2 Integration im Komplexen

2.1 Komplexe Kurvenintegrale

Wie kann man ein komplexes Integral $\int_p^q f(z)\,dz$ definieren?

Ist f auf einem Gebiet G definiert, so braucht die Verbindungsstrecke zwischen p und q nicht zu G zu gehören. Allerdings kann man die Punkte innerhalb von G durch einen stetigen Weg α (und sogar durch einen Streckenzug) verbinden. Ob man f entlang α integrieren kann und inwiefern das Ergebnis vom Weg abhängt, wird zu untersuchen sein.

Wir führen noch folgende Sprachregelung ein: Ein ***Integrationsweg*** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\alpha : [a, b] \to G$.

Definition (komplexes Kurvenintegral):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\alpha : [a, b] \to G$ ein Integrationsweg. Dann wird das ***komplexe Kurvenintegral*** von f über α definiert durch

$$\boxed{\int_\alpha f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)\,dt.}$$

Man kann das Integral natürlich schon bilden, wenn f nur auf $|\alpha|$ definiert ist.

2.1.1. Satz (Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale)

1. *Ist $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare,* ***streng monoton wachsende Parametertransformation****, so ist*
$$\int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz.$$
2. *Für stetige Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist*
$$\int_\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)(z)\,dz = c_1 \cdot \int_\alpha f_1(z)\,dz + c_2 \cdot \int_\alpha f_2(z)\,dz.$$
3. *Es gilt die* ***Standardabschätzung***
$$\Big|\int_\alpha f(z)\,dz\Big| \le L(\alpha) \cdot \max_{z\in|\alpha|} |f(z)|,$$
wobei $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$ die ***Länge*** *von α ist.*

4. *Sind f und f_ν stetige Funktionen auf $|\alpha|$und konvergiert (f_ν) auf $|\alpha|$ gleichmäßig gegen f, so ist*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \lim_{\nu\to\infty}\int_\alpha f_\nu(z)\,dz.$$

Beweis: 1) Ist φ eine stetig differenzierbare Parametertransformation und außerdem streng monoton wachsend, so ist $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, und die Substitutionsregel ergibt:

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b f\circ\alpha(t)\alpha'(t)\,dt = \int_c^d f\circ\alpha(\varphi(s))\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \\ &= \int_c^d f\circ(\alpha\circ\varphi)(s)(\alpha\circ\varphi)'(s)\,ds = \int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

2) Die Linearität ist trivial.

3) Es ist $\Big|\displaystyle\int_\alpha f(z)\,dz\Big| = \Big|\displaystyle\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt\Big| \le \displaystyle\int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt.$

Setzt man $M := \max\limits_{z\in|\alpha|}|f(z)|$, so ist

$$\int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt \le M\cdot\int_a^b|\alpha'(t)|\,dt = M\cdot L(\alpha).$$

Zu (4): Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/L(\alpha)$ für $n \ge n_0$ und $z \in |\alpha|$ ist. Dann folgt für alle $n \ge n_0$ die Ungleichug

$$\begin{aligned}\Big|\int_\alpha f_n(z)\,dz - \int_\alpha f(z)\,dz\Big| &\le \Big|\int_\alpha \big(f_n(z)-f(z)\big)\,dz\Big| \\ &\le L(\alpha)\cdot\max_{|\alpha|}|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge der Integrale $\int_\alpha f_n(z)\,dz$ gegen $\int_\alpha f(z)\,dz$. ∎

2.1.2. Satz (Integrationsregel)

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig und $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f\big(\alpha(b)\big) - f\big(\alpha(a)\big).$$

Beweis: Auch $f\circ\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar, mit $(f\circ\alpha)'(t) = f'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)$ (weil f holomorph ist). Daher ist

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = \int_a^b f'\big(\alpha(t)\big)\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_a^b (f\circ\alpha)'(t)\,dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Man beachte, dass der Strich hier einmal die komplexe und einmal die reelle Ableitung bezeichnet! ■

Definition (Stammfunktion):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine ***Stammfunktion*** von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bemerkung: Je zwei Stammfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine Konstante (denn auf einem Gebiet ist eine holomorphe Funktion mit verschwindender Ableitung konstant).

2.1.3. Beispiele

1. Sei $z_0 \neq 0$ und $\alpha(t) := t \cdot z_0$ (für $0 \leq t \leq 1$) die Verbindungsstrecke von 0 und z_0. Weiter sei $f(z) := z^n$. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_0^1 f(t \cdot z_0) \cdot z_0\,dt = z_0^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}.$$

   Dieses Ergebnis kann man auch auf anderem Wege erhalten. Setzt man $F(z) := z^{n+1}/(n+1)$, so ist $F'(z) = f(z)$ und daher

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(1)) - F(\alpha(0)) = F(z_0) - F(0) = \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}.$$

2. Die Kreislinie $\partial D_r(z_0)$ wird durch $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$ (mit $0 \leq t \leq 2\pi$) parametrisiert. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, benutzen wir immer diese Parametrisierung.

   Ein **fundamentaler Baustein der Funktionentheorie** ist die Formel

$$\boxed{\int_{\partial D_r(z_0)} (z - z_0)^n\,dz := \int_\alpha (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}}$$

   Beweis: Es ist

$$\int_\alpha \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathrm{i}\,t} \cdot r\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,t}\,dt = \mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi\,\mathrm{i}\,,$$

   und für $n \neq -1$ ist $F_n(z) := \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ Stammfunktion von $(z - z_0)^n$, also $\displaystyle\int_\alpha (z - z_0)^n\,dz = F_n(\alpha(2\pi)) - F_n(\alpha(0)) = 0.$

Unter einer ***Kette (von Wegen)*** in einem Gebiet G versteht man eine Abbildung Γ von der Menge aller (Äquivalenzklassen von) Integrationswege(n) in G nach $\mathbb{Z}$, die nur endlich oft einen Wert $\neq 0$ annimmt. Vereinfacht ausgedrückt sind Ketten formale ganzzahlige Linearkombinationen von Wegen:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j \alpha_j \ \ (\text{mit } n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ ).$$

Die Menge $|\Gamma| := |\alpha_1| \cup \ldots \cup |\alpha_N|$ heißt die ***Spur*** von Γ).

Ketten können komponentenweise addiert und mit ganzen Zahlen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} (\Gamma + \Gamma')(\alpha) &:= \Gamma(\alpha) + \Gamma'(\alpha), \\ (n \cdot \Gamma)(\alpha) &:= n \cdot \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Dadurch wird die Menge aller Ketten in G zu einer abelschen Gruppe (oder einem $\mathbb{Z}$-Modul).

Jeder einzelne Integrationsweg α kann vermöge

$$\alpha(\beta) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Kette aufgefaßt werden. Auch hier ist zu beachten, daß äquivalente Wege als gleich aufgefaßt werden.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\Gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i$ eine Kette in G und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert man:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{N} n_i \int_{\alpha_i} f(z)\, dz.$$

Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so kann man den entgegengesetzt durchlaufenen Weg α_- mit der Kette $-\alpha = (-1) \cdot \alpha$ identifizieren: Da man α_- aus α durch die Parametertransformation ι mit $\iota(t) = a + b - t$ (also $\iota(b) = a$, $\iota(a) = b$ und $\iota'(t) = -1$) gewinnt, gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_-} f(z)\, dz &= \int_a^b f(\alpha \circ \iota(t))(\alpha \circ \iota)'(t)\, dt = \int_a^b f \circ \alpha(\iota(t))\alpha'(\iota(t))\iota'(t)\, dt \\ &= \int_b^a f \circ \alpha(s)\alpha'(s)\, ds = -\int_a^b f \circ \alpha(s)\alpha'(s)\, ds = -\int_\alpha f(z)\, dz. \end{aligned}$$

Sind $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei Integrationswege mit $\alpha(b) = \beta(c)$, so kann man den zusammengesetzten Weg $\alpha + \beta$ auf $[0, 1]$ definieren durch

$$(\alpha+\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(\varphi(t)) & \text{für } 0 \le t \le 1/2, \\ \beta(\psi(t)) & \text{für } 1/2 \le t \le 1 \end{cases},$$

wobei $\varphi : [0,1/2] \to [a,b]$ und $\psi : [1/2,1] \to [c,d]$ durch $\varphi(t) := a + 2t(b-a)$ bzw. $\psi(t) := c + (2t-1)(d-c)$ definiert werden. Dann ist

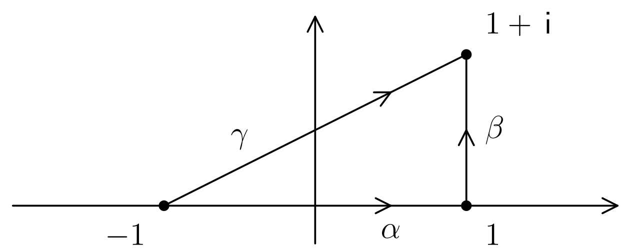
$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} f(z)\,dz &= \int_0^{1/2} f(\alpha\circ\varphi(t))(\alpha\circ\varphi)'(t)\,dt + \int_{1/2}^1 f(\beta\circ\psi(t))(\beta\circ\psi)'()\,dt \\ &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_c^d f(\beta(s))\beta'(s)\,ds \\ &= \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz. \end{aligned}$$

Also entspricht der zusammengesetzte Weg $\alpha+\beta$ tatsächlich der **Kette** $\alpha+\beta$. Ist nicht $\alpha(b) = \beta(c)$, so ist zumindest die Kette $\alpha+\beta$ definiert.

2.1.4. Beispiel

Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathrm{i}\,t \quad \text{und} \quad \gamma(t) := -1 + t(2+\mathrm{i}).$$



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} \bar{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t)\cdot 2\,dt + \int_0^1 (1-\mathrm{i}\,t)\cdot \mathrm{i}\,dt \\ &= 2\cdot(-t+t^2)\Big|_0^1 + \mathrm{i}\cdot(t - \frac{\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\ &= 2\cdot(-1+1) + \mathrm{i}\cdot(1-\frac{\mathrm{i}}{2}) \;=\; \mathrm{i} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \qquad \int_\gamma \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathrm{i}\,t)(2+\mathrm{i})\,dt \\ &= (2+\mathrm{i})\cdot(-t + \frac{2-\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\ &= (2+\mathrm{i})\cdot(-1+1-\frac{\mathrm{i}}{2}) \;=\; -\mathrm{i} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab!

2.1.5. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *Es ist $\displaystyle\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G.*

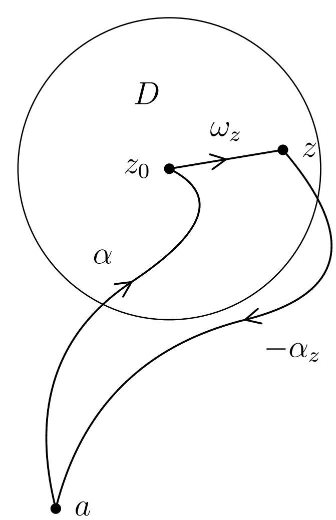
BEWEIS:
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ist F eine Stammfunktion von f und $\alpha : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Ist α geschlossen, so verschwindet die rechte Seite und damit das Integral.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Sei $\int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg, und $a \in G$ ein einmalig fest gewählter Punkt. Zu $z \in G$ sei jeweils ein Integrationsweg $\alpha_z : [0,1] \to G$ gewählt, der a mit z verbindet. Dann setze man

$$F(z) := \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$



Wegen der Voraussetzung ist die Definition von F unabhängig von der Wahl des Weges α_z. Zu zeigen bleibt: F ist auf G komplex differenzierbar, und es ist $F' = f$.

Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt $z_0 \in G$ und wählen eine offene Kreisscheibe D um z_0, die noch ganz in G enthalten ist. Für $z \in D$ sei $\omega_z(t) := z_0 + t \cdot (z - z_0)$ die (in D enthaltene) Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z. Weiter sei $\alpha := \alpha_{z_0}$.

Dann ist $\gamma := \alpha + \omega_z - \alpha_z$ ein geschlossener Weg, und es gilt:

$$\begin{aligned}
0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta \\
&= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0)\,dt \\
&= F(z_0) - F(z) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),
\end{aligned}$$

mit $\Delta(z) := \displaystyle\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,dt$.

Offensichtlich ist $\Delta(z_0) = f(z_0)$, und für $z \in D$ ist

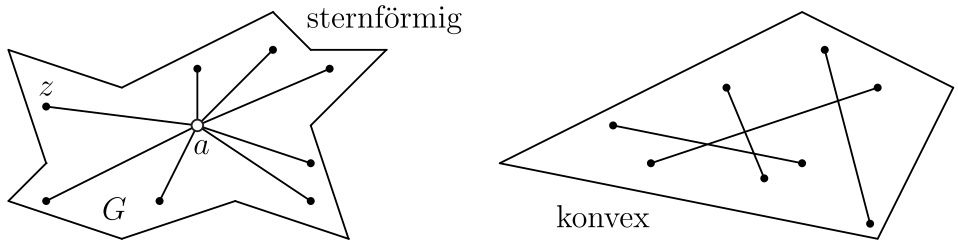
$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| = \Big| \int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)]\, dt \Big| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|.$$

Da f stetig ist, strebt die rechte Seite für $z \to z_0$ gegen 0. Hieraus folgt die Stetigkeit von Δ in z_0. Damit ist F in z_0 komplex differenzierbar und $F'(z_0) = f(z_0)$. ∎

Definition (sternförmige und konvexe Gebiete):

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt ***sternförmig bezüglich*** $a \in G$, falls mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a und z ganz in G liegt.

