
1 Holomorphe Funktionen

1.1 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen werden üblicherweise axiomatisch eingeführt:

- Körper-Axiome (Addition, Multiplikation und Distributivgesetz).
- Anordnungs-Axiome (Folgerung: Jedes Quadrat ist positiv).
- Vollständigkeitsaxiom. Beispiele für (äquivalente) Formulierungen:
 - Jede nach oben beschränkte Menge $\neq \emptyset$ besitzt ein Supremum.
 - Archimedes- und Intervallschachtelungsaxiom.
 - Es gilt das Archimedes-Axiom, und jede Cauchyfolge konvergiert.

Die Existenz der reellen Zahlen ist mühsam zu zeigen, das wird meist übersprungen.

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{R}$ (sonst wäre x^2 negativ).

Man kann sich also fragen: Gibt es einen noch nicht bekannten Zahlenbereich, der $\mathbb{R}$ erweitert und in dem eine Zahl x mit $x^2 = -1$ existiert?

In der Renaissance entdeckte man, dass es nützlich sein kann, mit einer „imaginären Einheit“ zu rechnen, einer „Zahl“, deren Quadrat -1 ergibt. Euler führte für diese imaginäre Einheit den Buchstaben i ein. Die neuen Zahlen blieben für ihn aber reine Rechengrößen. Erst Gauß prägte den Begriff der komplexen Zahl und lieferte zugleich eine anschauliche Deutung. Er rechnete intensiv mit komplexen Zahlen.

Es liegt nun nahe, folgende Eigenschaften von den komplexen Zahlen zu fordern. Das ergibt zugleich ein Axiomensystem:

- $\mathbb{C}$ ist eine Menge von „Zahlen“, mit denen man in gewohnter Weise rechnen kann. Alle Körper-Axiome sind erfüllt.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, und $\exists$ Element i mit $i^2 = -1$.
- Jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $z = a + bi$ mit reellen Zahlen a und b (dem **Realteil** und dem **Imaginärteil** von z).

Folgerungen:

1) $a + bi = c + di \iff a = c$ und $b = d$.

2) Produkt zweier komplexer Zahlen:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + (a \cdot d \cdot i) + (b \cdot c \cdot i) + (b \cdot d \cdot i^2) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) i.$$

3) $\mathbb{C}$ kann kein angeordneter Körper sein. $\implies$ Vollständigkeitsaussagen lassen sich nicht übertragen, nur die Aussage „Jede Cauchyfolge konvergiert“ benutzt keine Anordnung. Gilt diese Aussage? Das muss nachgeprüft werden.

Was ist mit der Existenz der komplexen Zahlen? Die ist einfach zu sehen, wenn man an die Existenz von $\mathbb{R}$ glaubt, denn ein Modell für $\mathbb{C}$ ist die Ebene $\mathbb{R}^2$.

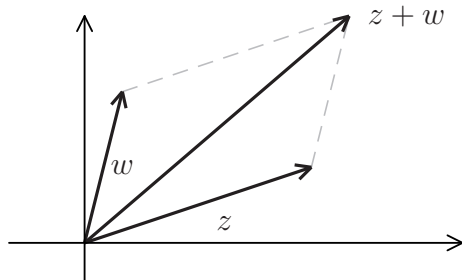
Definition (Komplexe Zahlen):

Unter dem Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** versteht man die Menge aller (geordneten) Paare (a, b) von reellen Zahlen mit folgenden Rechenoperationen:

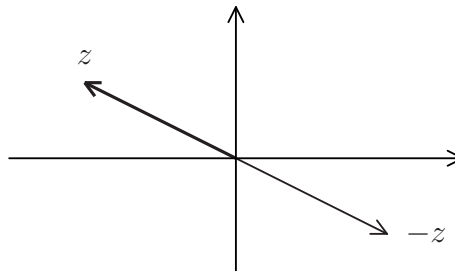
1. $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$.
2. $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.

Das Element $(1, 0)$ wird mit 1 bezeichnet, das Element $(0, 1)$ mit i . Die Komponenten $\operatorname{Re}(z) = a$ und $\operatorname{Im}(z) = b$ heißen **Realteil** und **Imaginärteil**.

$\mathbb{C}$ ist also bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $0 = (0, 0)$ und dem Negativen $-(x, y) = (-x, -y)$. $\mathbb{C}$ trägt sogar Struktur eines $\mathbb{R}$ -Vektorraumes (wenn man $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0)$ identifiziert), 1 und i bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

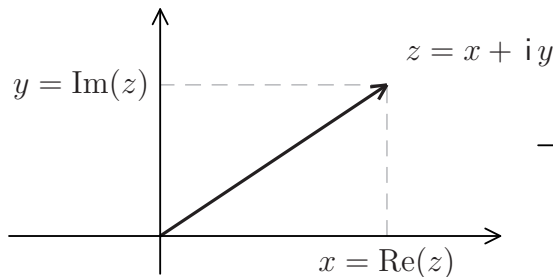


Addition komplexer Zahlen

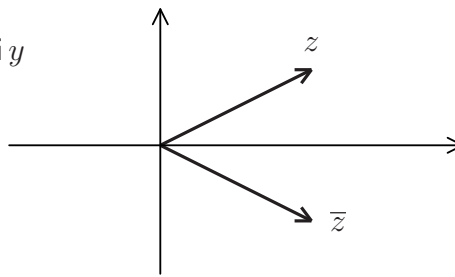


Das Negative einer komplexen Zahl

Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} := x - iy$ die zu z **konjugierte (komplexe) Zahl**. Man gewinnt sie durch Spiegelung an der x-Achse.



Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl



Die konjugierte komplexe Zahl

Es gilt:

- a) Ist $z = x + iy$, so ist $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ eine nicht-negative reelle Zahl.
- b) Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind gegeben durch

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ und } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$. Dann ist $L_w(z) := w \cdot z$ eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, also erst recht $\mathbb{R}$ -linear. Wegen $L_w(1) = a + ib$ und $L_w(i) = -b + ia$ wird L_w bezüglich $\{1, i\}$ durch die Matrix

$$M_w := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

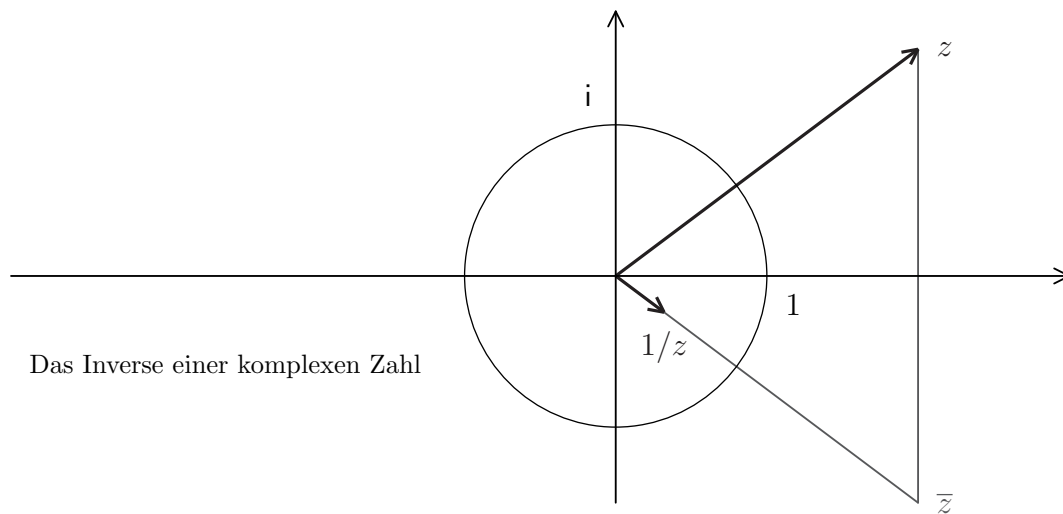
beschrieben. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $M_v \cdot M_w = M_{vw}$ ist. Daraus folgt: Multiplikation komplexer Zahlen ist assoziativ!. (Kommutativgesetz: später).

$|z| := +\sqrt{z\bar{z}}$ (reell) heißt **Betrag** von z (entspricht der euklidischen Norm).

Existenz eines multiplikativen Inversen: Ist $z \neq 0$, so ist $z\bar{z} = |z|^2 > 0$, und es gilt:

$$1 = z \cdot \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}, \text{ also } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

(Spiegelung an der x -Achse, gefolgt von einer Spiegelung am Einheitskreis).



Wir kommen jetzt zur **Polarkoordinaten-Darstellung** von komplexen Zahlen:

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ beliebig, $z \neq 0$. Dann ist $z/|z| = \alpha + i\beta$ Zahl vom Betrag 1.

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

erfüllen die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Es gibt also einen (eindeutig bestimmten) Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $\alpha = \cos \theta$ und $\beta = \sin \theta$. Damit folgt:

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Die Zahl $\arg(z) := \theta \in [0, 2\pi)$ heißt **Argument** von z (für $z = 0$ nicht definiert).

1.1.1. Beispiele

1. Es ist $|i| = 1$ und $\arg(i) = \pi/2$.
2. Sei $z = 1 + i$. Dann ist $z\bar{z} = (1 + i)(1 - i) = 2$, also $|z| = \sqrt{2}$. Weil $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ist, folgt: $\arg(z) = \pi/4$.

Setze jetzt $U(t) := \cos t + i \sin t$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $|U(t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
2. $U(s) \cdot U(t) = U(s + t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
3. $U(0) = 1$, $U(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $U(t)^{-1} = U(-t)$.
4. Es ist $U(t + 2\pi) = U(t)$.

BEWEIS: (1) ist klar.

(2) folgt aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned} U(s) \cdot U(t) &= (\cos s + i \sin s) \cdot (\cos t + i \sin t) \\ &= (\cos s \cos t - \sin s \sin t) + i(\cos s \sin t + \sin s \cos t) \\ &= \cos(s + t) + i \sin(s + t) = U(s + t). \end{aligned}$$

(3) $U(0) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$. $U(t) \neq 0$ folgt aus (1). Schließlich ist

$$1 = U(0) = U(t + (-t)) = U(t) \cdot U(-t), \quad \text{also } U(-t) = 1/U(t).$$

(4) Die Aussage folgt aus der Periodizität von Cosinus und Sinus. ■

Ist nun $z_1 = r_1 \cdot U(t_1)$ und $z_2 = r_2 \cdot U(t_2)$, so ist

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot U(t_1 + t_2) = r_2 r_1 \cdot U(t_2 + t_1) = z_2 \cdot z_1.$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich also die Beträge, und die Winkel addieren sich. $\implies$ Multiplikation in $\mathbb{C}$ kommutativ.

1.1.2. Satz (Formel von Moivre)

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS: $U(t)^n = U(nt)$ für $n \geq 0$ und $U(t)^{-n} = (U(t)^{-1})^n = U(-t)^n = U(-nt)$. ■

1.1.3. Beispiel

$$\begin{aligned}
 \cos(3t) + i \sin(3t) &= (\cos t + i \sin t)^3 \\
 &= \cos^3 t + 3 \cos^2 t (i \sin t) + 3 \cos t (i^2 \sin^2 t) + (i \sin t)^3 \\
 &= (\cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t) + i (3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t),
 \end{aligned}$$

also

$$\cos(3t) = \cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t \quad \text{und} \quad \sin(3t) = 3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t.$$

Existenz von Wurzeln in $\mathbb{C}$: Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\zeta_n := U(2\pi/n) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

1.1.4. Satz (Lösungen von $z^n = 1$)

Für jede natürliche Zahl n hat die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen, nämlich

$$(\zeta_n)^0 = 1, (\zeta_n)^1 = \zeta_n, (\zeta_n)^2, (\zeta_n)^3, \dots, (\zeta_n)^{n-1}.$$

BEWEIS: Für $k = 0, \dots, n-1$ ist $((\zeta_n)^k)^n = (\zeta_n)^{n \cdot k} = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi) = 1$. Die n Zahlen

$$(\zeta_n)^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

liegen offensichtlich auf dem Einheitskreis und sind paarweise verschieden.

