \,:\, -5 < \mathrm{Re}(z) < +5\}$.

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^3 - 6\,\mathsf{i}\,z^2 + 18z - 42}{(z - 1 - 2\,\mathsf{i}\,)^3}\,dz.$

3) Bestimmen Sie **alle** Laurententwicklungen von $f(z) := \dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$ um den Punkt $z_0 := 3$.

4) a) Formulieren Sie den Satz von Rouché für Funktionen auf $\mathbb{D} = D_1(0)$.

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $p(z) := z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ drei Nullstellen besitzt, deren Betrag ≥ 1 ist (wobei Nullstellen immer mit Vielfachheit zu zählen sind).

c) Zeigen Sie: Es gibt eine holomorphe Funktion g auf $\mathbb{D}$ mit $g(1/n) = 1/(n+1)$ für alle $n \ge 2$, aber es gibt **keine** holomorphe Funktion f mit der gleichen Eigenschaft, die auf einer offenen Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ definiert ist.

5) a) Zeigen Sie mit Hilfe der Residuentheorie: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2 t} = \pi\sqrt{2}.$

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)}\,dx.$

Lösg. zu Afg. 1: a) Gemeint ist folgendes Kriterium:

„Es gelten die CR-DGLn: $g_x(z_0) = h_y(z_0)$ und $g_y(z_0) = -h_x(z_0)$."

Richtig ist aber auch: „$Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear."

f ist in z_0 holomorph, falls es eine offene Umgebung $V = V(z_0) \subset U$ gibt, so dass f in allen Punkten $z \in V$ komplex differenzierbar ist.

b) Es ist $f = g + \mathsf{i}\,h$ mit $g(x + \mathsf{i}\,y) = x^2$ und $h(x + \mathsf{i}\,y) = y^3$. Weil f offenbar reell differenzierbar ist, kann man die CR-DGLn verwenden: Es ist $g_x(x + \mathsf{i}\,y) = 2x$ und $h_y(x + \mathsf{i}\,y) = 3y^2$, sowie $g_y(x + \mathsf{i}\,y) = 0 = -h_x(x + \mathsf{i}\,y)$. Also ist f genau dann in $z_0 = x_0 + \mathsf{i}\,y_0$ komplex differenzierbar, wenn $2x_0 = 3y_0^2$ ist. Also ist

$$\{z = x+\mathsf{i}\,y \in \mathbb{C} \,:\, f \text{ in } z \text{ komplex differenzierbar}\} = \{x+\mathsf{i}\,y \in \mathbb{C} \,:\, x = (3/2)y^2\}.$$

Das ist eine Parabel, die keine inneren Punkte enthält. Also ist f nirgends holomorph.

c) Es ist $g_x(x + \mathsf{i}\,y) = 2(1 - y)$ und $g_y(x + \mathsf{i}\,y) = -2x$, also $g_{xx} + g_{yy} = 0$. Damit ist g harmonisch.

Ist $f = g + \mathsf{i}\,h$ holomorph, so muss $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$ gelten. Das führt zu der Bestimmungsgleichung $h_x(x + \mathsf{i}\,y) = 2x$, also $h(x + \mathsf{i}\,y) = x^2 + c(y)$ mit einer zweimal differenzierbaren Funktion c.

Dann ist $2(1-y) = h_y(x+\mathsf{i}\,y) = c'(y)$, also $c(y) = 2y-y^2+k$ mit einer Konstanten k. Das liefert

$$h(x + \mathsf{i}\,y) = x^2 - y^2 + 2y + k.$$

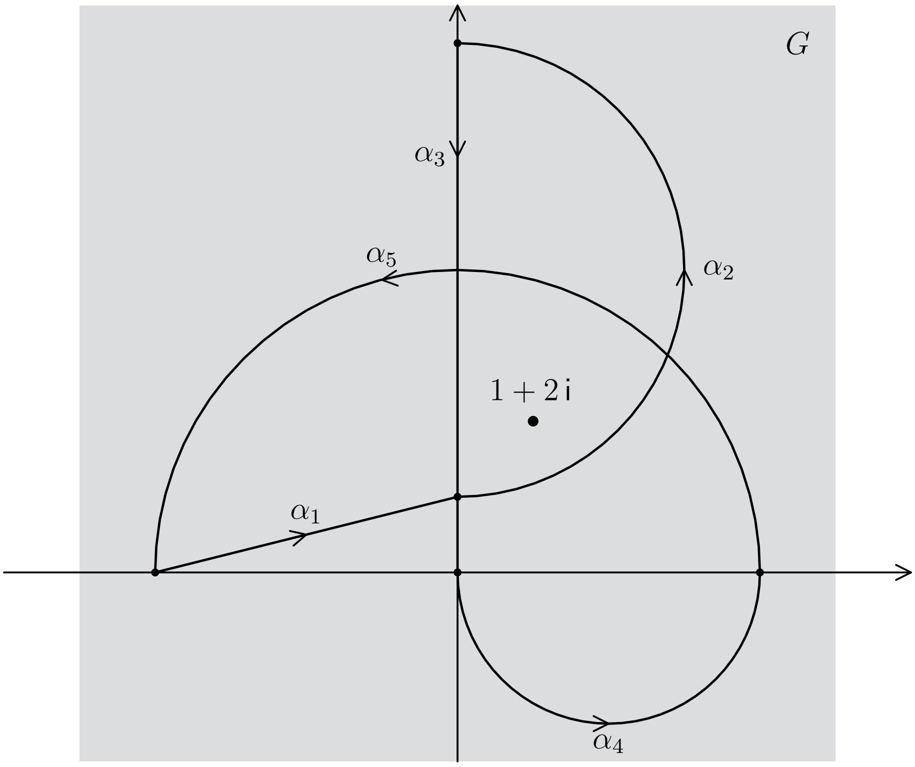
Die Probe zeigt, dass $f = g + \mathsf{i}\,h$ tatsächlich komplex differenzierbar ist.