Das Gebiet heißt ***konvex***, falls mit zwei Punkten $z, w \in G$ stets auch deren Verbindungsstrecke ganz in G liegt.



Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, aber die Umkehrung ist i.A. falsch. Sind G_1 und G_2 konvex und ist $a \in G_1 \cap G_2$, so ist $G_1 \cup G_2$ bezüglich a sternförmig.

Das „Innere eines Dreiecks“ (die exakte Formulierung sei dem Leser überlassen) nennen wir ein ***Dreiecksgebiet***. Jedes Dreiecksgebiet ist konvex, Nimmt man den Rand hinzu, so spricht man von einem ***abgeschlossenen Dreieck***. Der Rand kann durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg parametrisiert werden.

2.1.6. Der Hauptsatz für Sterngebiete

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *Es ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat.*

Beweis:

(1) $\implies$ (2) : Klar!

(2) $\implies$ (1) : Das ist eine Verschärfung des Hauptsatzes über Kurvenintegrale im Falle von sternförmigen Gebieten. Der Beweis wird völlig analog geführt, allerdings definiert man diesmal $F(z)$ als Integral über die **Verbindungsstrecke** von a und z, was wegen der Sternförmigkeit möglich ist. ∎

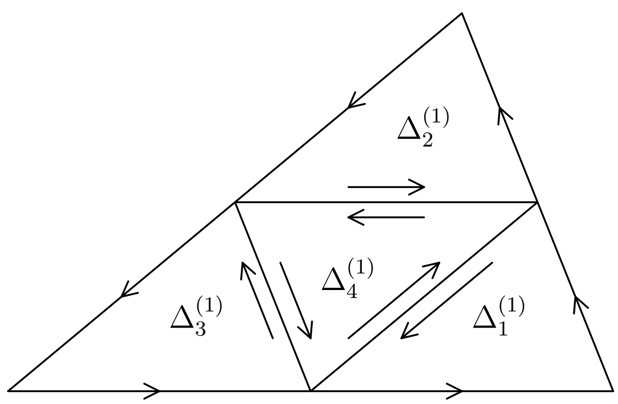
2.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

2.2.1. Satz von Goursat

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine ***holomorphe*** *Funktion und $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreiecksgebiet. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

BEWEIS: Wir schreiben $\Delta = \Delta^{(0)}$. Indem wir die Seiten von Δ halbieren, unterteilen wir Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$.



Sei $\gamma = \partial\Delta_1^{(1)} + \partial\Delta_2^{(1)} + \partial\Delta_3^{(1)} + \partial\Delta_4^{(1)}$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz,$$

denn die Integrale über die Strecken im Innern des Dreiecks heben sich gegenseitig auf. Also ist

$$\Big|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\Big| \le 4 \cdot \max_k \Big|\int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\,dz\Big|.$$

Nun wählt man unter den Dreiecken $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$ dasjenige aus, bei dem der Betrag des Integrals am größten ist, und nennt es $\Delta^{(1)}$. Dann ist

$$\Big|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\Big| \le 4 \cdot \Big|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\Big|.$$

Wiederholt man diese Prozedur, so erhält man eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \ldots$$

mit $\quad \Big|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\Big| \le 4^n \cdot \Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\Big|$ und $L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L(\partial\Delta^{(0)})$.

Da alle $\Delta^{(i)}$ kompakt und $\neq \varnothing$ sind, enthält $\bigcap_{n\geq 0} \Delta^{(n)}$ einen Punkt z_0, und da der Durchmesser der Dreiecke beliebig klein wird, ist z_0 eindeutig bestimmt.

Jetzt kommt der entscheidende Trick! Wir nutzen die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 aus. Es gibt eine in z_0 stetige Funktion A, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot (f'(z_0) + A(z))$.
2. $A(z_0) = 0$.

Die affin-lineare Funktion $\lambda(z) := f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)$ hat auf G eine Stammfunktion, nämlich

$$\Lambda(z) := (f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)) \cdot z + \frac{f'(z_0)}{2} \cdot z^2.$$

Also ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta^{(n)}} \lambda(z)\,dz = 0$ für alle n. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\Big| &= \Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0)A(z)\,dz\Big| \\ &\leq L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}(|z - z_0| \cdot |A(z)|) \\ &\leq L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}(|A(z)|. \end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| &\leq 4^n \cdot \Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\Big| \\ &\leq 4^n \cdot L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)| \\ &= L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)|. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0. ■

Der Satz von Goursat lässt sich noch ein wenig verschärfen.

2.2.2. Satz von Goursat in verschärfter Form

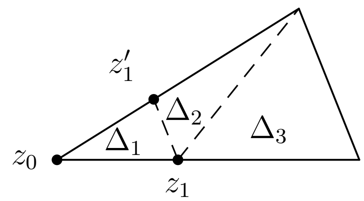
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreiecksgebiet $\triangle \subset G$:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von $\triangle$.

Dann zerlegen wir $\triangle$ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt:

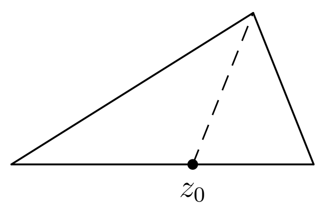
$$\int_{\partial\triangle_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)\,dz = 0, \quad \text{also} \quad \int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

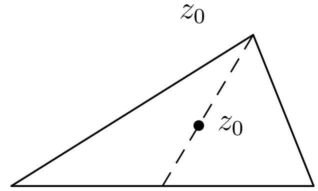
$$|\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz| \le L(\partial\triangle_1) \cdot \sup_{\triangle}|f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von $\triangle$, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man $\triangle$ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von $\triangle$. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb $\triangle$, so ist überhaupt nichts zu zeigen. ■

2.2.3. Satz (über die Existenz von Stammfunktionen)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis: Sei G sternförmig bezüglich $a \in G$. Nach dem verschärften Satz von Goursat ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, insbesondere für jedes Dreieck, das a als Eckpunkt hat. Daher besitzt f eine Stammfunktion. ■

2.2.4. Cauchy'scher Integralsatz (für Sterngebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G:

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

BEWEIS: f besitzt eine Stammfunktion, und daraus folgt die Behauptung. ■

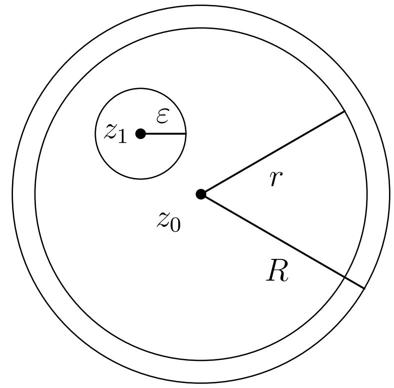
2.2.5. Lemma

Sei $R > 0$ und $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph außerhalb des Punktes $z_1 \in D_R(z_0)$, $z_1 \neq z_0$.

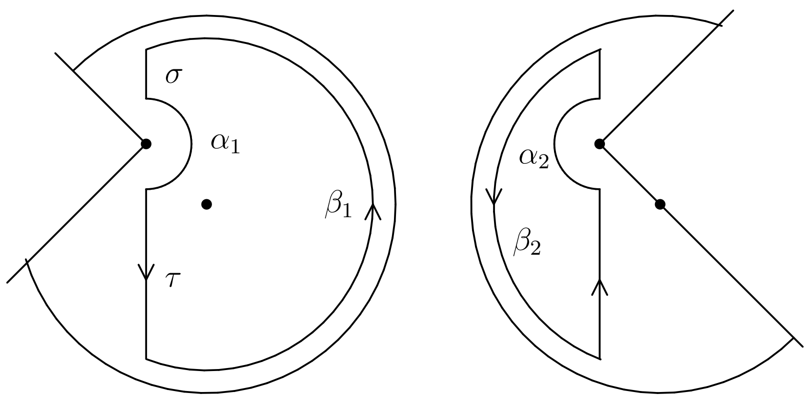
Wir wählen ein r mit $0 < r < R$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass noch $D_\varepsilon(z_1) \subset D_r(z_0)$ ist.

Dann ist

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_1)} f(z)\,dz.$$



BEWEIS: Wir zeigen, dass die Differenz der Integrale verschwindet. Dazu fassen wir diese als Summe zweier Integrale über geschlossene Wege auf, auf die sich jeweils der Cauchy'sche Integralsatz anwenden lässt:



Bezeichnen wir die beiden Verbindungsstrecken vom kleinen inneren Kreis zum großen äußeren Kreis (von oben nach unten orientiert) mit σ und τ und die positiv orientierten Teil-Kreislinien mit α_1, α_2 und β_1, β_2, so gilt:

$$(\beta_1 + \sigma - \alpha_1 + \tau) + (\beta_2 - \tau - \alpha_2 - \sigma) = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die beiden geschlossenen Wege auf der linken Seite der Gleichung verlaufen jeweils in einem sternförmigen Gebiet, in dem f holomorph ist. Nach Cauchy ist das Integral über diese Wege $= 0$, und daraus folgt auch schon die Behauptung. ■

Definition (relativ kompakte Teilmenge):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, B liegt ***relativ kompakt*** in G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), wenn $\overline{B}$ kompakt und in G enthalten ist.

2.2.6. Folgerung

Ist $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $z \in \mathbb{C} \setminus \partial D$, so ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{falls } z \in D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: 1) Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $D_\varepsilon(z) \subset\subset D$ ist. Für $\zeta \neq z$ ist $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ holomorph. Also ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi\,\mathrm{i}\,.$$

2) Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, so gibt es eine Kreisscheibe D' mit $D \subset\subset D'$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D'}$. Dann ist $f(\zeta)$ auf D' holomorph, und das Integral verschwindet aufgrund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete. ∎

Definition (einfach zusammenhängendes Gebiet):

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, falls jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.

Diese Definition ist nicht die Übliche. Man kann einfach zusammenhängende Gebiete auch rein topologisch charakterisieren. Das wird den brisanten Sätzen der folgenden Abschnitte erst ihren eigentlichen Sinn geben.

2.2.7. Satz (Hinreichende Bedingungen für einfach zusammenhängende Gebiete)

1. *Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.*
2. *Sind G_1 und G_2 einfach zusammenhängende Gebiete und ist $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ und zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ einfach zusammenhängend.*

Beweis: 1) ist klar, aufgrund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete.

2) $G := G_1 \cup G_2$ ist wieder ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es Stammfunktionen F_λ von $f|_{G_\lambda}$, für $\lambda = 1, 2$. Auf $G_1 \cap G_2$ ist dann $(F_1 - F_2)'(z) \equiv 0$, also $F_1(z) - F_2(z) \equiv c$ konstant. Sei

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & \text{auf } G_1, \\ F_2(z) + c & \text{auf } G_2. \end{cases}$$

Offensichtlich ist F holomorph auf G und $F' = f$. ∎

2.2.8. Cauchy'scher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

Der Beweis ist trivial. Seine Bedeutung erhält der Satz erst dann, wenn man „einfach zusammenhängend" mit topologischen Mitteln charakterisiert hat.

2.2.9. Beispiel

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht einfach zusammenhängend: Die Funktion $f(z) := 1/z$ kann auf $\mathbb{C}^*$ keine Stammfunktion besitzen, denn bekanntlich ist

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi\,\mathrm{i} \neq 0.$$

Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ist dagegen sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$) und deshalb einfach zusammenhängend. Also muss f auf $\mathbb{C}'$ eine Stammfunktion besitzen. Sei

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in $\mathbb{C}'$ verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, dass das Ergebnis nicht vom Weg abhängt. Wie im Beweis des Hauptsatzes folgt, dass F eine Stammfunktion von f ist. Außerdem ist $F(1) = 0$ ist.

Die gleichen Eigenschaften hat auch der Logarithmus. Weil nun $(F - \log)'(z) \equiv 0$ auf $\mathbb{C}'$ ist, gibt es eine Konstante c, so dass $F(z) \equiv \log(z) + c$ ist. Setzt man $z = 1$ ein, so erhält man $c = 0$.

Damit ist $\log(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{1}{\zeta}\,d\zeta$.

Bemerkung: Es gibt eine Verallgemeinerung des vorangegangenen Beispiels:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h auf G mit folgenden Eigenschaften:

1. $\exp(h(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$.

2. $h'(z) = f'(z)/f(z)$.

Je zwei Funktionen h_1 und h_2 auf G mit den Eigenschaften (1) und (2) unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\,\mathsf{i}$.