Ist umgekehrt w eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$, so ist $|w|^n = 1$, also $|w| = 1$.
 $\implies \exists \theta \in [0, 2\pi)$ mit $U(\theta) = w \implies U(n\theta) = w^n = 1$, also $\cos(n\theta) = 1$ und $\sin(n\theta) = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ mit $n\theta = k \cdot 2\pi$. Wegen $0 \leq \theta < 2\pi$ muss dann $0 \leq n\theta < n \cdot 2\pi$ sein $\implies k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. ■

Definition (Einheitswurzeln):

Die Zahlen $1, \zeta_n, (\zeta_n)^2, \dots, (\zeta_n)^{n-1}$ nennt man die ***n*-ten Einheitswurzeln**.

Zum Beispiel: Weil $\zeta_2 = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$ ist, sind 1 und -1 die 2. Einheitswurzeln.

Für die 3. Einheitswurzel ζ_3 gilt:

$$\zeta_3 = \cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ) = -\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$$

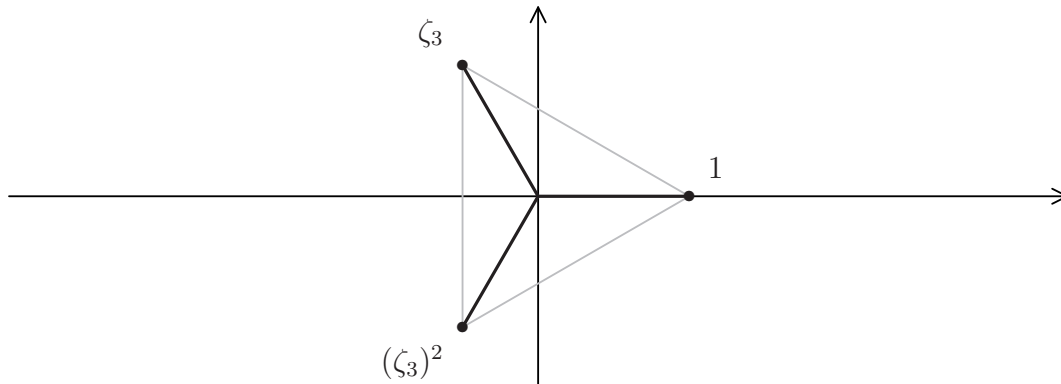
Also sind

$$1 = \zeta_3^0, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad \zeta_3^2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

alle 3. Einheitswurzeln. Sie bilden die Ecken eines regelmäßigen Dreiecks. Und weil $\zeta_4 = \cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ) = i$ ist, sind

$$1, \quad \zeta_4 = i, \quad \zeta_4^2 = -1 \quad \text{und} \quad \zeta_4^3 = -i$$

die 4. Einheitswurzeln.



1.1.5. Satz (Existenz n -ter komplexer Wurzeln)

In $\mathbb{C}$ besitzt jede Zahl $z \neq 0$ genau n verschiedene n -te Wurzeln.

BEWEIS: Sei $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, mit $r = |z|$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann setzen wir

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \cdot \zeta_n^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Offensichtlich sind dies n verschiedene komplexe Zahlen z_k mit $z_k^n = z$.

Ist w irgendeine Lösung der Gleichung $w^n = z$, so ist $w^n = z_0^n$, also $(wz_0^{-1})^n = 1$. Das bedeutet: $\exists$ n -te Einheitswurzel ζ mit $w = z_0 \cdot \zeta$. ■

Man kann also in $\mathbb{C}$ nie von **der** n -ten Wurzel einer komplexen Zahl sprechen, es gibt stets n verschiedene.

Beispiel $n = 2$: Das Symbol $\sqrt{z}$ ist zweideutig, man kann keine der beiden Wurzeln auszeichnen. Etwa sind $\frac{1}{2}(1 - i)$ und $\frac{1}{2}(i - 1)$ die beiden Wurzeln von $-\frac{i}{2}$. Welche sollte man bevorzugen? Eine Unterscheidung zwischen positiver und negativer Wurzel ist nicht möglich!

Jede quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} z^2 + bz + c = 0 &\iff (z + b/2)^2 = (b/2)^2 - c \\ &\iff z = -b/2 + w_1 \quad \text{oder} \quad z = -b/2 + w_2, \end{aligned}$$

wobei w_1 und w_2 die beiden Wurzeln aus $(b/2)^2 - c$ sind.

Definition (Konvergenz einer Folge):

Eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen konvergiert gegen die komplexe Zahl z_0 , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Weil $|z_n - z_0|^2 = (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2$ ist, strebt $z_n = x_n + i y_n$ genau dann gegen $z_0 = x_0 + i y_0$, wenn x_n gegen x_0 und y_n gegen y_0 konvergiert.

1.1.6. Beispiel

Ist $w \in \mathbb{C}$ und $|w| < 1$, so konvergiert $z_n := w^n$ gegen 0.

BEWEIS: $|w| < 1 \implies \exists x \in \mathbb{R}, x > 0$, mit $1/|w| = 1 + x$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt:

$$\left(\frac{1}{|w|}\right)^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{mit Bernoulli'scher Ungleichung}).$$

Für die letzte Ungleichung wähle man etwa $n_0 > (1/\varepsilon - 1)/x$.

Definition (Cauchyfolge):

Eine Folge (z_n) heißt Cauchyfolge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n, m \geq n_0 \text{ gilt: } |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Wie in $\mathbb{R}$ folgt, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist.

Umgekehrt: Sei $z_n = x_n + i y_n$ eine Cauchyfolge $\implies (x_n)$ und (y_n) sind auch Cauchyfolgen. Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, folgt: $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ und $y_n \rightarrow y_0 \implies z_n \rightarrow z_0 := x_0 + i y_0$. In diesem Sinne ist $\mathbb{C}$ **vollständig**.

Zum Schluss soll über unendliche Reihen in $\mathbb{C}$ gesprochen werden:

Ist $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, so nennt man die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{\nu=0}^n z_\nu$

eine **unendliche Reihe** und bezeichnet sie mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

Die Reihe heißt **konvergent**, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, und den Grenzwert bezeichnet man wieder mit dem Reihensymbol. Wenn die Reihe nicht konvergiert, nennt man sie **divergent**. Die Reihe der z_ν konvergiert genau dann, wenn die reellen Reihen der Real- und Imaginärteile der z_ν konvergieren.

1.1.7. Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_{\nu}$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt: $\left| \sum_{\nu=m+1}^n z_{\nu} \right| < \varepsilon$ für alle m, n mit $n > m \geq n_0$.

BEWEIS: Man wende das Cauchy-Kriterium für Folgen auf (S_n) an. Dann ist $|S_n - S_m| = \left| \sum_{\nu=m+1}^n z_{\nu} \right|$.

Definition (absolute Konvergenz):

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_{\nu}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_{\nu}|$ konvergiert.

Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums und der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ folgt: *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.* Und es gilt auch: *Jede Teilreihe und jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist konvergent.* Unter dem Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe versteht man natürlich den Grenzwert der Reihe im gewöhnlichen Sinne,

Ein wichtiges Beispiel ist die **geometrische Reihe**. Ist $|z| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ absolut gegen $\frac{1}{1-z}$. Der Beweis funktioniert wie im Reellen:

Endliche Partialsummen lassen sich ganz einfach berechnen:

$$\sum_{\nu=0}^n z^{\nu} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{n+1}}{1 - z}.$$

Weil z^n für $|z| < 1$ gegen null konvergiert, ergibt sich der gewünschte Grenzwert.

Die absolute Konvergenz folgt aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z|^{\nu}$ gegen $1/(1-|z|)$.

1.2 Die Topologie der komplexen Ebene

$\mathbb{C}$ = Anschauungsebene.

Ist $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, so ist $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ die (**offene**) **Kreisscheibe** mit Radius r um z_0 .

Definition (offene und abgeschlossene Mengen):

$U \subset \mathbb{C}$ heißt **offen**, falls es zu jedem $z \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $D_\varepsilon(z) \subset U$ gibt. Eine Menge heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement in $\mathbb{C}$ offen ist.

Definitionen stimmen mit denen in $\mathbb{R}^2$ überein, und es gilt:

1. $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind zugleich offen und abgeschlossen.
2. Endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen.
3. Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.

Definition (topologischer Raum):

Topologischer Raum := Menge X , zusammen mit einem System ausgezeichneter Teilmengen (den „**offenen Mengen**“ von X), so dass gilt:

1. Die leere Menge und der gesamte Raum X sind offen.
2. Endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen.

Das System der offenen Mengen von X nennt man die **Topologie** von X .

$M \subset X$ heißt **Umgebung** von $x_0 \in X$, falls es eine offene Menge U mit $x_0 \in U \subset M$ gibt. Schreibe dann: $M = M(x_0)$.

Der topologische Raum X heißt ein **Hausdorff-Raum**, falls es zu je zwei Punkten $x \neq y$ Umgebungen $U = U(x)$ und $V = V(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

$\mathbb{C}$ ist offensichtlich ein topologischer Raum und sogar ein Hausdorff-Raum.

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$, und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Eine Menge X mit einer Metrik d bezeichnet man als **metrischen Raum**.

Ist X ein metrischer Raum X , so kann man offene Mengen in X wie folgt definieren: $M \subset X$ wird „offen“ genannt, wenn zu jedem $x_0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die „ ε -**Umgebung**“ $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ noch ganz in M liegt. Man zeigt leicht: Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum.

Die Metrik $d(z, w) := |z - w|$ macht $\mathbb{C}$ zum metrischen Raum, mit der bekannten Topologie.

1.2.1. Beispiele

1. Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Dann nennt man $U \subset Y$ **relativ offen**, falls $\exists \hat{U} \subset X$ offen mit $U = \hat{U} \cap Y$. Die relativ offenen Mengen in Y bilden die „**Relativtopologie**“ auf Y .

Ist $Y \subset X$ offen und $U \subset Y$, so gilt: U relativ offen $\iff X$ offen.

Ist Y nicht offen in X , so gilt das in der Regel nicht. Zum Beispiel: $X = \mathbb{C}$ und $Y = \{x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$.

Ist X ein metrischer Raum mit Metrik d und $Y \subset X$, so definiert die Metrik $d|_{Y \times Y}$ die Relativtopologie auf Y .

2. Ein anderes, verblüffendes Beispiel: Sei $X = \mathbb{H} := \{z = x + iy : y > 0\}$ die „obere Halbebene“. Führe auf X folgendermaßen eine Topologie ein: $M \subset X$ soll „*-offen“ genannt werden, falls $M = U \times \mathbb{R}_+$ (mit einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$) ist.

a) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und $\emptyset = \emptyset \times \mathbb{R}_+$ sind *-offen.

b) $M = U \times \mathbb{R}_+$, $N = V \times \mathbb{R}_+$ *-offen $\implies M \cap N = (U \cap V) \times \mathbb{R}_+$ *-offen.

c) Ist $(M_\iota)_{\iota \in I}$ ein System von *-offenen Mengen $M_\iota = U_\iota \times \mathbb{R}_+$, so ist auch $\bigcup_{\iota \in I} M_\iota = \bigcup_{\iota \in I} (U_\iota \times \mathbb{R}_+) = \left(\bigcup_{\iota \in I} U_\iota\right) \times \mathbb{R}_+$ *-offen.