Lösg. zu Afg. 2: a) Der allgemeine Cauchy'sche Integralsatz lautet:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein nullhomologer Zyklus in G. Dann ist $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$, und für $z \in G \setminus |\Gamma|$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

b) α_1 und α_3 sind Strecken, α_2, α_4 und α_5 sind Halbkreise. Hier ist eine Skizze:



Es ist $\alpha_1(1) = \mathrm{i} = \alpha_2(-\pi/2)$, $\alpha_2(\pi/2) = 7\,\mathrm{i} = \alpha_3(0)$, $\alpha_3(1) = 0 = \alpha_4(-\pi)$, $\alpha_4(0) = 4 = \alpha_5(0)$ und $\alpha_5(\pi) = -4 = \alpha_1(0)$. Also ist Γ ein Zyklus.

Die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ liegen alle in G. Deshalb ist Γ nullhomolog in G. Außerdem ist $n(\Gamma, 1 + 2\,\mathrm{i}) = 2$ (die Umlaufszahlen darf man aus der Skizze ableiten).

Sei $f(z) := z^3 - 6\,\mathrm{i}\,z^2 + 18z - 42$ und $z_0 := 1 + 2\,\mathrm{i}$. Dann ist $f'(z) = 3z^2 - 12\,\mathrm{i}\,z + 18$ und $f''(z) = 6z - 12\,\mathrm{i}$, also $f''(z_0) = 6(1 + 2\,\mathrm{i}) - 12\,\mathrm{i} = 6$. Nach dem allgemeinen Cauchy'schen Integralsatz ist dann

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\,dz = n(\Gamma, z_0) \cdot \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2!} \cdot f''(z_0) = 2 \cdot \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2} \cdot 6 = 12\pi\,\mathrm{i}\,.$$

Lösg. zu Afg. 3: Der Faktor $1/(z-3)^2$ hat schon die richtige Gestalt für eine Entwicklung um $z_0 = 3$. Den Faktor $1/z^2$ fasst man am besten als Ableitung $(-1/z)'$ auf. Dann muss man nur $1/z$ entwickeln und danach die gewonnene Reihe gliedweise differenzieren.

Die Singularitäten $z_0 = 3$ und $z_1 = 0$ lassen zwei Ringgebiete zu, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann, nämlich $K_{0,3}(3)$ und $K_{3,\infty}(3)$.

A) Entwicklung in $K_{0,3}(3)$:

Ist $0 < |z-3| < 3$, so ist $0 < \dfrac{|z-3|}{3} < 1$ und

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-3)-(-3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(z-3)/(-3)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z-3}{-3}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: $\displaystyle\Big(-\frac{1}{z}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3^{n+1}}(z-3)^{n-1}.$

Zusammengefasst ist dann

$$\begin{aligned}f(z) &= \Big(-\frac{1}{z}\Big)' \cdot \frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3^{n+1}}(z-3)^{n-3} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(z-3)^2} - \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{3^{n+4}}(z-3)^n .\end{aligned}$$

B) Entwicklung in $K_{3,\infty}(3)$:

Ist $|z-3| > 3$, so ist $\dfrac{3}{|z-3|} < 1$ und

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-3)-(-3)} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1-(-3)/(z-3)} \\ &= \frac{1}{z-3} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{-3}{z-3}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n (z-3)^{-(n+1)} ,\end{aligned}$$

also

$$\Big(-\frac{1}{z}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot (n+1) \cdot (z-3)^{-(n+2)}$$

und

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot (n+1) \cdot (z-3)^{-(n+4)} \\ &= \frac{1}{(z-3)^4} - \frac{6}{(z-3)^5} + \frac{27}{(z-3)^6} + \sum_{n=7}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \cdot (n-3)}{81} \cdot (z-3)^{-n}.\end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 4: a) Der Satz von Rouché (für Funktionen auf $\mathbb{D}$) lautet:

Sind f und h auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph und ist $|h(z)| < |f(z)|$ auf $\partial\mathbb{D}$, so haben f und $f + h$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) in $\mathbb{D}$.

b) Sei $f(z) := -5z^4$ und $h(z) := z^7 + z^2 - 2$. Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph. Ist $z \in \partial\mathbb{D}$, so ist $|f(z)| = 5|z|^4 = 5$ und $|h(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \le |z|^7 + |z|^2 + 2 = 4$, also $|h(z)| < |f(z)|$.