Der Beweis der Existenz der Funktion h wurde den Studierenden als Übungsaufgabe überlassen. Er findet sich (zusammen mit dem Beweis der Eindeutigkeit) im Anhang zu diesem Kapitel. Die Bedingung „f' holomorph" wird sich später als überflüssig erweisen.

Liegt das Gebiet G in $\mathbb{C}^*$, so nennt man jede stetige Funktion L auf G mit $\exp(L(z)) \equiv z$ eine ***Logarithmusfunktion*** auf G. Sie ist dann natürlich auch holomorph. Auf jedem einfach-zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ existiert eine Logarithmusfunktion.

2.2.10. Beispiel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann existiert eine „Quadratwurzel" aus f, d.h. eine holomorphe Funktion g auf G, so dass $g^2 = f$ ist. Dafür braucht man nur eine holomorphe Funktion h mit $\exp \circ h(z) = f(z)$ zu wählen. Dann ist $g(z) := \exp(h(z)/2)$ die gesuchte Quadratwurzel von f.

2.3 Der Entwicklungssatz

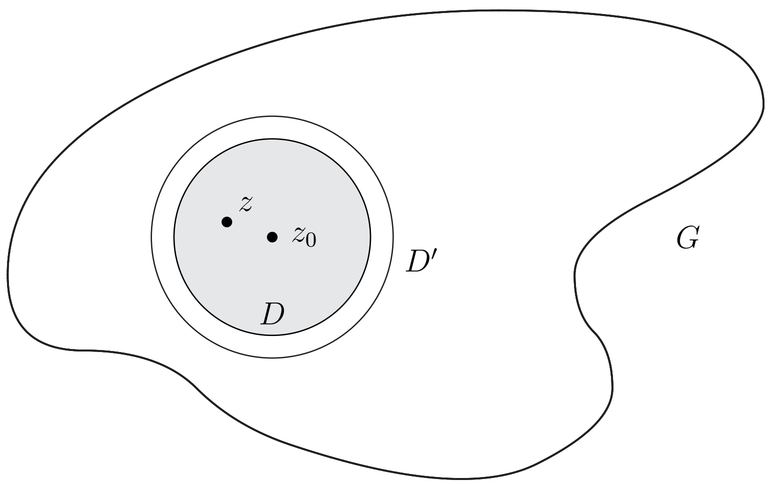
Der folgende Satz ist Schlüssel zu einer Reihe von ganz erstaunlichen Ergebnissen.

2.3.1. Die Cauchy'sche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.

Dann gilt für alle $z \in D$: $\quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$

Beweis: Wir können ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass auch noch $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ ist.



Sei $z \in D$ beliebig vorgegeben. Da f in G holomorph ist, gibt es eine in z stetige Funktion Δ_z auf G, so dass für alle $\zeta \in G$ gilt:

$$f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z).$$

Dann ist

$$\Delta_z(\zeta) = \begin{cases} \big(f(\zeta) - f(z)\big)/(\zeta - z) & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Nachdem Δ_z überall stetig und außerhalb z sogar holomorph ist, können wir auf der sternförmigen Menge D' den Cauchy'schen Integralsatz auf Δ_z und den geschlossenen Weg $\partial D \subset D'$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Delta_z(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi\,\mathsf{i}\,. \end{aligned}$$ ∎

Beim Beweis ist ganz deutlich die **komplexe** Differenzierbarkeit eingegangen. Deshalb hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Funktion erwarten würde. Man beachte auch noch:

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \text{ für } z \in G \setminus \overline{D}.$$

2.3.2. Beispiele

1. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz$ berechnet werden.

   Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchy'schen Integralformel steht. Weil $\dfrac{1/2}{z} - \dfrac{1/2}{z+2} = \dfrac{1}{z(z+2)}$ ist und die Punkte 0 und -2 im Innern von $D_3(0)$ liegen, gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{1/2}{z} - \frac{1/2}{z+2}\right] \cdot e^z\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\, dz - \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z - (-2)}\, dz \\
&= 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] \;=\; \pi\,\mathrm{i}\,(1 - e^{-2}).
\end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\mathrm{i}/2)$. Dann liegt i im Innern von C, $-\mathrm{i}$ aber nicht. Daher gilt:

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \int_C \frac{dz}{z - \mathrm{i}} - \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \int_C \frac{dz}{z + \mathrm{i}} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \cdot [2\pi\,\mathrm{i} - 0] = \pi.$$

2.3.3. Entwicklungs-Lemma

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ und $R := \mathrm{dist}(z_0, |\alpha|)$. Ist f eine stetige Funktion auf der Spur von α, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen die auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ definierte Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten der Potenzreihe genügen der Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist F holomorph auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.

Beweis: Ist $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$, so ist $|z - z_0| < R \le |\zeta - z_0|$. Wir können den folgenden „Trick mit der geometrischen Reihe“ anwenden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n, \text{ weil } \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1 \text{ ist.}\end{aligned}$$

Da f auf der kompakten Menge $|\alpha|$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, gilt für $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$:

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n\right| \le \frac{C}{R} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{R}\right)^n .$$

Die Zahlenreihe über die Terme auf der rechten Seite konvergiert für jedes **feste** $z \in D_R(z_0)$. Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

(für jedes feste z) absolut und gleichmäßig auf $|\alpha|$ gegen die Funktion

$$F_z(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} .$$

Die Partialsummen der obigen Funktionenreihe sind (als Funktionen von ζ) stetig auf $|\alpha|$. Deshalb kann man Grenzwertbildung und Integration vertauschen und erhält:

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha F_z(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right) \cdot (z - z_0)^n.$$

Da die Potenzreihe

$$p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left(\text{mit } a_n := \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\ \right)$$

für jedes $z \in D_R(z_0)$ konvergiert, muss ihr Konvergenzradius mindestens $= R$ sein, und sie konvergiert im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $F(z)$.

Weil man diese Konstruktion in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ mit einem geeigneten $R > 0$ durchführen kann, ist F auf ganz $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ holomorph. ∎

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

2.3.4. Entwicklungssatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpasst, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Für jedes solche r ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Beweis: Sei $0 < r < R$ und $\alpha(t) := z_0 + re^{\mathrm{i}\,t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist f auf $|\alpha|$ stetig und man kann das Entwicklungs-Lemma anwenden. Es gibt eine Potenzreihe $p(z)$, die im Innern von $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen

$$F(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

gegeben. Nach der Cauchy'schen Integralformel ist aber $F(z) = f(z)$, und es ist klar, dass die Koeffizienten a_n nicht von r abhängen. ∎

2.3.5. Folgerung (Höhere Cauchy'sche Integralformeln)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für jede Kreisscheibe $D \subset\subset G$ und jedes $z \in D$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Sei $z_0 \in G$ und $D := D_r(z_0) \subset\subset G$. Ist $z \in D$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $D' := D_\varepsilon(z) \subset\subset D$ ist. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $g_{z,k}(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - z)^{k+1}$ auf $D \setminus \{z\}$ holomorph. Gemäß Lemma 2.2.5 ist dann

$$\int_{\partial D'} g_{z,k}(\zeta) \, d\zeta = \int_{\partial D} g_{z,k}(\zeta) \, d\zeta.$$

Nach dem Entwicklungslemma gibt es eine Potenzreihe $p(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(w-z)^k$, die auf D' gegen f konvergiert. Dabei ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D'} g_{z,k}(\zeta)\, d\zeta \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Nun ist aber $f^{(n)}(z) = p^{(n)}(z) = a_n \cdot n!$ für alle n. Fasst man alles zusammen, so folgt die Aussage des Satzes. ∎

Definition (analytische Funktion):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ ***in eine Potenzreihe entwickelbar***, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe um z_0 übereinstimmt.

f heißt auf G ***analytisch***, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, dass man i.A. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

2.3.6. Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$. Dann ist f holomorph auf G.

Beweis: f besitzt zumindest lokal (auf sternförmigen Teilmengen) eine holomorphe Stammfunktion F. Aber F ist beliebig oft komplex differenzierbar, und dann ist auch $f = F'$ holomorph. ∎

Fassen wir nun zusammen:

2.3.7. Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann'schen DGLn.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist holomorph.*
4. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
5. *f ist analytisch.*
6. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*
7. *f ist stetig, und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ ist* $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$

Insbesondere kann man bei all den Sätzen, bei denen „f holomorph, f' stetig" vorausgesetzt wurde, auf die Forderung nach einer stetigen Ableitung verzichten.

Aber wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere bemerkenswerte Eigenschaften auf.

2.3.8. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.

Beweis: Nach Voraussetzung besitzt f lokal immer eine Stammfunktion. ∎

2.3.9. Riemann'scher Hebbarkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

Beweis: Wir benutzen einen netten, kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$ und damit auf ganz G. Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, muss Δ sogar auf ganz G holomorph sein. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. ∎

Jetzt untersuchen wir die Nullstellen einer holomorphen Funktion.

2.3.10. Lokaler Darstellungssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $f(z_0) = 0$. Dann ist entweder $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, oder es gibt ein $k > 0$, eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, so dass gilt:

1. *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für $z \in U$.*
2. *$g(z_0) \neq 0$*

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt durch

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Beweis: Wählt man für U eine kleine Kreisscheibe um z_0, so hat man auf U eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muss $a_0 = 0$ sein. Ist nicht $a_k = 0$ für alle k, so gibt es ein kleinstes $k \geq 1$, so dass $a_k \neq 0$ ist. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad \text{mit } g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k}(z - z_0)^m.$$

Das Lemma von Abel zeigt, dass die Reihe für $g(z)$ ebenfalls auf U konvergiert. Das ergibt die gewünschte Darstellung, und außerdem ist $g(z_0) = a_k \neq 0$. Weiter ist

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0, \ldots, k-1 \\ \neq 0 & \text{für } n = k. \end{cases}$$

Dadurch ist k eindeutig festgelegt. ∎

Die Zahl k nennt man die ***Ordnung der Nullstelle von*** f ***in*** z_0.

Bei der Darstellung $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ kann man annehmen, dass U sternförmig und $g(z) \neq 0$ auf U ist. Dann ist $\log \circ g$ und damit auch

$$\gamma(z) := \exp\bigl(\frac{1}{k} \log \circ g(z)\bigr)$$

holomorph auf U, sowie $\gamma(z)^k = g(z)$, also γ die k-te holomorphe Wurzel aus g.

Setzt man $q(z) := (z - z_0) \cdot \gamma(z)$, so ist $q^k = f$, also q die k-te holomorphe Wurzel aus f. Außerdem ist $q'(z_0) = \gamma(z_0) \neq 0$. Das bedeutet, dass q in z_0 biholomorph ist.

Sei q etwa auf $V = V(z_0) \subset U$ injektiv. Für jedes $c \in f(V) \setminus \{0\}$ gibt es genau k verschiedene k-te Wurzeln aus c, etwa $w_1, \ldots, w_k$. Dann hat die Gleichung $f(z) = q(z)^k = c$ genau k Lösungen, nämlich die k verschiedenen Zahlen $z_\nu = q^{-1}(w_\nu)$. Dann ist $f(z_1) = \ldots = f(z_k) = c$ und $f(z) \neq c$ für alle anderen $z \in V$.

In der Nähe einer Nullstelle der Ordnung k (aber außerhalb der Nullstelle selbst) nimmt eine holomorphe Funktion also jeden Wert genau k-mal an.

Nach der Cauchy'schen Integralformel ist der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt. Da es noch andere Funktionen mit dieser Eigenschaft gibt, formuliert man folgenden Begriff:

Definition (Mittelwerteigenschaft):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat die ***Mittelwerteigenschaft*** (kurz MWE), falls gilt:

Zu jedem $z \in G$ gibt es ein $R > 0$ mit $D_R(z) \subset\subset G$, so dass für alle r mit $0 < r \le R$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}\,t})\,dt.$$

2.3.11. Satz (von der Mittelwerteigenschaft)

Ist f holomorph auf einem Gebiet G, so besitzt f dort die Mittelwerteigenschaft.

Zum Beweis braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchy'sche Integralformel einzusetzen. Ist $D_r(z) \subset\subset G$, so ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{\mathrm{i}\,t})}{re^{\mathrm{i}\,t}} \cdot r\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}\,t})\,dt. \end{aligned}$$

2.3.12. Satz

1. *Mit f und g haben auch alle Linearkombinationen $c_1 f + c_2 g$ die MWE.*
2. *Mit f haben auch $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ und $\overline{f}$ die MWE.*

Beweis: 1) folgt trivial aus der $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals.

2) Wegen $\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}$ erfüllt mit f auch $\overline{f}$ die MWE, und daher auch $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(f - \overline{f})$. ∎

Definition (harmonische Funktion):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt ***harmonisch***, wenn $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ist.

Der Differentialoperator $\Delta : f \mapsto f_{xx} + f_{yy}$ heißt ***Laplace-Operator***.