So wird X zu einem topologischen Raum, ist allerdings kein Hausdorffraum. Zum Beispiel besitzen $2+3i$ und $2+7i$ keine disjunkten Umgebungen. Damit rührt diese Topologie nicht von einer Metrik her. Es kann also auf einer Menge durchaus zwei verschiedene Topologien geben.

Hier werden alle topologischen Räume metrische Räume sein. Die Begriffe „konvergente Folge“ und „Cauchyfolge“ lassen sich problemlos auf solche Räume übertragen. Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Sei nun X ein **metrischer Raum** und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge, sowie $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt.

Bekannt: x_0 **innerer** Punkt von M , falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset M$. Eine Menge M ist genau dann offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

Definition (Häufungspunkte und isolierte Punkte):

1. x_0 heißt **Häufungspunkt** von M , falls jede Umgebung $U = U(x_0)$ einen Punkt $x \in M$ mit $x \neq x_0$ enthält.
2. x_0 heißt **isolierter Punkt** von M , falls es eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $U \cap M = \{x_0\}$ gibt.

x_0 isolierter Punkt von $M \subset X \implies x_0 \in M$. (Gilt nicht für Häufungspunkte).

x_0 Häufungspunkt von $M \subset X \iff \exists$ Folge von Punkten $x_n \in M$ mit:

$$(1) x_n \neq x_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ und } (2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

(Beweis: Wähle in jeder Umgebung $U_{1/n}(x_0)$ ein Element $x_n \neq x_0$).

Ist $M \subset X$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M , so nennt man $\overline{M} := M \cup M'$ die **abgeschlossene Hülle** von M . Es gilt:

1.2.2. Satz

M und N seien Teilmengen des metrischen Raumes X .

1. Ist M abgeschlossen, so ist $M = \overline{M}$.
2. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in X , die M umfasst.
3. Ist $M \subset N$, so ist $\overline{M} \subset \overline{N}$.

BEWEIS: Siehe Anhang! ■

Definition (diskrete Menge):

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **diskret (in X)**, wenn sie abgeschlossen ist und nur aus isolierten Punkten besteht.

Zum Beispiel besteht $M := \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ aus lauter isolierten Punkten, ist aber nicht abgeschlossen, also nicht diskret. $M \cup \{0\}$ ist zwar abgeschlossen, aber auch nicht diskret, weil 0 kein isolierter Punkt ist.

Die Menge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist diskret. Interessant wird es, wenn man $\mathbb{Z}$ mit der Relativtopologie versieht. Dann ist nämlich jede einpunktige Menge $\{n\}$ (und damit **jede** Teilmenge) von $\mathbb{Z}$ offen in $\mathbb{Z}$.

Definition (Rand einer Menge):

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Randpunkt** von M , falls jede Umgebung von z_0 einen Punkt von M und einen Punkt von $\mathbb{C} \setminus M$ enthält. Mit ∂M bezeichnet man die Menge aller Randpunkte von M .

$z_0 \in \mathbb{C}$ ist genau dann Randpunkt von M , wenn z_0 kein innerer Punkt von M ist, aber entweder direkt ein Punkt von M oder ein Häufungspunkt von M .

$\mathring{M}$ (oder M°) sei der **offene Kern** (Menge der inneren Punkte) von M . Dann ist

$$\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}.$$

1.2.3. Beispiele

1. Sei $M := D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Dann ist $\mathring{M} = M$, $\overline{M} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und $\partial M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
2. Ist $D \subset \mathbb{C}$ diskret, so besitzt D weder innere Punkte noch Häufungspunkte.
Damit ist $\mathring{D} = \emptyset$ und $D = \overline{D} = \partial D$.
3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und M die Menge der Punkte $z = x + iy \in G$ mit rationalen Koordinaten x und y . Dann ist $\mathring{M} = \emptyset$ und jeder Punkt von $\overline{G}$ ein Häufungspunkt von M . Also ist $\partial M = \overline{M} = \overline{G}$.
4. Die komplexe Ebene und die leere Menge haben keinen Rand. Jede andere Menge besitzt mindestens einen Randpunkt (wie wir später zeigen werden).
So besteht z.B. der Rand von $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nur aus dem Nullpunkt.

Definition (Stetigkeit):

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig in** $x_0 \in X$, falls gilt: $\forall V = V(f(x_0)) \subset Y \exists U = U(x_0) \subset X$ mit $f(U) \subset V$.

f heißt **stetig (auf ganz X)**, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

1.2.4. Satz

Folgende Aussagen über eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. Für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen in X .

BEWEIS: (1) $\implies$ (2): Sei f stetig, $V \subset Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(V)$ beliebig.
 $\implies y_0 := f(x_0) \in V \implies \exists W = W(y_0) \subset V \implies \exists U = U(x_0) \subset X$ mit $f(U) \subset W \subset V \implies U \subset f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(2) $\implies$ (1): Für jede offene Menge $V \subset Y$ sei $f^{-1}(V)$ offen in X . Um die Stetigkeit von f zu zeigen, sei $x_0 \in X$ gewählt und $y_0 := f(x_0)$. Ist $V = V(y_0) \subset Y$, so $\exists W = W(y_0) \subset V$ offen, und $U := f^{-1}(W)$ ist eine offene Umgebung von x_0 in X . Dann ist aber $f(U) \subset W \subset V$. ■

1.2.5. Satz

X und Y seien **metrische** Räume mit Metriken d_X bzw. d_Y . Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in $x_0 \in X$ stetig.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: Ist $d_X(x, x_0) < \delta$, so ist $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
3. Konvergiert x_n gegen x_0 , so konvergiert auch $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.

BEWEIS: Siehe Anhang! ■

Ein **stetiger (parametrisierter) Weg** in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung α von einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ nach $\mathbb{C}$. Der Punkt $z_A(\alpha) := \alpha(a)$ heißt der **Anfangspunkt** von α , $z_E(\alpha) := \alpha(b)$ der **Endpunkt** und $|\alpha| := \alpha(I)$ die **Spur** des Weges. Der Weg ist **geschlossen**, wenn $z_A(\alpha) = z_E(\alpha)$ ist. Ist α außerdem auf $[a, b]$ injektiv, so heißt α ein **einfach geschlossener Weg**.

Sei $J = [c, d]$ ein weiteres abgeschlossenes Intervall. Eine stetige Abbildung $\varphi : J \rightarrow I$ heißt **Parametertransformation**, falls sie surjektiv und streng monoton wachsend ist.¹ Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetiger Weg und $\iota : [a, b] \rightarrow [a, b]$ definiert durch $\iota(t) := a + b - t$, so heißt $\alpha_- := \alpha \circ \iota$ **der entgegengesetzt durchlaufene Weg**. Offensichtlich ist $|\alpha_-| = |\alpha|$.

Mit Hilfe einer Parametertransformation kann man bei jedem Weg erreichen, dass er auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Sind $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Wege, so wird der zusammengesetzte Weg $\alpha + \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(\alpha + \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Dann ist $|\alpha + \beta| = |\alpha| \cup |\beta|$. Speziell ist $\alpha + \alpha_-$ ein geschlossener Weg.

1.2.6. Satz (Ränder haben keine Lücken)

Sei $M \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in M$ und $z_1 \in \mathbb{C} \setminus M$. Dann trifft jeder stetige Weg von z_0 nach z_1 den Rand von M .

¹Zwei Wege heißen äquivalent, falls sie durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen. Eine **Kurve** ist eine Äquivalenzklasse von Wegen.

BEWEIS: Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetiger Weg mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = z_1$. Dann existiert $t_0 := \sup\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \in M\}$. Sei $w_0 := \alpha(t_0)$ und ein $\varepsilon > 0$ gewählt.

Weil α stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\alpha(t) \in U_\varepsilon(w_0)$ für alle $t \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$ gilt. Liegt nun w_0 in M , so ist $t_0 < 1$, und man kann ein $t \in (t_0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$ finden. Dann muss $\alpha(t)$ in $U_\varepsilon(w_0) \cap (\mathbb{C} \setminus M)$ liegen.

Gehört w_0 dagegen zu $\mathbb{C} \setminus M$, so ist $t_0 > 0$, und man kann ein $t \in [0, t_0)$ mit $|t - t_0| < \delta$ und $\alpha(t) \in U_\varepsilon(w_0) \cap M$ finden.

In beiden Fällen wurde damit gezeigt, dass w_0 ein Punkt von ∂M ist. ■

Ist also $M \neq \emptyset$ und $M \neq \mathbb{C}$, so besitzt M mindestens einen Randpunkt.

Definition (Gebiet):

Eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt ein **Gebiet**, falls je zwei Punkte von G innerhalb von G durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können.

Definition (zusammenhängender Raum):

Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls X **nicht** in zwei nicht leere, disjunkte, offene Teilmengen zerlegt werden kann.

1.2.7. Satz

Folgende Aussagen über einen topologischen Raum X sind äquivalent:

1. X ist zusammenhängend.
2. X und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von X , die zugleich offen und abgeschlossen sind.
3. Jede stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ ist konstant.

BEWEIS: (1) $\implies$ (2): Sei X zusammenhängend. Ist $M \subset X$ zugleich offen und abgeschlossen, so ist $X = M \cup (X \setminus M)$ eine disjunkte Zerlegung von X in zwei offene Teilmengen. $\implies M = \emptyset$ oder $X \setminus M = \emptyset$ (und deshalb $M = X$).

(2) $\implies$ (3): Sei $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig. Dabei wird die diskrete Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ mit der Relativtopologie versehen $\implies$ alle einpunktigen Teilmengen sind in $\mathbb{Z}$ offen $\implies$ alle Mengen $f^{-1}(n)$ sind offen. In mindestens einem Fall ist $f^{-1}(n_0) \neq \emptyset$. Da auch $X \setminus f^{-1}(n_0) = \{x \in X : f(x) \neq n_0\}$ offen ist, muss $f^{-1}(n_0) = X$ sein.

(3) $\implies$ (1): Sei $X = M \cup N$ eine disjunkte Zerlegung in zwei offene Mengen. Definiere dann $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $f(x) := 1$ auf M und $f(x) := 0$ auf N . Da f lokal konstant und damit stetig ist, muss f nach Voraussetzung konstant sein $\implies M = \emptyset$ oder $N = \emptyset$. Das zeigt, dass X zusammenhängend ist. ■

1.2.8. Beispiel

Ein **Intervall** ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $r_1 \in I$, $r_2 \in I$ und $r_1 < r < r_2$, so ist auch $r \in I$. Es lässt sich leicht zeigen, dass jedes Intervall zusammenhängend ist.

Der Beweis findet sich im Anhang.

1.2.9. Satz

Ist X zusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

BEWEIS: Ist $g : f(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig, so ist auch $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig. Da X zusammenhängend ist, ist $g \circ f$ konstant $\implies g$ auf $f(X)$ konstant. ■

Insbesondere ist die Spur eines stetigen Weges immer eine zusammenhängende Menge.

Meist benutzt man „Zusammenhang“ wie folgt: Ist X zusammenhängend, $U \subset X$ nicht-leer und zugleich offen und abgeschlossen, so ist $U = X$.

1.2.10. Satz

Ist $G \subset \mathbb{C}$ offen und nicht leer, so sind die folgenden Aussagen über G äquivalent:

1. G ist zusammenhängend.
2. Je zwei Punkte von G können in G durch einen Streckenzug verbunden werden.
3. G ist ein Gebiet.