Nach Rouché besitzt das Polynom $p(z) = h(z) + f(z)$ in $\mathbb{D}$ gleich viele Nullstellen wie f, also genau 4 (eigentlich **eine** Nullstelle mit Vielfachheit 4).

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt p auf $\mathbb{C}$ genau 7 Nullstellen. Davon müssen dann 3 in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ liegen, haben also einen Betrag ≥ 1.

c) Wird $1/z$ auf $1/(z + 1)$ abgebildet, so wird w auf $1/(1/w + 1) = w/(w + 1)$ abgebildet.

Tatsächlich ist $g(w) := w/(w + 1)$ holomorph auf $\mathbb{D}$ und hat die Eigenschaft $g(1/n) = 1/(n + 1)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \ge 2$.

Wäre f eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung U von $\overline{\mathbb{D}}$ mit $f(1/n) = 1/(n+1)$, so wäre f auch auf $\mathbb{D}$ holomorph und würde auf der Menge $M := \{0\} \cup \{1/n \,:\, n \ge 2\}$ (die einen Häufungspunkt in $\mathbb{D}$ besitzt) mit g übereinstimmen. Also wäre $f = g$ auf $\mathbb{D}$, nach dem Identitätssatz.

Aber g ist sogar eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ und hat eine Polstelle in $z_0 = -1$.

Daraus folgt, dass $|f(z)|$ für $z \to z_0$ gegen $+\infty$ strebt. Das kann nicht sein, wenn f in z_0 holomorph sein soll.

Lösg. zu Afg. 5: a) Setzt man $R(x,y) := \dfrac{1}{1+y^2}$ und

$$f(z) := \frac{1}{z}\cdot R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big), \frac{1}{2\,\mathsf{i}}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big),$$

so ist $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = 2\pi\cdot\sum_{z\in D_1(0)} \operatorname{res}_z(f)$. Es gilt:

$$f(z) = \frac{1}{z\big(1-(z-1/z)^2/4\big)} = \frac{4z}{4z^2-(z^2-1)^2} = \frac{-4z}{z^4-6z^2+1}\,.$$

Weil $z^4-6z^2+1 = \big(z^2-(3+2\sqrt{2})\big)\cdot\big(z^2-(3-2\sqrt{2})\big)$ ist, folgt:

$$f(z) = \frac{-4z}{\big(z^2-(3+2\sqrt{2})\big)\cdot\big(z-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\big)\cdot\big(z+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\big)}\,.$$

Die einzigen Singularitäten von f in $D_1(0)$ sind $z_1 := \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ und $z_2 := -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Nun ist

$$\operatorname{res}_{z_1}(f) = \frac{-4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\big((3-2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})\big)\cdot 2\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{-2}{-4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

und

$$\operatorname{res}_{z_2}(f) = \frac{4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\big((3-2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})\big)\cdot(-2)\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{-2}{-4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,,$$

also

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1+\sin^2 t} = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

b) Der Integrand $f(z) := \dfrac{z}{(z^2+2z+2)(z^2+4)}$ besitzt 4 Polstellen, nämlich

$$z_{1,2} := \pm 2\,\mathsf{i} \quad\text{ und }\quad z_{3/4} := -1\pm\mathsf{i}\,.$$

In der oberen Halbebene liegen $z_1 = 2\,\mathsf{i}$ und $z_3 = -1+\mathsf{i}$. Als Residuen erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{2\,\mathsf{i}}(f) &= \lim_{z\to 2\,\mathsf{i}}(z-2\,\mathsf{i})f(z) = \frac{2\,\mathsf{i}}{(2\,\mathsf{i}+1-\mathsf{i})(2\,\mathsf{i}+1+\mathsf{i})4\,\mathsf{i}}\\
&= \frac{1}{2((2\,\mathsf{i}+1)^2+1)} = \frac{1}{2(-2+4\,\mathsf{i})} = \frac{-1-2\,\mathsf{i}}{20}\\
\text{und}\quad \operatorname{res}_{-1+\mathsf{i}}(f) &= \frac{-1+\mathsf{i}}{2\,\mathsf{i}(-1-\mathsf{i})(-1+3\,\mathsf{i})} = \frac{-1+\mathsf{i}}{2\,\mathsf{i}(4-2\,\mathsf{i})}\\
&= \frac{(-1+\mathsf{i})(4-8\,\mathsf{i})}{(4+8\,\mathsf{i})(4-8\,\mathsf{i})} = \frac{4+12\,\mathsf{i}}{80} = \frac{1+3\,\mathsf{i}}{20}\,.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}\,dx = 2\pi\,\mathsf{i}\,\Big(\frac{-1-2\,\mathsf{i}}{20}+\frac{1+3\,\mathsf{i}}{20}\Big) = -\frac{\pi}{10}\,.$$