Sei nun $f = g + \mathrm{i}\,h : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen: $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} &= h_{yx} - h_{xy} \;=\; 0 \\ \text{und} \quad h_{xx} + h_{yy} &= -g_{yx} + g_{xy} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind jeweils harmonisch! Aber es kommt noch besser!

2.3.13. Lokale Charakterisierung harmonischer Funktionen

Sei $g : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so dass $g|_U = \mathrm{Re}(f)$ ist.

Beweis: Gesucht ist eine nahe z_0 definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion h mit $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Wegen der ersten Gleichung versuchen wir es mit einer Stammfunktion $h(x + \mathrm{i}\, y) = \displaystyle\int g_x(x + \mathrm{i}\, y)\, dy + C$, mit $C = C(x)$. Mit Hilfe der zweiten Gleichung bestimmen wir $C(x)$. Hier kommen die Details:

Sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0 \in G$ fest gewählt, und U eine in G enthaltene rechteckige offene Umgebung von z_0. Für $z = x + \mathrm{i}\, y \in U$ setzen wir

$$h(x + \mathrm{i}\, y) := \int_{y_0}^{y} g_x(x + \mathrm{i}\, t)\, dt + \varphi(x),$$

mit einer noch näher zu bestimmenden (zweimal differenzierbaren) Funktion φ. Dann ist offensichtlich $h_y = g_x$ und

$$\begin{aligned} h_x(x + \mathrm{i}\, y) &= \int_{y_0}^{y} g_{xx}(x + \mathrm{i}\, t)\, dt + \varphi'(x) \;=\; -\int_{y_0}^{y} g_{yy}(x + \mathrm{i}\, t)\, dt + \varphi'(x) \\ &= -\big(g_y(x + \mathrm{i}\, y) - g_y(x + \mathrm{i}\, y_0)\big) + \varphi'(x). \end{aligned}$$

Damit $h_x = -g_y$ ist, sollte $\varphi'(x) = -g_y(x + \mathrm{i}\, y_0)$ sein. Also setzen wir

$$\varphi(x) := -\int_{x_0}^{x} g_y(s + \mathrm{i}\, y_0)\, ds.$$

Die so bestimmte Funktion h ist zweimal stetig differenzierbar und hat die gewünschten Eigenschaften. ■

Bemerkung: Harmonische Funktionen, die Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion f sind, nennt man ***konjugierte harmonische Funktionen***.

2.3.14. Folgerung

Harmonische Funktionen haben die MWE.

Beweis: Trivial. ■

2.4 Das Maximumprinzip

2.4.1. Identitätssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (diese Eigenschaft von G ist hier besonders wichtig!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. *$f(z) = g(z)$ für **alle** $z \in G$.*
2. *$f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.*
3. *Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so dass $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Ist $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Menge $M \subset G$, so gibt es eine Folge von Punkten $z_\nu \neq z_0$ in M, die gegen z_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f und g ist

$$f(z_0) = \lim_{\nu \to \infty} f(z_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} g(z_\nu) = g(z_0).$$

Dann bleibt zu zeigen: Ist h holomorph auf G und $h(z) = 0$ für alle $z \in M \cup \{z_0\}$, so ist $h^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein k und eine holomorphe Funktion q, so dass $h(z) = (z - z_0)^k \cdot q(z)$ und $q(z_0) \neq 0$ ist. Weil dann $q(z_\nu) = 0$ für alle ν wäre, kann das nicht sein!

(3) $\Longrightarrow$ (1): Sei $h := f - g$ und $N := \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0\}$. Dann liegt z_0 in N, also ist $N \neq \varnothing$. Außerdem ist N offen: Ist nämlich $w_0 \in N$, so sind in der Potenzreihenentwicklung von h in w_0 alle Koeffizienten $= 0$, und das bedeutet, dass h auf einer ganzen Umgebung von w_0 identisch verschwindet. Andererseits ist N als Durchschnitt von Nullstellenmengen stetiger Funktionen auch abgeschlossen in G. Weil G ein Gebiet ist, muss $G = N$ sein. ∎

Die Menge M im obigen Satz kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt dann, dass jede holomorphe Funktion f auf G schon durch ihre Werte auf U festgelegt ist. Das zeigt eine gewisse Starrheit. Wackelt man lokal an f, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

2.4.2. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht die Nullfunktion, so ist die (in G abgeschlossene) Menge $\{z \in G \mid f(z) = 0\}$ diskret in G.

2.4.3. Satz (Maximumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

BEWEIS: Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein Maximum besitzt, dann gibt es ein $r > 0$, so dass $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für $|z - z_0| \le r$ ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft (von f) folgt für $0 < \varrho < r$:

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})|\,dt \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt = |f(z_0)|.$$

Dann muss natürlich sogar überall das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} \big(|f(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})| - |f(z_0)|\big)\,dt = 0.$$

Da der Integrand überall ≤ 0 und $\varrho < r$ beliebig ist, bedeutet das:

$$|f(z)| = |f(z_0)| \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Also ist $|f|$ und damit auch f auf $D_r(z_0)$ konstant. Mit dem Identitätssatz folgt daraus, dass f auf ganz G konstant ist. ∎

Man kann das Maximumprinzip auch so formulieren:

Eine nicht-konstante holomorphe Funktion besitzt in ihrem Definitionsbereich kein lokales Maximum (worunter stets ein Maximum von $|f|$ zu verstehen ist).

2.4.4. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph und nicht konstant auf G, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

BEWEIS: Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge muss $|f|$ irgendwo auf $\overline{G}$ sein Maximum annehmen. Ist f nicht konstant, so kann dieses wegen des Maximumprinzips nicht in G liegen. Da bleibt nur der Rand. ∎

2.4.5. Satz (Minimumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Minimum, so ist f konstant.

BEWEIS: $1/f$ ist holomorph auf G. Nimmt $|f|$ ein Minimum an, so nimmt $|1/f|$ ein Maximum an, und das kann nur sein, wenn f konstant ist. ∎

2.4.6. Satz (Cauchy'sche Ungleichungen)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, $r > 0$ und $D_r(z_0) \subset\subset G$. Dann gelten die folgenden Abschätzungen:

1. $|f(z_0)| \le \max\limits_{\partial D_r(z_0)} |f|$.
2. $|f'(z)| \le \dfrac{4}{r} \max\limits_{\partial D_r(z_0)} |f|$ *für* $z \in \overline{D_{r/2}(z_0)}$.

Beweis: 1) folgt sofort aus dem Maximumprinzip.

2) Für $z \in \overline{D_{r/2}(z_0)}$ gilt die Cauchy'sche Integralformel

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta.$$

Für $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ ist $|\zeta - z| \geq r/2$. Also ergibt die Standardabschätzung:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} \Big| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \Big| \leq \frac{4}{r} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f|.$$

Das ist die gewünschte Ungleichung. ∎

2.4.7. Satz von Liouville

Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Sei $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der zweiten Cauchy'schen Ungleichung folgt:

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{r} \max_{\partial D_r(0)} |f| \leq \frac{4C}{r}, \text{ für } |z| \leq r/2.$$

Das gilt für beliebig großes $r \in \mathbb{R}$. Auf einer festen Kreisscheibe um den Nullpunkt folgt dann aber, dass dort $f'(z) \equiv 0$ ist. Wegen des Identitätssatzes verschwindet f' dann sogar auf ganz $\mathbb{C}$, und f selbst ist dort konstant. ∎

Wer das Wundern noch nicht verlernt hat, sollte an dieser Stelle einmal innehalten und sich bewusst machen, wieviele erstaunliche Eigenschaften holomorpher Funktionen wir in kurzer Zeit hergeleitet haben!

Definition (ganze Funktion):

Eine ***ganze Funktion*** ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus, vor allem aber die Polynome.

2.4.8. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)}$$

eine ganze Funktion, und für $z \neq 0$ ist

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(1/z)},$$

mit dem Polynom $q(w) := a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n$. Wegen $q(0) = a_n \neq 0$ ist

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion und nach Liouville konstant, im Gegensatz zur Annahme. ∎

Hieraus folgt per Induktion, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) besitzt und daher in n Linearfaktoren zerfällt.

2.4.9. Konvergenzsatz von Weierstraß

Ist (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G, die lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f holomorph und (f_n') konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen f'.

Beweis: Die Grenzfunktion f ist auf jeden Fall stetig. Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann konvergiert (f_n) auf $\partial\Delta$ gleichmäßig, und man kann den Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung anwenden:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0.$$

Also ist f nach dem Satz von Morera holomorph.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ gibt, so dass (f_n') auf U gleichmäßig gegen f' konvergiert. Dazu sei $r > 0$ so gewählt, dass $D_r(z_0) \subset\subset G$ ist, und dann $U := D_{r/2}(z_0)$ gesetzt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $z \in U$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{4}{r} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f_n - f|.$$

Man kann n_0 so groß wählen, dass $\max_{\partial D_r(z_0)} |f_n - f| < \frac{r}{4} \cdot \varepsilon$ für $n \geq n_0$ ist. Aber dann ist $|f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon$ für $z \in U$ und $n \geq n_0$.

Das heißt, dass (f_n') lokal gleichmäßig gegen f' konvergiert. ∎

Der Satz wird im Reellen falsch, da muss man die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n') fordern.

Das folgende Resultat haben wir (unter der sich als überflüssig herausgestellten Zusatzannahme, dass f' stetig ist) schon gezeigt:

2.4.10. Satz

Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ lokal biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

2.4.11. Satz von der Gebietstreue

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis: Da f zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbildet, muss man nur noch zeigen, dass $f(G)$ offen ist.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Zu zeigen bleibt, dass $w_0 := f(z_0)$ innerer Punkt von $f(G)$ ist. Da man f durch $g(z) := f(z) - f(z_0)$ ersetzen könnte, darf man annehmen, dass $w_0 = 0$ ist.

Weil f holomorph und nicht konstant ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $f(z) \neq 0$ auf dem Rand der Scheibe $D := D_r(z_0)$ ist (sonst gäbe es eine Folge mit Häufungspunkt z_0, auf der f verschwindet, und dann wäre $f(z) \equiv 0$). Insbesondere ist

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \min_{\partial D} |f| > 0.$$

Nun soll gezeigt werden, dass $U_\varepsilon(0)$ in $f(D) \subset F(G)$ enthalten ist. Dazu sei ein $w \in U_\varepsilon(0)$ beliebig gewählt und $h(z) := f(z) - w$ gesetzt. Dann ist $|h(z_0)| = |w| < \varepsilon$. Für $z \in \partial D$ ist dagegen $|h(z)| \geq |f(z)| - |w| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Also nimmt $|h|$ ein Minimum in D an. Aus dem Minimumprinzip folgt, dass h eine Nullstelle in einem $z \in D$ besitzen muss, und dann ist $w = f(z)$. Damit ist $U_\varepsilon(0) \subset f(D)$ gezeigt. ∎

Bemerkenswert ist, dass f nicht injektiv zu sein braucht. Im Reellen bildet etwa die Funktion $x \mapsto \sin x$ das offene Intervall $(\pi/4, 7\pi/4)$ auf das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ ab, da gilt der Satz von der Gebietstreue nicht.

Und jetzt kommt noch ein weiterer erstaunlicher Satz:

2.4.12. Satz (hinreichende Bedingung für Biholomorphie)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv.

Dann ist $f : G \to f(G)$ biholomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

Beweis: Da f' holomorph und nicht $\equiv 0$ ist, ist $A := \{z \in G \mid f'(z) = 0\}$ diskret in G. Weiter ist $f(G)$ ein Gebiet und $f : G \to f(G)$ stetig, offen[1] und bijektiv, also ein Homöomorphismus. Daher ist auch $M := f(A)$ diskret in $f(G)$.

[1] Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ***offen***, falls sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Da $f : G \setminus A \to f(G) \setminus M$ bijektiv und lokal biholomorph, also sogar global biholomorph ist, gilt: $f^{-1} : f(G) \to G$ ist stetig und außerhalb M holomorph. Folglich ist f^{-1} sogar auf ganz $f(G)$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. ∎

Auch dies ist im Reellen falsch, wie schon das Beispiel der Funktion $x \mapsto x^3$ zeigt.