BEWEIS: (1) $\implies$ (2): Sei G zusammenhängend, $z_0 \in G$ beliebig und $U := \{z \in G : z \text{ kann in } G \text{ durch einen Streckenzug mit } z_0 \text{ verbunden werden}\}$.

Ist $z = z_0$ oder $z \in U$, so $\exists \varepsilon > 0$ mit $D := D_\varepsilon(z) \subset G$. Weil jeder Punkt von D innerhalb von D durch eine Strecke mit z und damit durch einen Streckenzug mit z_0 verbunden werden kann, ist $D \subset U$. Damit ist U offen und nicht leer.

Aber U ist auch abgeschlossen in G : Sei $w_0 \in G$, und es existiere eine Folge w_ν in U mit $w_\nu \rightarrow w_0$. Ist $D = D_\varepsilon(w_0) \subset G$, so $\exists \nu$ mit $w_\nu \in D$. Nun kann w_ν in G mit z_0 durch einen Streckenzug verbunden werden, und die Strecke von w_ν nach w_0 setzt diesen Streckenzug in $D \subset G$ fort. Also gehört w_0 zu U .

(2) $\implies$ (3): Trivial!

(3) $\implies$ (1): Annahme, es gibt eine disjunkte Zerlegung $G = M \cup N$ in zwei nicht leere offene Mengen. Wählt man $z_0 \in M$ und $z_1 \in N$, so $\exists$ stetiger Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ mit $\alpha(a) = z_0$ und $\alpha(b) = z_1$. Sei $M' := M \cap |\alpha|$ und $N' := N \cap |\alpha|$.

Dann ist $|\alpha| = M' \cup N'$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nicht leere (relativ) offene Mengen. WS, denn $|\alpha|$ ist zusammenhängend. Also ist G zusammenhängend. ■

1.2.11. Satz

Sei X ein topologischer Raum. Sind $M, N \subset X$ zusammenhängende Teilmengen mit $M \cap N \neq \emptyset$, so ist auch $M \cup N$ zusammenhängend.

BEWEIS: Sei $f : M \cup N \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig $\implies f|_M : M \rightarrow \mathbb{Z}$ und $f|_N : N \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig, also f auf M und auf N konstant. Wegen $M \cap N \neq \emptyset$ ist dann f auf $M \cup N$ konstant. ■

Der Satz lässt sich leicht auf beliebige Vereinigungen verallgemeinern.

Definition (Zusammenhangskomponente):

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X , die x enthalten, bezeichnet man mit $C_X(x)$ und nennt sie die **Zusammenhangskomponente von x in X** .

1.2.12. Eigenschaften von Zusammenhangskomponenten

Sei X ein topologischer Raum.

1. *Ist $x_0 \in X$, so ist $C := C_X(x_0)$ die größte zusammenhängende Teilmenge von X mit $x_0 \in C$.*
2. *Die Zusammenhangskomponenten von X bilden eine Zerlegung von X .*
3. *Ist $M \subset X$ zusammenhängend, so liegt M in einer Zusammenhangskomponente von X .*
4. *Mit $Z \subset X$ ist auch $\overline{Z}$ zusammenhängend. Jede Zusammenhangskomponente von X ist in X abgeschlossen.*

Ist $M \subset \mathbb{C}$ offen, so ist jede Zusammenhangskomponente von M ein Gebiet, und es gibt höchstens abzählbar viele solcher Komponenten von M .

BEWEIS: 1) Als Vereinigung von zusammenhängenden Mengen, die alle x_0 enthalten, ist $C_X(x_0)$ selbst wieder zusammenhängend. Und jede zusammenhängende Menge $Z \subset X$, die x_0 enthält, ist definitionsgemäß Teilmenge von $C_X(x_0)$.

2) Ist $C_X(x) \cap C_X(y) \neq \emptyset$, so ist $C_X(x) \cup C_X(y)$ zusammenhängend, und das geht nur, wenn $C_X(x) = C_X(x) \cup C_X(y) = C_X(y)$ ist.

3) Ist M leer, so ist nichts zu zeigen. Ist $M \neq \emptyset$ und $x_0 \in M$, so liegt M in $C_X(x_0)$.

4) Sei $f : \overline{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig. Dann ist $f|_Z : Z \rightarrow \mathbb{Z}$ ebenfalls stetig und daher konstant $\equiv c$. Ist $x_0 \in (\overline{Z} \setminus Z)$, so ist x_0 ein Häufungspunkt von Z . $V := \{f(x_0)\}$ ist

eine Umgebung von $f(x_0)$ in $\mathbb{Z}$, Weil f stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $U = U(x_0)$ mit $f(U) \subset V$. Da U mindestens einen Punkt von Z enthalten muss, ist $f(x_0) = c$.

Ist M offen, $z_0 \in M$, $C = C_M(z_0)$ und $z_1 \in C$, so $\exists D = D_\varepsilon(z_1) \subset M$. Weil C und D zusammenhängend sind und $C \cap D \neq \emptyset$ ist, ist auch $C \cup D$ zusammenhängend, also $D \subset C$. Das bedeutet: C ist offen und zusammenhängend und damit ein Gebiet. In jeder Komponente kann ein Punkt mit rationalen Koordinaten ausgewählt werden. Weil die Komponenten paarweise disjunkt sind, gibt es nur höchstens abzählbar viele Komponenten. ■

Definition (kompakte Menge):

Sei X ein **Hausdorff-Raum**. Eine Menge $K \subset X$ heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

1.2.13. Satz

Sei X ein Hausdorff-Raum.

1. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K in X abgeschlossen.
2. Ist X kompakt und $K \subset X$ abgeschlossen, so ist K kompakt.

BEWEIS: 1) Es soll gezeigt werden, dass $X \setminus K$ offen ist. Sei $x_0 \in X \setminus K$.

$\forall x \in K \exists U_x = U_x(x) \subset X$ offen und $V_x = V_x(x_0) \subset X$, so dass $U_x \cap V_x = \emptyset$ ist (wegen der Hausdorff-Eigenschaft). Das System der Mengen $(U_x)_{x \in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, kommt man schon mit endlich vielen Mengen $U_{x_1}, \dots, U_{x_N}$ aus. Setzt man $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_N}$, so ist V eine Umgebung von x_0 , die ganz in $X \setminus K$ liegt. Also ist $X \setminus K$ offen und K abgeschlossen.

2) Sei X kompakt und $K \subset X$ abgeschlossen. Sei $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Zusammen mit $X \setminus K$ erhält man so eine offene Überdeckung von X . Schon endlich viele dieser Mengen überdecken $X \implies K$ wird von endlich vielen U_ι überdeckt $\implies K$ kompakt. ■

Eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass K in $D_R(0)$ liegt.

1.2.14. Satz von Heine-Borel

$K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

Da $\mathbb{C}$ als topologischer Raum mit dem $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt, ist dies der bekannte Satz von Heine-Borel aus der Analysis.

Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt der Folge** (z_n) , falls in jeder Umgebung von z_0 unendlich viele Folgenglieder liegen. Man beachte: Ist z_0 Häufungspunkt

der Menge $\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$, so ist z_0 auch Häufungspunkt der Folge (z_n) , aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. So hat die Folge $z_n := (-1)^n$ zwei Häufungspunkte (nämlich $+1$ und -1), aber die Menge $\{-1, +1\}$ der Folgeglieder besteht nur aus zwei isolierten Punkten und hat keinen Häufungspunkt.

1.2.15. Satz

Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, so besitzt jede unendliche Teilmenge von K wenigstens einen Häufungspunkt, der in K liegt.

BEWEIS: Sei $M \subset K$ unendlich $\implies M$ enthält Folge von paarweise verschiedenen Punkten $a_1, a_2, a_3, \dots$

Zu zeigen: (a_n) hat einen Häufungspunkt in K .

Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann hat auch die Menge N aller a_n keinen Häufungspunkt in K und ist deshalb dort abgeschlossen und damit sogar kompakt. Das geht nur, wenn N endlich ist. Das ist ein Widerspruch! ■

Eine Folge (z_n) heißt **beschränkt**, falls die Menge der Folgeglieder beschränkt ist.

1.2.16. Folgerung (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Punktfolge in $\mathbb{C}$ besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

BEWEIS: Sei A die Menge der Folgeglieder z_n . Dann ist $\overline{A}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

1. Fall: A endlich $\implies \exists z_0 \in A$, so dass $z_n = z_0$ für unendlich viele $n \implies z_0$ ist Häufungspunkt der Folge.

2. Fall: A unendlich $\implies A$ hat Häufungspunkt in $\overline{A}$. ■

1.2.17. Satz (über die Schachtelung kompakter Mengen)

Sei $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ eine Folge von kompakten nicht-leeren Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Dann ist auch $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ kompakt und nicht leer.

BEWEIS: K abgeschlossen und beschränkt $\implies K$ kompakt. Wähle für alle n ein $z_n \in K_n \subset K_1 \implies (z_n)$ besitzt einen Häufungspunkt z_0 in K_1 .

Annahme, $z_0 \notin K \implies \exists n_0$ mit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K_{n_0} \implies \exists U = U(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus K_{n_0}$. Für $n \geq n_0$ könnte dann z_n nicht mehr in U liegen, im Widerspruch dazu, dass z_0 Häufungspunkt der Folge ist. Also ist $K \neq \emptyset$. ■

Das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder offen, und genauso gilt es für abgeschlossene Mengen. Leider ist das für kompakte Mengen nicht richtig, aber es gilt:

1.2.18. Satz

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorff-Räumen und $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt.

BEWEIS: Sei $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Dann gilt:

$$K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\iota \in I} U_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} f^{-1}(U_\iota).$$

Da die Mengen $f^{-1}(U_\iota)$ alle offen sind, gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit

$$K \subset \bigcup_{\iota \in I_0} f^{-1}(U_\iota) = f^{-1}\left(\bigcup_{\iota \in I_0} U_\iota\right).$$

Also wird $f(K)$ von den Mengen U_ι mit $\iota \in I_0$ überdeckt. ■

1.2.19. Folgerung

Ist X ein kompakter Hausdorff-Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f Maximum und Minimum an.

BEWEIS: $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Also sind $r := \inf f(X)$ und $R := \sup f(X)$ endlich und in $f(X)$ enthalten. ■

Definition :

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist f stetig und bijektiv und f^{-1} auf Y stetig, so nennt man f einen **Homöomorphismus**.

1.2.20. Satz

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen kompakten Hausdorff-Räumen. Dann ist f ein Homöomorphismus.

BEWEIS: Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A auch kompakt $\implies f(A)$ ist kompakt und deshalb in Y abgeschlossen.

Das bedeutet, dass f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet, also auch offene Mengen auf offene. Damit ist f^{-1} stetig. ■

1.3 Komplexe Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Komplexwertige Funktionen $f = g + \mathrm{i}h : I \rightarrow \mathbb{C}$ (mit reellwertigen Funktionen g und h auf I) werden oft schon im Rahmen der reellen Analysis betrachtet. f heißt stetig, differenzierbar oder integrierbar, falls g und h beide stetig, differenzierbar oder integrierbar sind. Insbesondere setzt man

$$f' := g' + \mathrm{i}h'.$$

1.3.1. Beispiel

Für $\lambda = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ sei

$$e_\lambda(t) := e^{at} \cdot U(bt) = e^{at} \cdot (\cos(bt) + \mathrm{i} \sin(bt)).$$

Dann ist $e_\lambda(0) = 1$ und $e_\lambda(s+t) = e_\lambda(s) \cdot e_\lambda(t)$. Außerdem ist $e_\lambda = g + \mathrm{i}h$ mit $g(t) = e^{at} \cos(bt)$ und $h(t) = e^{at} \sin(bt)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} e'_\lambda(t) &= g'(t) + \mathrm{i}h'(t) = a \cdot g(t) - b \cdot h(t) + \mathrm{i}(a \cdot h(t) + b \cdot g(t)) \\ &= (a + \mathrm{i}b) \cdot (g(t) + \mathrm{i}h(t)) = \lambda \cdot e_\lambda(t). \end{aligned}$$

Nützlich ist das bei Differentialgleichungen vom Typ $y'' + 2Ay' + By = 0$ (mit $A, B \in \mathbb{R}$). Man macht für die Lösung $y(t)$ den Ansatz $y(t) := e_\lambda(t)$, mit unbestimmtem $\lambda \in \mathbb{C}$. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, dann erhält man die Bedingung $\lambda^2 + 2A\lambda + B = 0$, also $\lambda = -A \pm \sqrt{A^2 - B}$. Je nachdem, ob es gar keine, eine oder zwei reelle Wurzeln gibt, erhält man unterschiedliche Lösungen der Differentialgleichung. Es gibt aber in jedem Fall zwei unabhängige Lösungen.

Eine (komplexwertige) Funktion f auf einem Intervall $I = [a, b]$ heißt **stückweise stetig**, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so dass f auf jedem Intervall (t_{i-1}, t_i) stetig ist und in den t_i einseitige Grenzwerte besitzt. f heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn f auf $[a, b]$ stetig und auf den abgeschlossenen Teilintervallen einer geeigneten Zerlegung stetig differenzierbar ist.

Definition :

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, so erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ ist $\mathbb{C}$ -linear, und das Integral einer reellwertigen Funktion ist reell. Außerdem gilt:

1. Ist f stetig und $F' = f$ auf $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

2. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar und f auf $[\varphi(a), \varphi(b)]$ stetig, so ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds.$$

3. Ist (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f_\nu(t) dt.$$

4. Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Die ersten drei Aussagen leitet man unmittelbar aus den entsprechenden reellen Sätzen ab. Der Beweis von (4) ist nicht ganz so offensichtlich:

Sei $z := \int_a^b f(t) dt = r \cdot U(\alpha)$, mit $r > 0$ und $\alpha = \arg(z) \in [0, 2\pi)$. (Im Falle $z = 0$

ist nichts zu zeigen). Dann ist $U(-\alpha) \cdot z = r = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$, also

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left(U(-\alpha) \cdot \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (U(-\alpha) \cdot f(t)) dt.$$

Da für eine komplexe Zahl $w = u + iv$ stets $\operatorname{Re}(w) = u \leq \sqrt{u^2 + v^2}$ und die Integration über reellwertige Funktionen monoton ist, folgt:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re} (U(-\alpha) \cdot f(t)) dt \leq \int_a^b |U(-\alpha) \cdot f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Damit ist auch (4) bewiesen.

Thema der Vorlesung sind die komplexwertigen Funktionen von einer **komplexen** Veränderlichen. Dabei sind vier Parameter im Spiel, das lässt sich schwer darstellen. Wir werden es trotzdem versuchen. Wir betrachten ein ganz einfaches Beispiel, nämlich die Funktion $f(z) = z^2$. Eine bewährte Methode besteht darin, mit zwei Ebenen zu arbeiten:

Ist $w = z^2$ und $z = r \cdot U(t)$ mit $r > 0$ und $t = \arg(z) \in [0, 2\pi)$, so ist

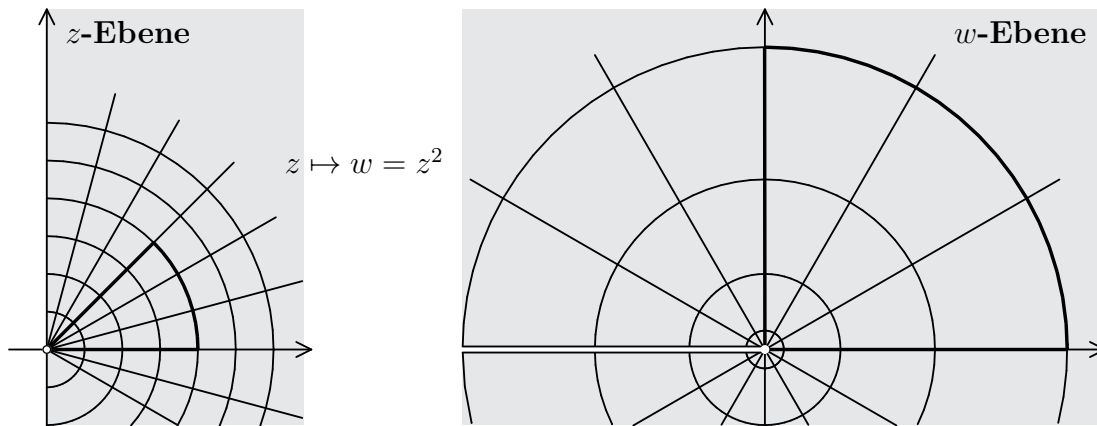
$$|w| = |z|^2 = r^2 \quad \text{und} \quad \arg(w) = \arg(U(t)^2) = \arg(U(2t)) = 2t = 2 \cdot \arg(z).$$

Benutzt man also Polarkoordinaten, so wird bei Anwendung von f der Radius quadriert und der Winkel t verdoppelt. Das Bild der rechten z -Halbebene

$$\{z = x + iy : x > 0\} = \{r \cdot U(t) : r > 0 \text{ und } -\pi/2 < t < +\pi/2\}$$

ist deshalb die komplette w -Ebene, aus der nur die negative x -Achse herausgenommen werden muss.

Dabei werden die Strahlen $t = \text{const.}$ auf ebensolche Strahlen abgebildet, nur ihr Winkel gegen die positive x -Achse verdoppelt sich. Die Kreise $r = \text{const.}$ werden wieder auf Kreise abgebildet, allerdings mit quadriertem Radius.



Im Folgenden wollen wir weitere Beispiele von komplexwertigen Funktionen kennenlernen, die auf $\mathbb{C}$ oder auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert sind. Besonders prominente Beispiele sind die (auf ganz $\mathbb{C}$ definierten) komplexen Polynome

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

und die komplexen Potenzreihen $P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (z - a)^{\nu}$, sofern sie konvergieren.

Eine Potenzreihe ist eine Reihe komplexwertiger Funktionen. Für solche Reihen hat man die gleichen Konvergenzbegriffe wie im Reellen. Sind komplexwertige Funktionen (f_{ν}) auf $M \subset \mathbb{C}$ gegeben, so sagt man:

1. $\sum_{\nu} f_{\nu}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, falls für jedes $z \in M$ die Zahlenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(z)$ gegen $f(z)$ konvergiert.
2. $\sum_{\nu} f_{\nu}$ **konvergiert normal** auf M , falls $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_M |f_{\nu}|$ konvergiert.
3. $\sum_{\nu} f_{\nu}$ **konvergiert auf M gleichmäßig** gegen f , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } \sup_M \left| \sum_{\nu=0}^n f_{\nu}(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Führt man die „Partialsummen“ $F_n := \sum_{\nu=0}^n f_\nu$ ein, so bedeutet die gleichmäßige Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \text{ s.d. } \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall z \in M \text{ gilt: } |F_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Damit ist auch gleich gesagt, wie man die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen definiert.

1.3.2. Satz

Konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ normal auf M , so konvergiert die Reihe punktweise absolut und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f auf M .

BEWEIS: Für alle $z \in M$ ist $|f_\nu(z)| \leq \sup_M |f_\nu|$. Deshalb folgt aus der normalen Konvergenz mit Hilfe des Majorantenkriteriums (für Reihen reeller Zahlen) zunächst die punktweise absolute und damit dann die punktweise Konvergenz schlechthin. Die Grenzfunktion f wird durch $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ gegeben.

Aus der normalen Konvergenz der Reihe gewinnt man außerdem mit Hilfe des Cauchyriteriums für Zahlenreihen folgende Aussage:

$$\text{Ist } \varepsilon > 0 \text{ vorgegeben, so } \exists n_0, \text{ s.d. } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } \sum_{\nu=n_0+1}^n \sup_M |f_\nu| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $n \geq n_0$ und jedes $z \in M$ gilt daher:

$$|F_n(z) - F_{n_0}(z)| = \left| \sum_{\nu=n_0+1}^n f_\nu(z) \right| \leq \sum_{\nu=n_0+1}^n |f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=n_0+1}^n \sup_M |f_\nu| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen der punktweisen Konvergenz der Reihe gibt es zu jedem einzelnen $z \in M$ ein $m = m(z) > n_0$, so dass $|F_m(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ ist. Daraus folgt für $n > n_0$ und $z \in M$:

$$\begin{aligned} |F_n(z) - f(z)| &\leq |F_n(z) - F_{m(z)}(z)| + |F_{m(z)}(z) - f(z)| \\ &\leq |F_n(z) - F_{n_0}(z)| + |F_{m(z)}(z) - F_{n_0}(z)| + |F_{m(z)}(z) - f(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Reihe gleichmäßig auf M konvergiert. ■

Weil aus der gleichmäßigen Konvergenz offensichtlich auch die punktweise Konvergenz folgt, haben wir folgende Implikationen:

$$\text{Normale Konvergenz} \implies \text{Gleichmäßige Konvergenz} \implies \text{Punktweise Konvergenz}.$$

1.3.3. Satz

Es sei $M \subset \mathbb{C}$ und (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf M . Konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M gleichmäßig gegen eine Funktion f , so ist f auch stetig.

BEWEIS: Mit den f_ν sind natürlich auch alle Partialsummen $F_n = \sum_{\nu=0}^n f_\nu$ stetig. Sei nun $z_0 \in M$ fest gewählt und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man kann ein n_0 finden, so dass $|F_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ für $n \geq n_0$ und alle $z \in M$ ist.

Weil F_{n_0} stetig ist, gibt es aber auch ein $\delta > 0$, so dass $|F_{n_0}(z) - F_{n_0}(z_0)| < \varepsilon/3$ für $z \in M$ und $|z - z_0| < \delta$ ist. Daraus folgt für solche z :

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - F_{n_0}(z)| + |F_{n_0}(z) - F_{n_0}(z_0)| + |F_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f in z_0 stetig. ■

Für Reihen stetiger Funktionen folgt das

1.3.4. Satz (Weierstraß-Kriterium)

Es sei $M \subset \mathbb{C}$, und es seien stetige Funktionen $f_\nu : M \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Weiter gebe es eine konvergente Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ nicht-negativer reeller Zahlen und ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|f_\nu(z)| \leq a_\nu \quad \text{für } \nu \geq \nu_0 \text{ und } \textbf{alle } z \in M.$$

Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M normal (und damit gleichmäßig) gegen eine stetige Funktion auf M .

BEWEIS: Mit dem Majorantenkriterium folgt aus den Voraussetzungen die normale Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M . Aus dieser folgt wiederum die gleichmäßige Konvergenz und daraus die Stetigkeit der Grenzfunktion. ■

Typische Reihen stetiger Funktionen sind die Potenzreihen. Ihr Konvergenzverhalten kann man sehr genau beschreiben.

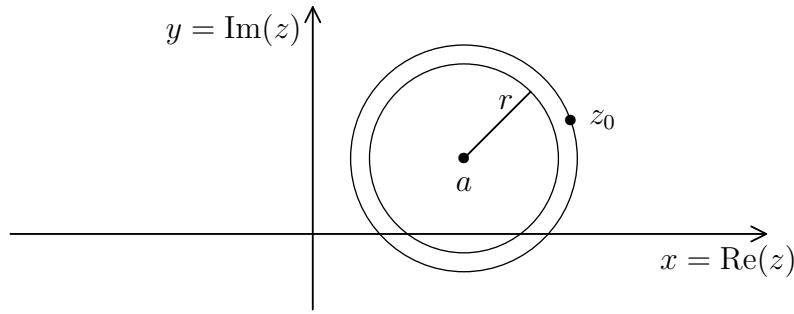
1.3.5. Satz (Konvergenzverhalten von Potenzreihen)

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ konvergiere für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$.