2.4.13. Satz (Bilder einfach zusammenhängender Gebiete)

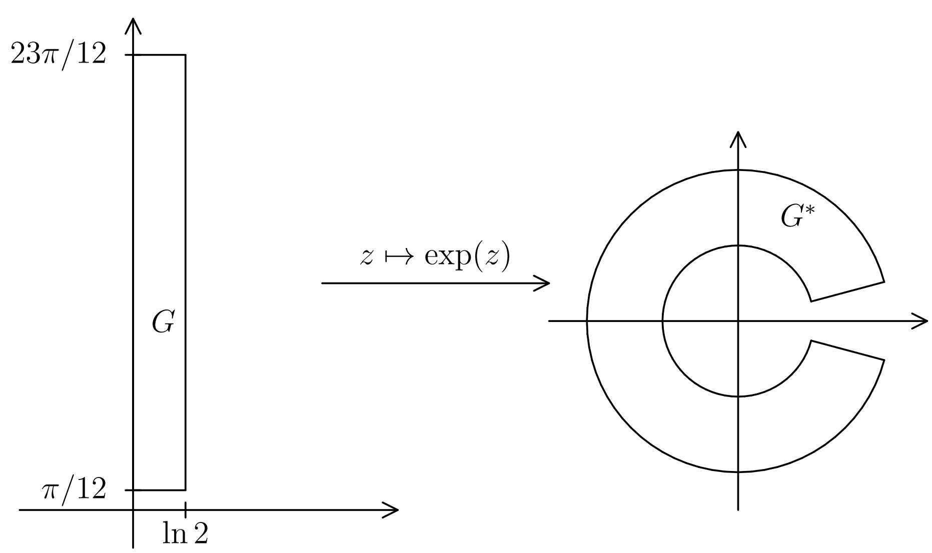
Sei G einfach zusammenhängend, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist auch $F(G)$ einfach zusammenhängend.

Beweis: Wir wissen schon, dass $G^* := F(G)$ ein Gebiet ist. Sei f holomorph auf G^*. Dann ist $(f \circ F) \cdot F'$ holomorph auf G und besitzt dort eine Stammfunktion g. Die Funktion $F^{-1} : G^* \to G$ ist ebenfalls holomorph, und damit auch $h := g \circ F^{-1}$. Es ist

$$h'(w) = g'(F^{-1}(w)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(w))} = f(w) \quad \text{für } w \in G^*.$$ ∎

Dieser Satz liefert uns viele neue Beispiele einfach zusammenhängender Gebiete.

2.4.14. Beispiel



Das Rechteck $G := \{x + \mathrm{i}\, y : 0 < x < \ln 2 \text{ und } \pi/12 < y < 23\pi/12\}$ wird durch $w = \exp(z)$ biholomorph auf einen aufgeschlitzten Kreisring

$$G^* = \{re^{\mathrm{i}\,t} : 1 < r < 2 \text{ und } \pi/12 < t < 23\pi/12\}$$

abgebildet. Weil G sternförmig ist, ist G^* einfach zusammenhängend.

Der komplette Kreisring $K := \{re^{\mathrm{i}\,t} : 1 < r < 2 \text{ und } 0 \leq t < 2\pi\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, denn die auf K holomorphe Funktion $f(z) := 1/z$ besitzt keine Stammfunktion auf K.

2.5 Die Umlaufszahl

Definition (stetige Argumentfunktion):
Sei X ein metrischer Raum und $F : X \to \mathbb{C}^*$ eine stetige Abbildung. Eine ***stetige Argumentfunktion*** längs F ist eine stetige Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = |F(x)|e^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$ für $x \in X$.

2.5.1. Beispiele

1. Ist $X = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ die längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzte Ebene, so ist arg eine stetige Argumentfunktion längs id_X.

2. Ist allgemeiner $G \subset \mathbb{C}^*$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gibt es eine Logarithmusfunktion L auf G. Dann ist $\varphi(z) := \mathrm{Im}(L(z))$ stetig auf G, und

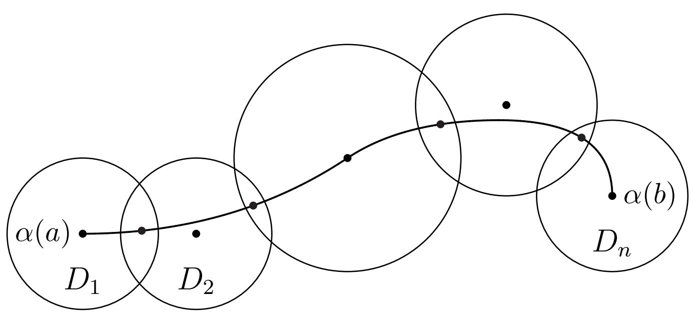
$$z = \exp \circ L(z) = e^{\mathrm{Re}\,L(z)} \cdot e^{\mathrm{i}\;\mathrm{Im}\,L(z)} = e^{\ln|z|} \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(z)} = |z| \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(z)}.$$

   Also ist φ eine stetige Argumentfunktion längs id_G.

Es soll nun gezeigt werden, dass es entlang von stetigen Wegen in $\mathbb{C}^*$ immer eine stetige Argumentfunktion gibt. Dafür braucht man den folgenden Hilfssatz:

2.5.2. Lemma (Existenz von Kreisketten)

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetiger Weg, so gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$, so dass $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ in D_i enthalten ist, für $i = 1, \ldots, n$.



Man nennt $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ eine ***Kreiskette längs*** α.

Beweis: Sei $t^* := \sup\{t \in [a, b] : \exists$ Kreiskette längs α von a bis $t\}$. Offensichtlich existiert t^* mit $a < t^* \le b$. Ist $t^* = b$, so ist alles bewiesen. Andernfalls setzen wir $z^* := \alpha(t^*)$ und wählen ein $r > 0$, so dass $D := D_r(z^*) \subset G$ ist. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\alpha([t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]) \subset D$ ist.

Dann gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t^* - \varepsilon$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$ mit $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$. Dann ist $(D_1, \ldots, D_n, D)$ eine Kreiskette längs $\alpha|_{[a,s]}$, für $s := t^* + \varepsilon$. Wegen $s > t^*$ ist das ein Widerspruch. ∎

Das Konzept des komplexen Kurvenintegrals kann für **holomorphe** Funktionen leicht auf stetige Wege übertragen werden. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetiger Weg, so gibt es eine Kreiskette $\{D_1, \ldots, D_n\}$ längs α mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i \subset G$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist f auf G holomorph, so wählt man auf D_i jeweils eine Stammfunktion F_i von f und definiert

$$\int_\alpha f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{n} \Big(F_i\big(\alpha(t_i)\big) - F_i\big(\alpha(t_{i-1})\big) \Big).$$

Bemerkungen:

1. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Kreiskette und der Wahl der Stammfunktionen. Geht man nämlich von F_i zu einer anderen Stammfunktion $\widetilde{F_i}$ über, so ist $\widetilde{F_i} = F_i + C_i$, mit einer Konstanten C_i. Die Konstanten fallen in der Summe wieder weg. Man kann sie also so wählen, dass $F_i = F_{i+1}$ auf $D_i \cap D_{i+1}$ ist. Laut Identitätssatz sind die Werte der F_i längs α durch F_0 eindeutig bestimmt. Deshalb ist das Integral von der Kreiskette unabhängig.

2. Falls α stückweise stetig-differenzierbar ist, stimmt der neue Integralbegriff mit dem schon vorhandenen überein.

2.5.3. Satz

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ ein stetiger Weg. Dann gibt es eine stetige Argumentfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ längs α. Je zwei solche Funktionen unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π.

BEWEIS: Es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und eine dazu passende Kreiskette $(D_1, \ldots, D_n)$ längs α in $\mathbb{C}^*$. Auf jeder der Kreisscheiben D_ν gibt es eine Logarithmusfunktion L_ν. Sei $\psi_\nu : [t_{\nu-1}, t_\nu] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi_\nu(t) := \operatorname{Im}(L_\nu \circ \alpha(t))$.

Zu jedem $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $k_\nu \in \mathbb{Z}$, so dass $L_{\nu+1} = L_\nu + 2\pi\,\mathrm{i}\, k_\nu$ auf $D_\nu \cap D_{\nu+1}$ ist. Dann ist $\psi_{\nu+1} = \psi_\nu + 2\pi k_\nu$, und man kann definieren:

$$\varphi(t) := \begin{cases} \psi_1(t) & \text{für } t_0 \le t < t_1 \\ \psi_\nu(t) - 2\pi(k_1 + \cdots + k_{\nu-1}) & \text{für } \nu \ge 2 \text{ und } t_{\nu-1} \le t < t_\nu. \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ stetig. Auf $[t_{\nu-1}, t_\nu)$ ist

$$|\alpha(t)| e^{\mathrm{i}\,\varphi(t)} = \exp\big(\ln|\alpha(t)| + \mathrm{i}\,\psi_\nu(t)\big) = \exp\big(L_\nu \circ \alpha(t)\big) = \alpha(t).$$

Also ist φ eine stetige Argumentfunktion längs α.

Sind $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Argumentfunktionen längs α, so ist $e^{\mathrm{i}\,\varphi(t)} = e^{\mathrm{i}\,\psi(t)}$, also $e^{\mathrm{i}\,(\varphi(t) - \psi(t))} \equiv 1$. Dann ist $\varphi - \psi$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$, die nur Werte in $2\pi\mathbb{Z}$ annimmt. Weil $[a, b]$ zusammenhängend ist, muss $\varphi - \psi$ konstant (und ein Element von $2\pi\mathbb{Z}$) sein. ∎

Definition (Umlaufszahl für Integrationswege):
Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $z \notin |\alpha|$. Dann heißt

$$n(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die ***Umlaufszahl*** von α bezüglich z.

Bemerkung: Setzt man $\alpha_z(t) := \alpha(t) - z$, so ist $0 \notin |\alpha_z|$ und

$$n(\alpha_z, 0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\alpha_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\alpha_z'(t)}{\alpha_z(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z}\,dt = n(\alpha, z).$$

Man kann also viele Aussagen über Umlaufszahlen auf den Fall zurückführen, dass der betrachtete Punkt der Nullpunkt ist.

2.5.4. Satz

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein ***geschlossener*** *Integrationsweg, $z \notin |\alpha|$ und φ eine stetige Argumentfunktion längs α_z. Dann ist $n(\alpha, z) = (\varphi(b) - \varphi(a))/2\pi$ eine ganze Zahl.*

Beweis: Es reicht, Umlaufszahlen um den Nullpunkt zu untersuchen. Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Integrationsweg und φ eine stetige Argumentfunktion längs α. Wir wählen eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und eine dazu passende Kreiskette $(D_1, \ldots, D_n)$ längs α in $\mathbb{C}^*$. Auf jeder der Kreisscheiben D_ν gibt es eine Logarithmusfunktion L_ν, so dass gilt:

$$L_\nu(\alpha(t)) = \ln|\alpha(t)| + \mathrm{i}\,\varphi(t) \quad \text{für } t \in [t_{\nu-1}, t_\nu].$$

Setzt man $\alpha_\nu := \alpha|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$, so ist $(L_\nu \circ \alpha)'(t) = \alpha_\nu'(t)/\alpha_\nu(t)$ und

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{\nu=1}^n \int_{\alpha_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \frac{\alpha_\nu'(t)}{\alpha_\nu(t)}\,dt = \sum_{\nu=1}^n \Big(L_\nu(\alpha(t_\nu)) - L_\nu(\alpha(t_{\nu-1})) \Big) \\
&= \sum_{\nu=1}^n \Big(\ln|\alpha(t_\nu)| - \ln|\alpha(t_{\nu-1})| + \mathrm{i}\,\varphi(t_\nu) - \mathrm{i}\,\varphi(t_{\nu-1}) \Big) = \mathrm{i}\,(\varphi(b) - \varphi(a)),
\end{aligned}$$

weil sich alle anderen Terme wegheben. Also ist $n(\alpha, z) = (\varphi(b) - \varphi(a))/2\pi$.

Weil $e^{\mathrm{i}\,\varphi(t)} = \alpha(t)/|\alpha(t)|$ ist, ist $e^{\mathrm{i}\,\varphi(b)} = e^{\mathrm{i}\,\varphi(a)}$ und damit $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $n(\alpha, 0) = k$ ganzzahlig (und hängt natürlich nicht von φ ab). ∎

Die Umlaufszahl eines geschlossenen Weges α um einen Punkt $z \notin |\alpha|$ zählt, wie oft z von α umlaufen wird.

Jeder Weg ist auch eine Kette. Ein Weg α ist genau dann geschlossen, wenn $z_A(\alpha) = z_E(\alpha)$ ist. Nun sollen „geschlossene Ketten“ eingeführt werden, sogenannte Zyklen.

Definition (Zyklus):

Eine Kette $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j \alpha_j$ in einem Gebiet G heißt ein ***Zyklus*** in G, falls für jeden Punkt $z \in G$ gilt:

$$\sum_{j \text{ mit } z = z_A(\alpha_j)} n_j = \sum_{j \text{ mit } z = z_E(\alpha_j)} n_j .$$

2.5.5. Beispiele

1. Ist α ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt z_0, so ist $n \cdot \alpha$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Zyklus, denn die zu betrachtenden Summen ergeben entweder beide n (im Punkt z_0) oder 0 (sonst). Das gilt auch für konstante Wege.

2. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ irgendwelche Wege mit $z_E(\alpha_j) = z_A(\alpha_{j+1})$ und $z_E(\alpha_N) = z_A(\alpha_1)$, so ist $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ ein Zyklus.

3. Sind $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ Zyklen und $a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, so ist auch die Linearkombination $a_1\Gamma_1 + \cdots + a_n\Gamma_n$ ein Zyklus.