Ist dann $0 < r < |z_0 - a|$, so konvergiert $P(z)$ und auch die Reihe

$$P'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - a)^{n-1}$$

auf der Kreisscheibe $D_r(a)$ absolut und gleichmäßig.



BEWEIS: 1) Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0 - a)^n \implies \exists M > 0$, so dass $|c_n(z_0 - a)^n| \leq M$ für alle n . Ist $0 < r < |z_0 - a|$, so ist $q := r/|z_0 - a| < 1 \implies \forall z$ mit $|z - a| \leq r$ gilt:

$$|c_n(z - a)^n| = |c_n(z_0 - a)^n| \cdot \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n \leq M \cdot q^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ für jedes $z \in D_r(a)$ absolut konvergiert, und mit dem Weierstraß-Kriterium folgt sogar, dass die Reihe auf $D_r(a)$ gleichmäßig konvergiert.

2) Sei $\widetilde{M} := M/|z_0 - a|$. Nach (1) ist $|n \cdot c_n(z - a)^{n-1}| \leq n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \widetilde{M} \cdot q^n}{n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot q = q < 1.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - a)^{n-1}$ auf $D_r(a)$ gleichmäßig konvergiert. ■

Die Zahl $R := \sup\{r \geq 0 : \exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |z_0 - a|, \text{ so dass } P(z_0) \text{ konvergiert}\}$ heißt **Konvergenzradius** von $P(z)$. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind auch zugelassen. $D_R(a)$ heißt der **Konvergenzkreis** der Reihe. Es gilt:

1. Für $0 < r < R$ konvergiert $P(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ normal (und damit insbesondere absolut und gleichmäßig).
2. Ist $|z_0 - a| > R$, so divergiert $P(z_0)$.
3. Die Grenzfunktion $P(z)$ ist im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a)$ stetig.

Für den Konvergenzradius gibt es verschiedene Berechnungsmethoden:

1.3.6. Lemma von Abel

Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$. Dann ist

$$R = \sup\{r \geq 0 : (|c_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}\}.$$

BEWEIS: Sei r_0 das Supremum auf der rechten Seite der Gleichung.

Wenn eine Reihe nicht-negativer reeller Zahlen konvergiert, dann bilden ihre Glieder eine Nullfolge und sind insbesondere beschränkt. Ist $r < R$ und $|z - a| = r$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z - a)^n| < \infty$ und damit $(|c_n| r^n)$ beschränkt, d.h., $r \leq r_0$. Weil das für alle $r < R$ gilt, folgt daraus, dass $R \leq r_0$ ist.

Da $R > 0$ vorausgesetzt wurde, muss auch $r_0 > 0$ sein. Ist nun $0 < r < r_0$, so kann man ein r' mit $r < r' < r_0$ finden $\implies (|c_n| (r')^n)$ beschränkt, etwa durch M . Wir setzen $q := r/r'$ und erhalten:

1. $0 < q < 1$.
2. $|c_n| r^n = |c_n| (r' q)^n \leq M \cdot q^n$.

Mit dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$, also $r \leq R$. Weil das für alle $r < r_0$ gilt, ist auch $r_0 \leq R$. ■

Für das nächste Kriterium müssen wir an den Begriff des Limes Superior erinnern.

Ist (a_n) eine nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen, so versteht man unter ihrem **Limes superior** (in Zeichen: $\overline{\lim} a_n$ oder $\limsup a_n$) den größten Häufungspunkt der Folge. Besitzt die Folge keinen Häufungspunkt, so ist $\overline{\lim} a_n := -\infty$.

Für eine nach oben beschränkte Folge (a_n) ist genau dann $c = \overline{\lim} a_n$, wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt:

$$a_n < c + \varepsilon, \text{ und } \exists k > n \text{ mit } a_k > c - \varepsilon.$$

Ist die Folge (a_n) nicht nach oben beschränkt, so besitzt sie keinen Limes superior. Man setzt dann aber gerne $\overline{\lim} a_n = +\infty$.

Ist eine Folge (a_n) konvergent, so ist ihr Limes zugleich auch ihr Limes superior.

1.3.7. Formel von Cauchy-Hadamard

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ eine Potenzreihe und $\gamma := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$. Dann gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe:

1. Wenn γ eine endliche Zahl > 0 ist, dann ist $R = 1/\gamma$.
2. Wenn $\gamma = 0$ ist, dann ist $R = \infty$.
3. Wenn die Folge $\sqrt[n]{|c_n|}$ unbeschränkt (also $\gamma = \infty$) ist, dann ist $R = 0$.

BEWEIS: Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$. Setzt man $\alpha(z) := \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n (z - a)^n|}$, so erhält man die Gleichung $\alpha(z) = |z - a| \gamma$.

1) Sei $0 < \gamma < +\infty$. Ist $|z - a| < 1/\gamma$, so ist $\alpha(z) < 1$. Dann gibt es ein q mit $\alpha(z) < q < 1$ und ein n_0 , so dass $\sqrt[n]{|c_n (z - a)^n|} < q$ (also $|c_n (z - a)^n| < q^n$) für

$n \geq n_0$ ist. Dann folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Potenzreihe in z (absolut) konvergiert.

Ist $|z - a| > 1/\gamma$, so ist $\alpha(z) > 1$. Das bedeutet, dass unendlich viele Terme $|c_n(z - a)^n|$ ebenfalls > 1 sind. Dann divergiert die Potenzreihe. Also muss $R = 1/\gamma$ sein.

2) Sei $\gamma = 0$. Dann ist auch $\alpha(z) = 0$ für alle $z \neq a$, und die Folge $\sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|}$ konvergiert gegen Null. Ist $0 < q < 1$, so gibt es ein n_0 , so dass $|c_n(z - a)^n| < q^n$ für $n \geq n_0$ gilt. Die Reihe konvergiert für jedes $z \neq a$.

3) Sei $\gamma = +\infty$. Dann sind die Glieder der Potenzreihe in jedem Punkt $z \neq a$ unbeschränkt, und die Reihe divergiert für $z \neq a$. ■

1.4 Komplexe Differenzierbarkeit

Als der Mathematiker Euler seinerzeit recht sorglos begann, mit komplexen Zahlen, Funktionen und Reihen zu rechnen, benutzte er die aus dem Reellen bekannten Regeln, z.B. die Differentiationsregeln

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, \quad (e^z)' = e^z \quad \text{usw.}$$

Heute sollte man solche Regeln erst beweisen, bevor man sie anwendet.

Definition (Komplexe Differenzierbarkeit):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. f heißt in z_0 **komplex differenzierbar**, falls es eine Funktion $\Delta : G \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z)$ für alle $z \in G$.
2. Δ ist in z_0 stetig.

Für $z \neq z_0$ ist $\Delta(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ der „Differenzenquotient“. Dass Δ in z_0 stetig ist, bedeutet, dass der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \Delta(z_0)$$

existiert. Die komplexe Zahl $f'(z_0)$ nennt man dann die **Ableitung** von f in z_0 . f heißt auf G komplex differenzierbar, falls f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist. Aus komplexer Differenzierbarkeit folgt immer auch Stetigkeit.

1.4.1. Satz (Ableitungsregeln)

$f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, c eine komplexe Zahl.

1. $f + g$, cf und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} (f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (cf)'(z_0) &= cf'(z_0) \\ \text{und} \quad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \end{aligned}$$

2. Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0 , f/g in z_0 komplex differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. Ist h in $w_0 := f(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $h \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

Der BEWEIS geht genauso wie im Reellen. Exemplarisch soll hier nur der Beweis für die Kettenregel angegeben werden:

Ist $h(w) = h(w_0) + \Delta^{**}(w) \cdot (w - w_0)$ und $f(z) = f(z_0) + \Delta^*(z) \cdot (z - z_0)$, mit einer in w_0 stetigen Funktion Δ^{**} und einer in z_0 stetigen Funktion Δ^* , so folgt:

$$\begin{aligned}(h \circ f)(z) &= h(w_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot (f(z) - w_0) \\ &= (h \circ f)(z_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^*(z) \cdot (z - z_0).\end{aligned}$$

Nun kann man $\Delta(z) := \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^*(z)$ setzen. Da Δ in z_0 stetig ist, folgt die komplexe Differenzierbarkeit von $h \circ g$ und die Kettenregel. ■

1.4.2. Beispiele

1. Weil $z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}$, $\Delta(z) := \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}$ stetig und $\Delta(z_0) = n \cdot z_0^{n-1}$ ist, folgt tatsächlich: $(z^n)' = n z^{n-1}$.
2. Die komplexen Polynome $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, die Ableitung gewinnt man in gewohnter Weise.
3. Die Funktion $f(z) = z\bar{z}$ ist in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, denn $\Delta(z) := \bar{z}$ ist im Nullpunkt stetig, und es ist

$$f(z) = f(0) + z \cdot \Delta(z).$$

Die Punkte $z \neq 0$ werden wir später untersuchen.

4. Rationale Funktionen (also Quotienten zweier Polynome) sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich komplex differenzierbar. Das gilt insbesondere für alle „Möbius-Transformationen“. Eine (**gebrochen**) **lineare Transformation** oder **Möbius-Transformation** ist eine Abbildung der Gestalt

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Die Funktion T ist für alle $z \neq -d/c$ definiert und stetig.

Man betrachtet üblicherweise zwei Spezialfälle.

1. Fall: Ist $c = 0$, $A := a/d$ und $B := b/d$, so ist T eine komplexe affin-lineare Funktion $T(z) = A \cdot z + B$. Die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ stellt eine Drehstreckung dar, die Abbildung $w \mapsto w + B$ eine Translation der Ebene.

2. Fall: Die Abbildung $I(z) := 1/z$ nennt man die **Inversion**. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig. Bekanntlich ist $1/z = (1/|z|^2) \cdot \bar{z}$. Damit besteht $I(z)$ aus der Spiegelung am Einheitskreis und der Spiegelung an der x -Achse.

Ist $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ eine beliebige Möbius-Transformation mit $c \neq 0$, $A := (bc - ad)/c$ und $B := a/c$, so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz + d} + B &= \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

5. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius $R > 0$.

Behauptung: f ist in jedem Punkt z des Konvergenzkreises $D_R(0)$ komplex differenzierbar, und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}.$$

BEWEIS: Im Nullpunkt ist f offensichtlich differenzierbar, mit $f'(0) = c_1$, denn es ist

$$f(z) - f(0) = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z \cdot \Delta(z)$$

mit einer im Nullpunkt stetigen Funktion Δ und $\Delta(0) = c_1$.

Wir wissen schon, dass die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$$

ebenfalls in $D_R(0)$ konvergiert. Gezeigt werden muss nur, dass dies tatsächlich die Ableitung von $f(z)$ ist.

Sei nun z_0 ein beliebiger Punkt des Konvergenzkreises $D_R(0)$ von f und $F_N(z)$ die N -te Partialsumme von $f(z)$. Dann ist

$$F_N(z) - F_N(z_0) = \sum_{n=1}^N c_n (z^n - z_0^n) = (z - z_0) \cdot \Delta_N(z),$$

mit

$$\Delta_N(z) := \sum_{n=1}^N c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Wir wählen ein $r < R$, so dass $|z_0| < r$ ist. Für $z \in D_r(0)$ gilt dann:

$$\left| c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} \right| \leq |c_n| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i |z_0|^{n-i-1} \leq |c_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$ in jedem Punkt $z \in \overline{D_r(0)}$ absolut konvergiert, ist insbesondere die reelle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$ konvergent.

Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann $\Delta_N(z)$ gleichmäßig auf $D_r(0)$ gegen die stetige Funktion

$$\Delta(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} \quad (\text{mit } \Delta(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z_0^{n-1}).$$

Aus der Gleichung $F_N(z) = F_N(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta_N(z)$ wird beim Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ die Gleichung $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z)$. Also ist f in z_0 komplex differenzierbar und

$$f'(z_0) = \Delta(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot z_0^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt werden analog behandelt.

Die Reihen

$$\begin{aligned} \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \text{und } \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ und stellen dort komplex differenzierbare Funktionen (Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus) dar. Auf $\mathbb{R}$ stimmen sie natürlich mit den bekannten Funktionen überein.

Die Reihen können gliedweise differenziert werden. Deshalb gilt:

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

Statt $\exp(z)$ schreibt man auch gerne e^z .

1.4.3. Satz (Euler'sche Formel)

Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\exp(it) = \cos t + i \sin t = U(t)$.

BEWEIS: Man vergleiche Real- und Imaginärteil der Reihenentwicklungen. ■

1.4.4. Hilfssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-konstant. Dann ist f sogar konstant.

BEWEIS: Dass f lokal-konstant ist, bedeutet: $\forall z \in G \exists U = U(z) \subset G$, so dass $f|_U$ konstant ist. Daraus folgt natürlich, dass f stetig ist.

Sei $z_0 \in G$, $c := f(z_0)$ und $Z := \{z \in G : f(z) = c\}$. Definitionsgemäß ist $Z \neq \emptyset$. Weil f stetig ist, ist Z abgeschlossen. Und weil f lokal-konstant ist, ist Z offen. ■

1.4.5. Satz

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $f'(z) \equiv 0$. Dann ist f konstant.

BEWEIS: Sei $z_0 \in G$ und $U = U(z_0) \subset G$ eine konvexe offene Umgebung. Ist $z \in U$, so definieren wir $g_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g_z(t) := f(z_0 + t(z - z_0))$. Wir zeigen dann, dass g_z auf $[0, 1]$ konstant ist (*). Daraus folgt, dass $f(z) = g_z(1) = g_z(0) = f(z_0)$ und daher f auf U konstant ist.

Zum Beweis von (*) reicht es zu zeigen, dass $g'_z(t) \equiv 0$ auf $[0, 1]$ ist. Sei $t_0 \in [0, 1]$ fest gewählt und $w_0 := z_0 + t_0(z - z_0) \in U$. Für $t \in [0, 1]$ sei außerdem $z_t := z_0 + t(z - z_0)$. Weil f in w_0 komplex differenzierbar ist, gibt es eine in w_0 stetige Funktion Δ , so dass $f(w) - f(w_0) = (w - w_0)\Delta(w)$ für alle $w \in G$ gilt und $\Delta(w_0) = f'(w_0) = 0$ ist.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{g_z(t) - g_z(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(z_t) - f(w_0)}{t - t_0} = \frac{(z_t - w_0) \cdot \Delta(z_t)}{t - t_0} \\ &= \frac{(t - t_0) \cdot (z - z_0) \cdot \Delta(z_t)}{t - t_0} \\ &= (z - z_0)\Delta(z_0 + t(z - z_0)), \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für $t \rightarrow t_0$ gegen 0. Also ist $g'_z(t_0) = 0$.

Als lokal-konstante Funktion ist f nun sogar global konstant auf G . ■

1.4.6. Satz (Additionstheorem)

Es ist $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

BEWEIS: Ist $a \in \mathbb{C}$ ein beliebiger, aber fester Punkt und $f_a(z) := \exp(z) \cdot \exp(a - z)$, so ist $f'_a(z) \equiv 0$, also f_a konstant $= f_a(0) = \exp(a)$.

Sind nun $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ zwei beliebige, aber fest gewählte Punkte, so setze man $a := z_0 + w_0$. Dann ist $\exp(z_0 + w_0) = \exp(a) = f_a(z_0) = \exp(z_0) \cdot \exp(w_0)$. ■

1.4.7. Folgerung

Es ist $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

BEWEIS: $1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$. ■

1.4.8. Folgerung (Periodizität der Exponentialfunktion)

Es ist $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

BEWEIS: Es ist $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$, also $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi i) = \exp(z)$. Das ist alles! ■

Außerdem gilt für **alle** $z \in \mathbb{C}$ die **Euler'sche Formel**:

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

BEWEIS: Ersetzt man jeweils -1 durch i^2 , so erhält man

$$\begin{aligned} \cos z + i \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \exp(iz). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Daraus folgen auch neue Relationen, z.B.:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine komplexwertige Funktion auf G , so kann man f als Abbildung von G nach $\mathbb{R}^2$ auffassen. Die totale Differenzierbarkeit von f wird wie üblich definiert. Die **totale Ableitung** von f in z_0 bezeichnet man mit $Df(z_0)$.

Bei der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ entsprechen die komplexen Zahlen 1 und i den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Deshalb nennt man

$$f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := Df(z_0)(1) \quad \text{und} \quad f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := Df(z_0)(i)$$

die **partiellen Ableitungen** von f nach x und y . Ist $f = g + ih$, so gilt:

$$f_x(z_0) = g_x(z_0) + i h_x(z_0) \quad \text{und} \quad f_y(z_0) = g_y(z_0) + i h_y(z_0).$$

Die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $Df(z_0)$ wird deshalb bezüglich der Basis $\{1, i\}$ durch die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) $J_f(z_0) := \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix}$ beschrieben.

1.4.9. Satz

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist f in z_0 auch reell differenzierbar, und die totale Ableitung $Df(z_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Multiplikation mit $f'(z_0)$, also $\mathbb{C}$ -linear. Auch die Umkehrung dieser Aussage ist richtig.

BEWEIS: Sei f in z_0 komplex differenzierbar. Dann gibt es eine in z_0 stetige Funktion Δ , so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (\Delta(z) - f'(z_0))(z - z_0) \\ &= f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0), \end{aligned}$$

mit der durch $L(v) := f'(z_0) \cdot v$ definierten linearen Abbildung L und der Funktion $r(h) := (\Delta(z_0 + h) - f'(z_0)) \cdot h$. Dann gilt:

$$\frac{r(h)}{|h|} = \left(\Delta(z_0 + h) - f'(z_0) \right) \cdot \frac{h}{|h|} \rightarrow 0 \quad (\text{für } h \rightarrow 0)$$

Also ist f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0) = L$ sogar $\mathbb{C}$ -linear.

Ist umgekehrt f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$ -linear, so gibt es eine komplexe Zahl a , so dass $Df(z_0)(v) = a \cdot v$ ist, und es gibt eine Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + r(z - z_0), \quad \text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/|h| = 0.$$

Setzt man für $z \neq z_0$ dann $\Delta(z) := a + (r(z - z_0))/(z - z_0)$, so strebt $|\Delta(z) - a|$ für $z \rightarrow z_0$ gegen null. Δ ist also stetig nach z_0 fortsetzbar. Außerdem ist $\Delta(z)(z - z_0) = a(z - z_0) + r(z - z_0) = f(z) - f(z_0)$. Damit ist f komplex differenzierbar. ■

Ist $c_0 = a_0 + i b_0 \in \mathbb{C}$, so wird die Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $L(w) = c_0 \cdot w$ (also $L(1) = a_0 + i b_0$ und $L(i) = -b_0 + i a_0$) bezüglich der Basis $\{1, i\}$ durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Man kann das jetzt auf eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion mit $f'(z_0) = a_0 + i b_0$ anwenden. Da $Df(z_0)$ in diesem Fall eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung ist, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} g_x(z_0) & h_x(z_0) \\ g_y(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix},$$

also

$$g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \text{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0).$$

Und auch die Umkehrung ist richtig.

Dieses kleine System von partiellen Differentialgleichungen ist der Schlüssel zum Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit. Man spricht von den **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**.

1.4.10. Satz (über komplexe Differenzierbarkeit)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$ -linear.
2. f ist in z_0 komplex differenzierbar.
3. Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

4. f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \text{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0).$$

Zum BEWEIS braucht eigentlich nichts mehr gesagt zu werden. ■

Ist also $f = g + i h$ in z_0 komplex differenzierbar, so ist $Df(z_0)$ die Multiplikation mit

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f_x(z_0) = g_x(z_0) + i h_x(z_0) \\ &= h_y(z_0) - i g_y(z_0) = -i (g_y(z_0) + i h_y(z_0)) = -i f_y(z_0). \end{aligned}$$

1.4.11. Beispiel

Sei $f(z) := z\bar{z} \implies f$ ist im Nullpunkt komplex differenzierbar und $f'(0) = 0$.

Aber f ist in keinem Punkt $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar, denn sonst wäre dort auch die Funktion $k(z) := \bar{z} = (1/z) \cdot f(z)$ komplex differenzierbar. Es ist aber $(\operatorname{Re} k)_x(z) = 1$ und $(\operatorname{Im} k)_y(z) = -1$. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt!

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Vorlesung.

Definition (Holomorphie):

Eine Funktion f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ **holomorph**, wenn sie in einer offenen Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist.

Komplexe Polynome sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist auf dem Konvergenzkreis der Reihe holomorph. Die Funktion $f(z) := z\bar{z}$ ist zwar in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber **nirgends** holomorph!

Funktionen, die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, sind dort auch automatisch holomorph.

1.4.12. Satz (über die Konstanz holomorpher Funktionen)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

1. Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.
2. Ist $|f|$ konstant, so ist auch f konstant.

BEWEIS: 1) Nimmt $f = g + ih$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$. Wegen der Cauchy-Riemann'schen DGLn ist dann $g_x(z) \equiv 0$ und $g_y(z) \equiv 0$. Das ist nur möglich, wenn g lokal-konstant und daher überhaupt konstant ist. Also ist auch f konstant. Im Falle rein imaginärer Werte geht es genauso.

2) Sei $|f|$ konstant. Ist diese Konstante $= 0$, so ist $f(z) \equiv 0$. Ist aber $|f| =: c \neq 0$, so ist die Funktion $f\bar{f} = c^2$ konstant und damit holomorph, und f besitzt keine Nullstellen. Daraus folgt, dass $\bar{f} = c^2/f$ holomorph ist, und damit auch

$$\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}).$$

Wegen (1) müssen $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ konstant sein, und damit auch f . ■

Wir wollen jetzt partielle Ableitungen nach z und $\bar{z}$ einführen. Dieser nach Wilhelm Wirtinger benannte äußerst nützliche Kalkül kann allerdings nur formal verstanden werden. Er beruht auf dem folgenden einfachen Ergebnis aus der linearen Algebra:

1.4.13. Lemma

Sei $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Dann gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen c, c' , so dass gilt:

$$L(z) = c \cdot z + c' \cdot \bar{z}.$$

L ist genau dann $\mathbb{C}$ -linear, wenn $c' = 0$ ist. Und L ist genau dann reellwertig, wenn $c' = \bar{c}$ ist.

BEWEIS: Zunächst die Existenz: Es gibt **komplexe** Zahlen α, β mit $L(x + iy) = \alpha x + \beta y$. Setzt man dann $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ein, so erhält man

$$L(z) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) \cdot z + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \cdot \bar{z}.$$

Man kann also $c := (\alpha - i\beta)/2$ und $c' := (\alpha + i\beta)/2$ setzen. Dabei ist zu beachten, dass in der Regel **nicht** $c' = \bar{c}$ ist, weil α und β komplex sind.