2.5.6. Verallgemeinerter Fundamentalsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. f besitzt genau dann auf G eine Stammfunktion, wenn gilt:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \textit{für jeden Zyklus } \Gamma \textit{ in } G.$$

Beweis: 1) Sei $f = F'$ auf G und $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j \alpha_j$ ein Zyklus in G. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= \sum_{j=1}^{N} n_j \int_{\alpha_j} F'(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} n_j \Big[F\big(z_E(\alpha_j)\big) - F\big(z_A(\alpha_j)\big)\Big] \\
&= \sum_{z \in G} F(z) \cdot \left(\sum_{j \text{ mit } z = z_E(\alpha_j)} n_j - \sum_{j \text{ mit } z = z_A(\alpha_j)} n_j \right) = 0.
\end{aligned}$$

2) Ist umgekehrt das Kriterium erfüllt, so ist insbesondere $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg α, und f besitzt eine Stammfunktion. ∎

Auch der Begriff der Umlaufszahl kann verallgemeinert werden:

Definition (Umlaufszahl für Ketten):

Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j\alpha_j$ eine Kette in $\mathbb{C}$ und $z \notin |\Gamma|$. Dann heißt

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \sum_{j=1}^{N} n_j \int_{\alpha_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die ***Umlaufszahl*** von Γ bezüglich z.

2.5.7. Eigenschaften der Umlaufszahl

1. $n(\Gamma, z)$ hängt stetig von z ab.

2. $n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z)$ und $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$.

Der Beweis ist trivial.

2.5.8. Satz (Umlaufszahlen von Zyklen sind ganzzahlig)

Ist Γ ein Zyklus und $z_0 \notin |\Gamma|$, so ist $n(\Gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Auch hier kann man wieder annehmen, dass $z_0 = 0$ ist.

Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j\alpha_j$. Es gibt dann zu jedem Weg $\alpha_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}^*$ eine stetige Argumentfunktion $\varphi_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}$, so dass gilt: $n(\alpha_j, 0) = \dfrac{1}{2\pi}\big(\varphi_j(b_j) - \varphi_j(a_j)\big)$, also $n(\Gamma, 0) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} n_j \cdot \big(\varphi_j(b_j) - \varphi_j(a_j)\big)$. Es gibt ganze Zahlen k_j und l_j, so dass $\varphi_j(a_j) = \arg(z_A(\alpha_j)) + 2\pi k_j$ und $\varphi_j(b_j) = \arg(z_E(\alpha_j)) + 2\pi l_j$ ist. Also ist

$$\begin{aligned}
n(\Gamma, 0) &= \sum_{j=1}^{N} n_j(k_j - l_j) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} n_j \Big(\arg\big(z_E(\alpha_j)\big) - \arg\big(z_A(\alpha_j)\big)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{N} n_j(k_j - l_j) + \frac{1}{2\pi} \sum_{z \in G} \arg(z) \cdot \left(\sum_{j \text{ mit } z = z_E(\alpha_j)} n_j - \sum_{j \text{ mit } z = z_A(\alpha_j)} n_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} n_j(k_j - l_j) \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

∎

2.5.9. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$

Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann enthält $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, und genau eine davon ist unbeschränkt. Die Umlaufszahl $n(\Gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente konstant und verschwindet auf der unbeschränkten Komponente.

Beweis: 1) $|\Gamma|$ ist kompakt und daher in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_R(0)}$ enthalten. Die zusammenhängende Menge $U := \mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ liegt in einer (unbeschränkten) Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$, jede andere Komponente muss in $D_R(0)$ enthalten, also beschränkt sein.

2) Die offene Menge $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ besitzt höchstens abzählbar viele Komponenten. Die Funktion $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist auf $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ stetig und nimmt dort nur ganzzahlige Werte an. Also muss sie auf jeder Komponente konstant sein.

3) Ist $|a| > R + 1$, so liegt a in der unbeschränkten Komponente, und $f(z) := 1/(z-a)$ ist holomorph auf $D_{R+1}(0)$, besitzt dort also eine Stammfunktion. Deshalb ist

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

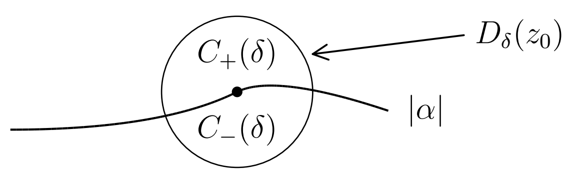
Daraus folgt, dass die Umlaufszahl auf der ganzen unbeschränkten Komponente verschwindet. ∎

Es gibt ein praktisches Verfahren, zu einem geschlossenen Integrationsweg α ganz einfach „per Hand“ sämtliche Umlaufszahlen $n(\alpha, z)$ zu bestimmen. Dafür braucht man den folgenden Satz, der im Anhang bewiesen wird:

2.5.10. Satz

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, $z_0 := \alpha(t_0)$ für ein $t_0 \in (a, b)$ und $\alpha'(t_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle δ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$ gilt:

$D_\delta(z_0) \setminus |\alpha|$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, und jeder Punkt aus $D_\delta(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt von beiden Komponenten. Wählt man $\varepsilon > 0$ klein genug, so trifft die Gerade $L = z_0 + \mathbb{R}\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ die Spur von α im Innern der Kreisscheibe $D_\varepsilon(z_0)$ nur in z_0.



Ist $C_+(z_0, \varepsilon)$ diejenige Zusammenhangskomponente von $D_\varepsilon(z_0) \setminus |\alpha|$, in der die Punkte $z_0 + s\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ mit $s > 0$ liegen, und $C_-(z_0, \varepsilon)$ die andere Komponente, so sagt man, dass die Punkte von C_+ „links“ von α und die Punkte von C_- „rechts“ von α liegen. Auf diese Weise kann man zumindest in glatten Punkten von α

zwischen der rechten und der linken Seite von α unterscheiden. Nun kann man den gewünschten Satz formulieren:

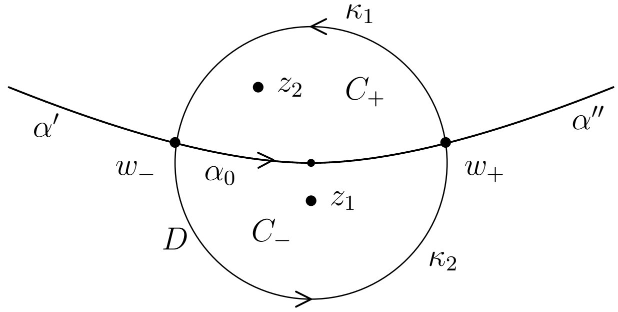
2.5.11. Satz über die Bestimmung von Umlaufszahlen

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, $t_0 \in (a, b)$, $z_0 := \alpha(t_0)$ und α in der Nähe von t_0 glatt. Ist $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass die Aussagen des vorangegangenen Satzes erfüllt sind, so gilt für $z_1 \in C_-$ und $z_2 \in C_+$:

$$n(\alpha, z_2) = n(\alpha, z_1) + 1.$$

Beweis: Die Parameter t_- und t_+ seien so gewählt, dass gilt:

1. $t_- < t_0 < t_+$.
2. $w_- := \alpha(t_-)$ und $w_+ := \alpha(t_+)$ liegen auf ∂D.
3. $\alpha(t) \in D$ für $t_- < t < t_+$.



Da $w_- \neq w_+$ ist, wird der Kreis ∂D durch diese Punkte in zwei Kreisbögen κ_1 und κ_2 (links und rechts von α) unterteilt, so dass $\partial D = \kappa_1 + \kappa_2$ ist. Schließlich sei noch

$$\alpha' := \alpha|_{[a,t_-]}, \quad \alpha_0 := \alpha|_{[t_-,t_+]} \quad \text{und} \quad \alpha'' := \alpha|_{[t_+,b]}.$$

Dann ist $\alpha = \alpha' + \alpha_0 + \alpha''$, $\partial C_+ = \alpha_0 + \kappa_1$ und $\partial C_- = \kappa_2 - \alpha_0$.

Sei $\gamma := \alpha' - \kappa_1 + \alpha''$. Dann ist γ ein geschlossener Weg. Da $|\gamma| \cap D = \varnothing$ ist, liegt D ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, und es ist $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2)$. Weiter gilt:

1. $n(\kappa_1 + \kappa_2, z) = n(\partial D, z) = 1$ für jedes $z \in D$.

2. $n(\alpha_0 + \kappa_1, z_1) = n(\partial C_+, z_1) = 0$ und $n(\kappa_2 - \alpha_0, z_2) = n(\partial C_-, z_2) = 0$, weil die Punkte jeweils in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \partial C_+$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \partial C_-$ liegen. Außerdem ist $n(\alpha_0 + \kappa_1, z_2) = n(\alpha_0 - \kappa_2, z_2) + n(\kappa_2 + \kappa_1, z_2) = 0 + n(\partial D, z_2) = 1$.

Alles zusammen ergibt:

$$\begin{aligned} n(\alpha, z_2) - n(\alpha, z_1) &= n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_2) - n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_1) \\ &= n(\gamma, z_2) + n(\alpha_0 + \kappa_1, z_2) - n(\gamma, z_1) - n(\kappa_1 + \alpha_0, z_1) \\ &= n(\gamma, z_2) + 1 - n(\gamma, z_1) - 0 \;=\; 1. \end{aligned}$$

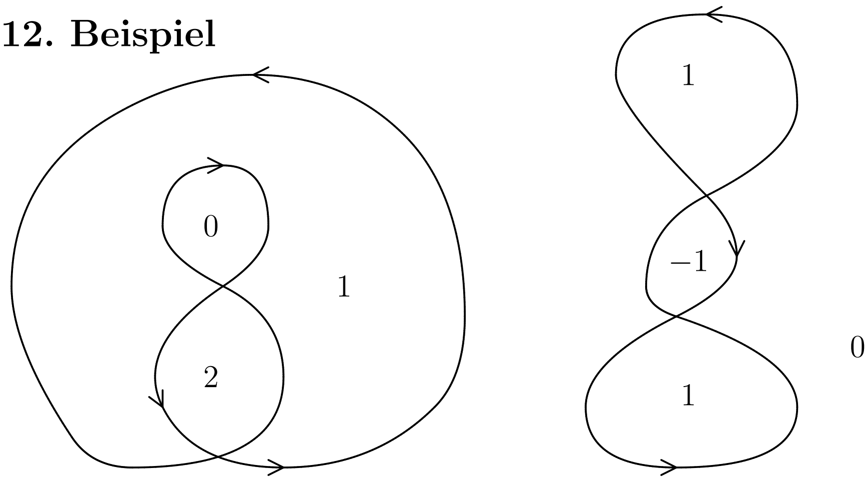
Damit ist alles gezeigt. ■

Die Moral von der Geschichte ist also:

1. Liegt z „weit draußen“, so ist auf jeden Fall $n(\alpha, z) = 0$.

2. Überquert man α (von außen kommend) in einem glatten Punkt so, dass α dabei von links kommt, so erhöht sich die Umlaufszahl um 1. Kommt α von rechts, so erniedrigt sie sich um 1.

2.5.12. Beispiel



Definition (Inneres und Äußeres eines Weges):
Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein **geschlossener** Integrationsweg. Dann nennt man

$$\mathrm{Int}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\alpha| \,:\, n(\alpha, z) \neq 0\} \text{ das } \textit{\textbf{Innere}}$$

und $\quad \mathrm{Ext}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\alpha| \,:\, n(\alpha, z) = 0\}$ das ***Äußere*** des Weges α.

2.5.13. Satz

Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $\alpha : [a, b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg, so ist $\mathrm{Int}(\alpha) \subset G$.

BEWEIS: Ist $z_0 \notin G$, so ist $1/(z - z_0)$ holomorph auf G und daher $n(\alpha, z_0) = 0$. ∎

Man kann zeigen:

2.5.14. Spezieller Jordan'scher Kurvensatz

Ist α ein einfach geschlossener, glatter Integrationsweg, so besteht $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten und auf der beschränkten Komponente ist $|n(\alpha, z)| = 1$.

Auch dieser Satz wird im Anhang bewiesen. Die Spur eines glatten, einfach geschlossenen Integrationsweges (zusammen mit dem Durchlaufungssinn) nennen wir eine ***(glatte) Jordankurve***. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das von endlich vielen (glatten) Jordankurven berandet wird, so dass G stets links von diesen Kurven liegt, nennt man ein ***positiv berandetes Gebiet***. Dann ist $n(\partial G, z) = 1$ für alle $z \in G$.

2.6 Der allgemeine Cauchy'sche Integralsatz

Definition (nullhomologe Zyklen):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein Zyklus Γ in G heißt ***nullhomolog*** in G, falls $n(\Gamma, z) = 0$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus G$ ist. Zwei Zyklen Γ_1, Γ_2 in G heißen ***homolog*** in G, falls ihre Differenz nullhomolog in G ist.

Anschaulich gesprochen ist ein Zyklus Γ genau dann nullhomolog in G, wenn er keinen Punkt des Komplementes von G umläuft. Der Rand des Einheitskreises ist also in $\mathbb{C}^*$ nicht nullhomolog. Nun kann man den Cauchy'schen Integralsatz in folgender Weise verallgemeinern:

2.6.1. Allgemeiner Cauchy'scher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein nullhomologer Zyklus in G. Dann gilt:

1. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$
2. *Ist $z \in G \setminus |\Gamma|$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so ist*

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Beweis: Der hier vorgestellte Beweis wurde 1971 von J.D.Dixon veröffentlicht.

1. Schritt: Auf $G \times G$ wird folgende Funktion definiert:

$$g(w, z) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass g stetig und bei festem w holomorph in z ist. Die Stetigkeit von g in Punkten (w, z) mit $w \neq z$ ist klar. Also untersuchen wir Differenzen der Gestalt $g(w, z) - g(z_0, z_0)$.

a) Ist $w = z$, so erhält man $g(w, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0)$, und diese Differenz strebt für $z \to z_0$ gegen Null.

b) Ist $w \neq z$, so ist

$$g(w, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0) = \frac{1}{w - z} \int_z^w \big(f'(\zeta) - f'(z_0)\big)\,d\zeta.$$

In der Nähe von z_0 kann man das Integral über die Verbindungsstrecke von z und w erstrecken und erhält:

$$|g(w,z) - g(z_0,z_0)| \le \sup_{[0,1]} |f'(z + t(w-z)) - f'(z_0)|.$$

Wegen der Stetigkeit von f' strebt der Ausdruck auf der rechten Seite für $(w,z) \to (z_0,z_0)$ gegen Null.

Bei festem w ist $g(w,z)$ stetig und für $z \ne w$ holomorph, also überhaupt holomorph.

2. Schritt: Wir wollen zunächst die Formel (2) im Falle $k = 0$ beweisen.

Sei $z \in G \setminus |\Gamma|$. Es ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - n(\Gamma,z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma g(\zeta,z)\,d\zeta.$$

Um die verallgemeinerte Integralformel für $k = 0$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass $\displaystyle\int_\Gamma g(\zeta,z)\,d\zeta = 0$ ist. Wir definieren daher $h_0 : G \to \mathbb{C}$ durch

$$h_0(z) := \int_\Gamma g(\zeta,z)\,d\zeta.$$

Offensichtlich ist h_0 stetig, und wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Morera, dass h_0 sogar holomorph ist: Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\,dz = \int_{\partial\Delta}\int_\Gamma g(\zeta,z)\,d\zeta\,dz = \int_\Gamma \left[\int_{\partial\Delta} g(\zeta,z)\,dz\right] d\zeta.$$

Die Vertauschbarkeit der Integrale ist gegeben, weil g stetig auf $G \times G$ ist. Aber weil $g(\zeta,z)$ bei festem ζ holomorph in z ist, verschwindet das innere Integral auf der rechten Seite und damit auch das Gesamtintegral auf der linken Seite. h_0 ist tatsächlich holomorph auf G.

3. Schritt: Der entscheidende Trick des Beweises kommt jetzt:

Sei $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma| \,:\, n(\Gamma,z) = 0\}$. Als Vereinigung von Zusammenhangskomponenten ist G_0 offen. Da Γ nullhomolog in G ist, liegt $\mathbb{C} \setminus G$ in G_0, und daher ist $G \cup G_0 = \mathbb{C}$. Auf $G \cap G_0$ gilt jedoch:

$$h_0(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta =: h_1(z),$$

und h_1 ist auf $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ und damit insbesondere auf G_0 holomorph. h_0 lässt sich also mit Hilfe von h_1 zu einer ganzen Funktion h fortsetzen. Die Standardabschätzung zeigt sofort, dass $h_1(z)$ für $z \to \infty$ gegen Null strebt. Damit ist h beschränkt und nach Liouville konstant. Und diese Konstante muss offensichtlich $= 0$ sein.

4. Schritt: Wir haben die Integralformel für den Fall $k = 0$ bewiesen:

$$n(\Gamma,z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Die Fälle $k \geq 1$ ergeben sich hieraus durch fortgesetztes Differenzieren (wobei zu berücksichtigen ist, dass $z \mapsto n(\Gamma, z)$ lokal-konstant ist). Die Formel (1) erhält man, indem man die Formel (2) im Falle $k = 0$ für ein festes z_0 auf die Funktion $F(z) := f(z)(z - z_0)$ anwendet. Wegen $F(z_0) = 0$ ist

$$0 = n(\Gamma, z_0) \cdot F(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma f(z)\, dz.$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

2.6.2. Satz (Homologie und einfacher Zusammenhang)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *Jeder Zyklus in G ist nullhomolog in G.*
2. $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$ *für jeden Zyklus Γ und jede holomorphe Funktion f in G.*
3. *G ist einfach zusammenhängend, d.h., jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion.*
4. *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen, so gibt es eine holomorphe Funktion q auf G mit* $\exp \circ q = f$.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) : Das haben wir oben gerade gezeigt.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Das ist der Hauptsatz über Kurvenintegrale.

(3) $\Longrightarrow$ (4) : Auch diese Aussage haben wir schon früher bewiesen.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : Sei Γ ein Zyklus in G und $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann hat $f(z) := z - a$ keine Nullstelle in G und es gibt eine holomorphe Funktion q mit $f = \exp \circ q$. Nun folgt:

$$f'(z) = q'(z) \cdot f(z), \text{ also } q'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a}.$$

Daher ist $n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma \frac{1}{z - a}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\Gamma q'(z)\, dz = 0$, wie aus dem verallgemeinerten Fundamentalsatz folgt. ∎

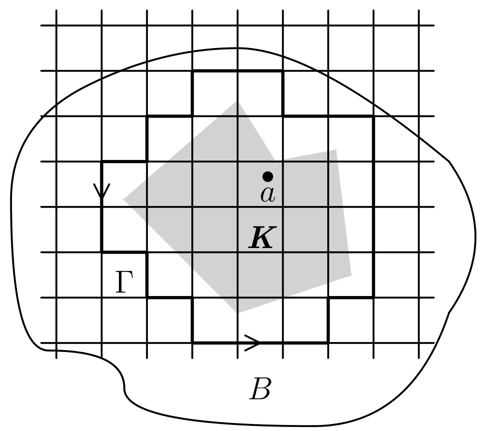
2.6.3. Satz (vom Zyklus um ein Kompaktum)

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset B$ kompakt. Dann gibt es einen Zyklus Γ in $B \setminus K$, so dass gilt:

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in K, \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus B. \end{cases}$$

BEWEIS: Ist $B = \mathbb{C}$, so ist die Aussage trivial. Ist $B \neq \mathbb{C}$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $2\delta < \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus B)$.

1) Zunächst sei angenommen, dass K zusammenhängend ist. Dann sei $a \in K$ fest gewählt, sowie ein Netz von achsenparallelen Quadraten Q_ι, $\iota \in J$, mit der Seitenlänge δ, so dass a im Innern des Quadrates Q_{ι_0} liegt und B davon überdeckt wird. Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $J_0 \subset J$, so dass gilt: $Q_\iota \cap K \neq \varnothing \iff \iota \in J_0$.



Dann ist $\widetilde{\Gamma} := \sum_{\iota \in J_0} \partial Q_\iota$ ein Zyklus und offensichtlich

$$n(\widetilde{\Gamma}, a) = \sum_{\iota \in J_0} n(\partial Q_\iota, a) = n(\partial Q_{\iota_0}, a) = 1.$$

Lässt man alle Kanten weg, die doppelt auftreten, so erhält man einen Zyklus Γ mit $n(\Gamma, a) = 1$ und $|\Gamma| \cap K = \varnothing$.

Für $z \in |\Gamma|$ ist $\operatorname{dist}(z, K) \leq \sqrt{2}\delta < 2\delta < \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus B)$. Damit liegt $|\Gamma|$ in $B \setminus K$.

Weil K als zusammenhängend angenommen wurde, muss K in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ liegen. Also ist $n(\Gamma, z)$ auf K konstant $= 1$. Und für $z \in \mathbb{C} \setminus B$ und $\iota \in J$ ist $z \notin Q_\iota$, also $n(\partial Q_\iota, z) = 0$ und damit $n(\Gamma, z) = 0$.

2) Besteht K aus mehreren Komponenten K_i, so wählt man in jeder Komponente einen Punkt a_i und die Zahl δ so klein, dass jeder der Punkte a_i im Innern eines der Quadrate liegt. Der Beweis lässt sich dann ganz analog durchführen. ∎

Jetzt folgt:

2.6.4. Satz (Kriterium für einfachen Zusammenhang)

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn gilt: Es gibt keine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{C} \setminus G$ in zwei abgeschlossene Teilmengen, von denen eine kompakt und nicht leer ist.

Beweis: 1) Sei G einfach zusammenhängend. Annahme, es gibt eine Zerlegung $\mathbb{C} \setminus G = A' \cup A''$ in zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen, so dass A' kompakt und nicht leer ist.

Die Menge $B := G \cup A'$ ist offen, denn $\mathbb{C} \setminus B = A''$ ist abgeschlossen. Also gibt es einen Zyklus Γ in $B \setminus A' = G$ mit

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in A' \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus B. \end{cases}$$

Aber da G einfach zusammenhängend ist, muss jeder Zyklus in G nullhomolog in G sein, also insbesondere $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \in A' \subset \mathbb{C} \setminus G$. Das ist ein Widerspruch.

2) Ist G hingegen nicht einfach zusammenhängend, so gibt es einen Zyklus Γ in G, der dort nicht nullhomolog ist. Sei nun

$$\begin{aligned} A' &:= \{z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) \neq 0\} \\ \text{und} \quad A'' &:= \{z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) = 0\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $A' \neq \varnothing$, und da nur auf den beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ die Umlaufszahl $\neq 0$ sein kann, ist A' beschränkt.

Sei nun $A \in \{A', A''\}$. Eine Folge von Punkten $a_\nu \in A \subset \mathbb{C} \setminus G$, die in $\mathbb{C}$ gegen ein a_0 konvergiert, muss auch schon in der abgeschlossenen Menge $\mathbb{C} \setminus G$ konvergieren. Dann kann aber a_0 nicht auf der Spur von Γ liegen, und es gibt eine offene Umgebung $U = U(a_0)$ und ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, so dass $n(\Gamma, z)$ auf U konstant $= n_0$ ist. Da a_0 und fast alle a_ν in U liegen, muss a_0 genau wie die a_ν zu A gehören. Das zeigt, dass A' und A'' beide abgeschlossen in $\mathbb{C}$ sind, und die beschränkte Menge A' ist dann natürlich sogar kompakt. ∎

2.6.5. Beispiel

Sei $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\alpha(t) := t \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$. Dann ist $|\alpha|$ eine bei Null startende und nach ∞ strebene Spirale, die offensichtlich abgeschlossen, zusammenhängend und nicht kompakt ist. Sie kann nicht in zwei abgeschlossene, nicht leere Mengen zerlegt werden, und daher auch nicht in zwei abgeschlossene Mengen, von denen eine kompakt und nicht leer ist. Also ist $G := \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ ein in $\mathbb{C}^*$ enthaltenes einfach zusammenhängendes Gebiet. Insbesondere gibt es auf G eine Logarithmusfunktion.

2.7 Anhang zu Kapitel 2

Im Anhang finden sich einige Beweise, die nicht in der Vorlesung vorgeführt wurden.

Zur Bemerkung nach dem Beispiel 2.2.9 (Seite 63)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h auf G mit folgenden Eigenschaften:

1. $\exp(h(z)) = f(z)$ *für alle* $z \in G$.
2. $h'(z) = f'(z)/f(z)$.

Je zwei Funktionen h_1 und h_2 auf G mit den Eigenschaften (1) und (2) unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\,\mathrm{i}$.

Beweis: 1) Weil f'/f holomorph auf G ist, gibt es eine Stammfunktion F von f'/f. Sei $H := (\exp \circ F)/f$. Dann ist H holomorph und

$$H'(z) = \frac{\exp(F(z)) \cdot F'(z) \cdot f(z) - \exp(F(z)) \cdot f'(z)}{f(z)^2} \equiv 0 \text{ für alle } z \in G$$

(weil $F' = f'/f$ ist), also $H(z) \equiv c$ konstant. Deshalb ist $\exp(F(z)) = c \cdot f(z)$ und $c \neq 0$. Man setze $h(z) := F(z) - \log(c)$, mit einem geeigneten Logarithmus von c. Dann ist h holomorph und $\exp \circ h(z) = \exp \circ F(z)/c = f(z)$.

2) Aus der Gleichung $\exp \circ h(z) = f(z)$ erhält man durch Differentiation die Gleichung $(\exp \circ h)(z)) \cdot h'(z) = f'(z)$, also $h'(z) = f'(z)/f(z)$.

3) Ist $\exp \circ h_1 = \exp \circ h_2$, so ist $\exp(h_1(z) - h_2(z)) \equiv 1$. Das bedeutet, dass $h_1 - h_2$ nur Werte in $2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$ annimmt. Weil $h_1'(z) = f'(z)/f(z) = h_2'(z)$ ist, also $(h_1 - h_2)'(z) \equiv 0$, ist $h_1 - h_2$ lokal konstant und damit auf dem Gebiet G konstant. Daraus folgt, dass sich h_1 und h_2 nur um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\,\mathrm{i}$ unterscheiden. ∎

Hilfssatz für Satz 2.5.10. (Seite 85)

a) Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0)$ reell und > 0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $r(t) := |\alpha(t)|$ stetig differenzierbar und $r'(t) > 0$ auf $[0, \varepsilon]$ ist. Man kann ε so klein wählen kann, dass man $|\alpha| \cap \overline{D_\varepsilon(0)}$ durch $\widetilde{\alpha} : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{\alpha}(s) := s \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(s)}$ parametrisieren kann, wobei $\varphi : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = \arg \alpha'(0)$ ist.

b) Ist allgemein $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha'(0) \neq 0$, so kann man mit Hilfe einer biholomorphen Abbildung die Voraussetzungen von (a) herstellen.

Beweis: a) Weil α **stetig** differenzierbar und $\alpha'(0) \neq 0$ ist, kann man annehmen, dass $\alpha'(t) \neq 0$ für $t \in [0, 1]$ ist. Wir schreiben $\alpha(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$. Dann ist

$x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) > 0$ und $y'(0) = 0$, und man kann annehmen, dass $x'(t) > 0$ für $t \in [0,1]$ ist. Sei

$$r(t) := |\alpha(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Für $t \neq 0$ ist r stetig differenzierbar, und außerdem gilt:

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2} \xrightarrow{t\to 0} \sqrt{x'(0)^2 + y'(0)^2} = x'(0).$$

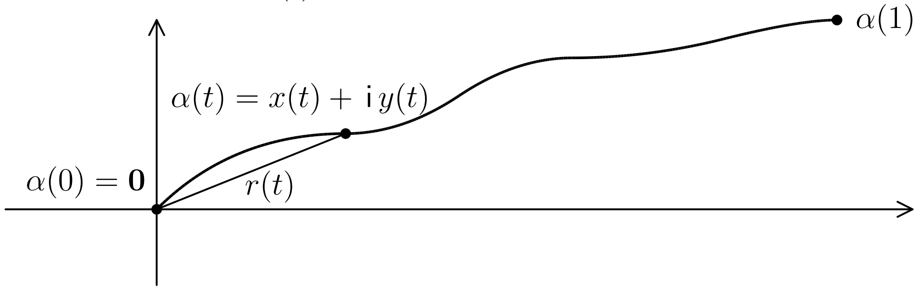
Das bedeutet, dass r auch in $t = 0$ differenzierbar und $r'(0) = x'(0)$ ist. Andererseits gilt für $t \neq 0$:

$$r'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{r(t)} = \frac{\frac{x(t)}{t} \cdot x'(t) + \frac{y(t)}{t} \cdot y'(t)}{\frac{r(t)}{t}},$$

und dieser Ausdruck strebt für $t \to 0$ gegen

$$\frac{x'(0)^2 + y'(0)^2}{x'(0)} = x'(0).$$

Also ist r auf $[0,1]$ sogar stetig differenzierbar, und wenn $\delta > 0$ klein genug ist, ist $r'(t) > 0$ auf $[0,\delta]$. Damit ist r dort streng monoton wachsend. Setzen wir $\varepsilon := r(\delta)$, so ist $r : [0,\delta] \to [0,\varepsilon]$ bijektiv, und zu jedem ϱ mit $0 \leq \varrho \leq \varepsilon$ gibt es genau ein t mit $0 \leq t \leq \delta$ und $r(t) = \varrho$.



Die Umkehrabbildung $t(s) := r^{-1}(s)$ ist stetig und auch streng monoton wachsend, und es ist $r(t(s)) = s$. Schreibt man $x(t)$ in der Form

$$x(t) = x(0) + t \cdot \Delta(t), \text{ mit } \lim_{t\to 0} \Delta(t) = \Delta(0) = x'(0) > 0,$$

so sieht man, dass auch $x(t) > 0$ für kleines $t > 0$ ist. Daher ist

$$\varphi(s) := \arctan\left(\frac{y(t(s))}{x(t(s))}\right)$$

definiert und stetig für $0 < s < \varepsilon$ (für genügend kleines ε). Mit l'Hospital folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{s\to 0} \varphi(s) = \arctan\left(\frac{y'(0)}{x'(0)}\right) = 0,$$

d.h. $\varphi : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ ist stetig, mit $\varphi(0) = 0 = \arg(\alpha'(0))$. Schreibt man $\alpha(t) = r(t)e^{\mathrm{i}\,\psi(t)}$, mit einer stetigen Argumentfunktion ψ mit $\psi(0) = 0$, so ist

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sin\psi(t)}{\cos\psi(t)} = \tan\psi(t),$$

also $\varphi(s) = \psi(t(s))$. Deshalb ist $\widetilde{\alpha}(s) := \alpha(t(s)) = s \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(s)}$ die gesuchte Parametrisierung der Spur von α.

b) Wendet man eine biholomorphe Abbildung Φ an, so ersetzt man α durch $\Phi \circ \alpha$. Löst man dann das Problem aus (a) für den Weg $\Phi\circ\alpha$ mit Hilfe einer Parametrisierung α^* von $|\Phi \circ \alpha| = \Phi(|\alpha|)$, so parametrisiert $\widetilde{\alpha} := \Phi^{-1} \circ \alpha*$ den ursprünglichen Weg α.

Ist $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha'(0) = re^{\mathrm{i}\,\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$, so setze man $T(z) := z - z_0$ und $D(w) := e^{-\mathrm{i}\,\theta}\cdot w$, sowie $\Phi := D\circ T$. Dann ist Φ biholomorph, $\Phi\circ\alpha(0) = \Phi(z_0) = D(0) = 0$ und $(\Phi \circ \alpha)'(0) = D'(0) \cdot T'(z_0) \cdot \alpha'(0) = e^{-\mathrm{i}\,\theta} \cdot 1 \cdot re^{\mathrm{i}\,\theta} = r$. ∎

Satz 2.5.10. (Seite 85)

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Integrationsweg, $t_0 \in (a, b)$ und α glatt in $z_0 := \alpha(t_0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle δ mit $0 < \delta \le \varepsilon$ gilt:

$D_\delta(z_0)\setminus|\alpha|$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, und jeder Punkt von $D_\delta(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten. Wählt man $\varepsilon > 0$ klein genug, so trifft die Gerade $L := z_0 + \mathbb{R}\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ die Spur von α im Innern von $D_\delta(z_0)$ nur im Punkt z_0.

Beweis: O.B.d.A. sei $t_0 = 0$ und $z_0 = 0$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

1. $a \le -\varepsilon < 0 < \varepsilon \le b$.
2. $\alpha_l := \alpha|_{[-\varepsilon,0]}$ und $\alpha_r := \alpha|_{[0,\varepsilon]}$ sind stetig differenzierbar und glatt.

Nach dem Hilfssatz kann man ε so klein wählen, dass es stetige Funktionen φ_l und φ_r auf $[0, \varepsilon]$ gibt, so dass gilt: $\widetilde{\alpha_l}(t) := te^{\mathrm{i}\,\varphi_l(t)}$ parametrisiert $|\alpha_l|$ und $\widetilde{\alpha_r}(t) := te^{\mathrm{i}\,\varphi_r(t)}$ parametrisiert $|\alpha_r|$. Dabei muss $\varphi_l(0) = \varphi_r(0) + \pi$ gelten, weil die Wege $\widetilde{\alpha_r}$ und $\widetilde{\alpha_l}$ beide bei 0 starten und dort entgegengesetzte Richtung haben.

Ist $\widetilde{\alpha_l}(t) = \widetilde{\alpha_r}(t)$ für ein $t \in (0, \varepsilon]$, so ist $e^{\mathrm{i}\,(\varphi_l(t)-\varphi_r(t))} = 1$, also $\varphi_l(t) = \varphi_r(t) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für kleines t kann das nicht sein. Also kann man annehmen, dass α auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ injektiv und $\varphi_r(t) < \varphi_l(t) < \varphi_r(t) + 2\pi$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$ ist.

Für $0 < \delta \le \varepsilon$ definiere man dann:

$$\begin{aligned} C_+(\delta) &:= \{te^{\mathrm{i}\,s} \mid 0 < t < \delta,\ \varphi_r(t) < s < \varphi_l(t)\}, \\ C_-(\delta) &:= \{te^{\mathrm{i}\,s} \mid 0 < t < \delta,\ \varphi_l(t) < s < \varphi_r(t) + 2\pi\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $D_\delta(0) = C_-(\delta)\cup C_+(\delta)\cup\bigl(D_\delta(0)\cap|\alpha|\bigr)$ eine Zerlegung von $D_\delta(0)$ in drei disjunkte Teilmengen. $C_-(\delta)$ und $C_+(\delta)$ sind homöomorphe Bilder von offenen

Rechtecken und damit Gebiete in $\mathbb{C}$. Damit ist aber auch klar, dass diese Gebiete die beiden einzigen Zusammenhangskomponenten von $D_\delta(0) \setminus |\alpha|$ sind. Offensichtlich liegt $D_\delta(z_0) \cap |\alpha|$ im Rand beider Komponenten.

Ist $v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$, so bewirkt die Multiplikation von v mit i eine Linksdrehung um $90°$. $L = z_0 + \mathbb{R}\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ trifft $|\alpha|$ in z_0 also unter einem rechten Winkel.

Es sei (o.B.d.A.) vorausgesetzt, dass $t_0 = 0$, $z_0 = 0$ und $\alpha'(0) = 1$ ist. Annahme, $\exists\, s_n \in (-\delta, \delta)$ mit $s_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ und $s_n\,\mathrm{i} \in |\alpha| \cap D_\delta(0)$. Dann $\exists\, t_n \in (-\delta, \delta)$ mit $\alpha(t_n) = s_n\,\mathrm{i}$ Die beschränkte Folge t_n besitzt einen Häufungspunkt, o.B.d.A. konvergiere t_n gegen eine Zahl t^*. Dann konvergiert $s_n\,\mathrm{i} = \alpha(t_n)$ gegen $\alpha(t^*)$. Also ist $\alpha(t^*) = 0$, und weil α injektiv ist, ist $t^* = 0$ und $t_n \neq 0$ für alle n. Dann folgt:

$$1 = \alpha'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(t_n)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n\,\mathrm{i}}{t_n} = \mathrm{i} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n},$$

und die rechte Seite ist $= 0$ oder rein imaginär. Das ist ein Widerspruch. ∎

Satz 2.5.14. **(Seite 87)**

Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein einfach geschlossener, glatter Integrationsweg, so besteht $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten. Jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten, und auf der beschränkten Komponente ist $|n(\alpha, z)| = 1$.

Beweis: Man kann den obigen Satz als **speziellen Jordan'schen Kurvensatz** bezeichnen (der echte Jordan'sche Kurvensatz setzt nur die Stetigkeit des Weges voraus, und sein Beweis ist dann deutlich schwieriger).

Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ der fragliche Weg, so zerfällt $\mathbb{C} \setminus |\alpha| = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ in (höchstens) abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Dabei sei C_0 die unbeschränkte Komponente.

Ist $t \in [a,b]$ ein beliebiger Parameterwert, so gibt es eine Umgebung $U = U(\alpha(t))$, so dass $U \setminus |\alpha|$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten C_- und C_+ zerfällt. Die liegen ihrerseits wiederum in gewissen Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$. Es sei $\{p(t), q(t)\}$ die Menge der Nummern dieser beiden Komponenten, sowie $\Phi_-(t) := \min(p(t), q(t))$ und $\Phi_+(t) := \max(p(t), q(t))$. Das ergibt zwei Funktionen $\Phi_-, \Phi_+ : [a,b] \to \mathbb{Z}$, die auf Grund ihrer Konstruktion lokal-konstant, also stetig sind. Sie müssen dann auf $[a,b]$ natürlich sogar konstant sein.

Die Ränder der Komponenten C_i liegen auf $|\alpha|$. Insbesondere gibt es ein $t_0 \in [a,b]$, so dass $\alpha(t_0) \in \partial C_0$ ist. Dann ist $\Phi_-(t_0) = 0$ und damit $\Phi_-(t) \equiv 0$ auf $[a,b]$. Wechselt man bei $\alpha(t_0)$ von C_0 auf die andere Seite des Weges, so ändert sich die Umlaufszal um ± 1. Deshalb ist $i_0 := \Phi_+(t_0) \neq 0$. Aber $\Phi_+(t)$ ist auf dem ganzen Intervall konstant. Also ist $C_{i_0} = C_1$ die einzige beschränkte Komponente, und jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt von C_0 und von C_1. Die Umlaufszahl kann in C_1 nur den Wert -1 oder den Wert $+1$ annehmen. ∎