Zur Eindeutigkeit: Ist $c_1 \cdot z + c'_1 \cdot \bar{z} = c_2 \cdot z + c'_2 \cdot \bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und setzt man $z = 1$ bzw. $z = i$ ein, so erhält man die Gleichungen

$$c_1 + c'_1 = c_2 + c'_2 \quad \text{und} \quad c_1 - c'_1 = c_2 - c'_2,$$

also $c_1 = c_2$ und damit $c'_1 = c'_2$.

Offensichtlich gilt: Ist $c' = 0$ (bzw. $c' = \bar{c}$), so ist L $\mathbb{C}$ -linear (bzw. reellwertig). Umgekehrt folgt: Ist L $\mathbb{C}$ -linear, so ist $0 = iL(1) - L(i \cdot 1) = i(c + c') - i(c - c') = 2c'i$, also $c' = 0$. Ist dagegen L reellwertig, so sind $L(1) = \alpha$ und $L(i) = \beta$ reell, und damit $c' = \bar{c}$. ■

1.4.14. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $f_z(z_0)$ und $f_{\bar{z}}(z_0)$, so dass gilt:

$$Df(z_0)(h) = f_z(z_0) \cdot h + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h}.$$

Nach dem vorangegangenen Lemma ist der BEWEIS jetzt trivial.

Definition (Wirtinger-Ableitungen):

Die Zahlen $f_z(z_0)$ und $f_{\bar{z}}(z_0)$ nennt man die **Wirtinger-Ableitungen von f nach z und $\bar{z}$** .

1.4.15. Satz (Wirtinger-Kalkül)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 reell differenzierbar. Dann gilt:

1. $f_z(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0))$ und $f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$.
2. f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ ist. In dem Falle ist $f_z(z_0) = f'(z_0)$.
3. Die Ableitungen $f \mapsto f_z(z_0)$ und $f \mapsto f_{\bar{z}}(z_0)$ sind in f $\mathbb{C}$ -linear und erfüllen die Produktregel.
4. Höhere Wirtinger-Ableitungen werden wie üblich induktiv definiert. Insbesondere gilt für zweimal stetig differenzierbares f die Gleichung

$$f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy}).$$

5. Ist $\alpha : I \rightarrow G$ ein differenzierbarer Weg mit $\alpha(t_0) = z_0$, so ist

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = f_z(z_0) \cdot \alpha'(t_0) + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot \overline{\alpha'(t_0)}.$$

BEWEIS: 1) Es ist $Df(z_0)(u + iv) = f_x(z_0)u + f_y(z_0)v$. Die Behauptung folgt nun wie im Beweis des Lemmas.

2) folgt sofort aus der Gleichung $Df(z_0)(h) = f_z(z_0) \cdot h + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h}$.

3) $\mathbb{R}$ -Linearität und Produktregel folgen aus den entsprechenden Regeln für $Df(z_0)$. Und offensichtlich ist $(if)_x = (-h + ig)_x = -h_x + ig_x = i \cdot (g_x + ih_x) = i \cdot f_x$ und analog $(if)_y = i \cdot f_y$. Mit (1) ergibt sich daraus die $\mathbb{C}$ -Linearität.

4) Es ist $f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}[(f_x - if_y)_x + i(f_x - if_y)_y] = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})$.

5) Es ist $(f \circ \alpha)'(t) = Df(\alpha(t))(\alpha'(t)) = f_z(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) + f_{\bar{z}}(\alpha(t)) \cdot \overline{\alpha'(t)}$. ■

Man behandelt also z und $\bar{z}$ wie zwei unabhängige Variable.

1.4.16. Folgerung 1

Es ist $f_x = f_z + f_{\bar{z}}$ und $f_y = i(f_z - f_{\bar{z}})$.

Der BEWEIS ist eine simple Umformung der Formeln für f_z und $f_{\bar{z}}$. ■

1.4.17. Folgerung 2

Es ist $\overline{(f_z)} = \overline{f_z} = f_{\bar{z}}$ und $\overline{(f_{\bar{z}})} = \overline{f_{\bar{z}}} = f_z$.

BEWEIS: Es ist

$$\overline{(f_z)} = \overline{(f_x - if_y)/2} = \frac{1}{2}(\overline{(f_x)} + i\overline{(f_y)}) = \frac{1}{2}(\overline{f_x} + i\overline{f_y}) = \overline{f_z}.$$

Nochmaliges Konjugieren ergibt die zweite Formel. ■

Wir setzen jetzt voraus, dass $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist. Wegen der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist dann

$$\det Df(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ h_x & g_x \end{pmatrix} = (g_x)^2 + (h_x)^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Das bedeutet, dass f – aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ – **orientierungserhaltend** ist!

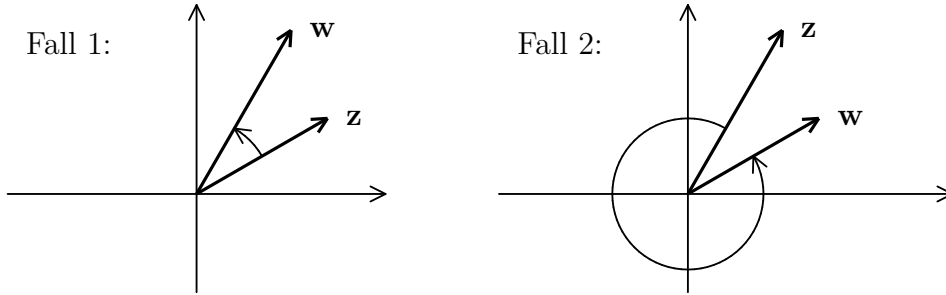
Ist f holomorph und nicht konstant, so ist $\bar{f}$ natürlich nicht holomorph. Man nennt $\bar{f}$ **antiholomorph** (weil $(\bar{f})_z = 0$ ist). Es ist dann

$$\det D\bar{f}(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ -h_x & -g_x \end{pmatrix} = -|f'(z)|^2 < 0.$$

Antiholomorphe Funktionen sind also orientierungsumkehrend.

Holomorphe Funktionen lassen außerdem Winkel invariant. Was heißt das? Sind $z = r_1 \cdot e^{it_1}$ und $w = r_2 \cdot e^{it_2}$ zwei komplexe Zahlen $\neq 0$, so verstehen wir unter dem Winkel zwischen z und w die Zahl

$$\angle(z, w) = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{falls } t_2 > t_1 \\ 2\pi - (t_1 - t_2) & \text{sonst.} \end{cases}$$



Der Winkel $\angle(z, w)$ wird also von z aus immer in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen.

Ein parametrisierter Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **glatt**, falls α stetig differenzierbar und $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ ist. Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei glatte Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, so setzt man $\angle(\alpha, \beta) := \angle(\alpha'(0), \beta'(0))$.

Definition (Konformität):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit nicht verschwindender Ableitung heißt in z_0 **winkeltreu**, falls für beliebige glatte Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gilt: $\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta)$.

Ist f lokal umkehrbar, überall winkeltreu und orientierungserhaltend, so heißt f **lokal konform**. Ist f außerdem global injektiv, so nennt man f **konform**.

1.4.18. Satz (Kriterium für lokale Konformität)

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, mit stetigen partiellen Ableitungen, und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$, so ist f lokal konform.

BEWEIS: Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist auch $\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Sind außerdem die partiellen Ableitungen von f stetig, so folgt aus dem Satz über inverse Abbildungen, dass es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$ gibt, so dass $f : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist f lokal umkehrbar.

Wir müssen nur noch zeigen, dass f winkeltreu ist. Aus der Holomorphie von f folgt: Ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein glatter Weg mit $\alpha(0) = z_0$, so ist $(f \circ \alpha)'(0) = f'(z_0) \cdot \alpha'(0)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) &= \angle((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)) = \angle(f'(z_0) \cdot \alpha'(0), f'(z_0) \cdot \beta'(0)) \\ &= \arg\left(\frac{f'(z_0) \cdot \beta'(0)}{f'(z_0) \cdot \alpha'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\right) = \angle(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

■

Definition (biholomorphe Abbildung):

Gegeben seien Gebiete $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$. Die Abbildung heißt **biholomorph**, falls f zusätzlich bijektiv und f^{-1} holomorph ist. Man nennt G_1 und G_2 dann auch **biholomorph äquivalent**.

Eine Funktion f auf einem Gebiet G heißt in $z_0 \in G$ **lokal biholomorph**, falls es offene Umgebungen $U = U(z_0) \subset G$ und $V = V(f(z_0)) \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $f|_U : U \rightarrow V$ biholomorph ist.

1.4.19. Beispiele

1. Die Funktion $f(z) = z^2$ ist außerhalb des Nullpunktes lokal biholomorph, sie ist aber nicht global injektiv. Das Verhalten im Nullpunkt werden wir später untersuchen.
2. Eine Möbius-Transformation $T(z) := (az + b)/(cz + d)$ (mit $ad - bc \neq 0$) bildet $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ ab. Die Umkehrung ist wieder eine Möbius-Transformation.

1.4.20. Hilfssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, injektiv und lokal biholomorph. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow f(G)$ biholomorph.

BEWEIS: Ist $w_0 = f(z_0) \in f(G)$, so gibt es offene Umgebungen $U = U(z_0) \subset G$ und $V = V(w_0) \subset \mathbb{C}$, so dass $f : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Also ist $V = f(U) \subset f(G)$. Das bedeutet, dass $f(G)$ offen ist.

Als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge ist $f(G)$ auch zusammenhängend, also sogar ein Gebiet.

$f : G \rightarrow f(G)$ ist holomorph und bijektiv. Ist $w_0 = f(z_0) \in f(G)$, so gibt es Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(w_0)$, so dass $f : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Also ist f^{-1} auf V holomorph, und weil es zu jedem Punkt von $f(G)$ eine solche Umgebung gibt, ist f sogar global biholomorph. ■

1.4.21. Kriterium für lokale Biholomorphie

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig und $z_0 \in G$. Unter diesen Voraussetzungen ist f genau dann in z_0 biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

BEWEIS: 1) Ist $f(z_0) = w_0$ und f in z_0 lokal biholomorph, so gibt es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(w_0)$, so dass $f|_U : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Dann ist $1 = (f^{-1} \circ f)'(z_0) = (f^{-1})'(w_0) \cdot f'(z_0)$, also $f'(z_0) \neq 0$.

2) Sei umgekehrt $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist auch $\det Df(z_0) \neq 0$, und es gibt offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$, so dass $f : U \rightarrow V$ umkehrbar (reell)

differenzierbar ist. Dann ist $f'(z) \neq 0$ für $z \in U$, und wegen der Holomorphie von f ist $f_{\bar{z}}(z) = 0$ für $z \in U$. Dann gilt für diese z aber

$$\begin{aligned} 0 &= (\text{id}_U)_{\bar{z}}(z) = ((f|_U)^{-1} \circ f)_{\bar{z}}(z) \\ &= ((f|_U)^{-1})_w(f(z)) \cdot f_{\bar{z}}(z) + ((f|_U)^{-1})_{\bar{w}}(f(z)) \cdot (\bar{f})_{\bar{z}}(z) \\ &= ((f|_U)^{-1})_{\bar{w}}(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$

Also erfüllt $(f|_U)^{-1}$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und ist holomorph. ■

Bemerkungen:

1. Wir werden später sehen, dass die Stetigkeit von f' nicht extra vorausgesetzt werden muss.
2. Sei $f(z) := z^2$. Dann verschwindet $f'(z) = 2z$ im Nullpunkt. Daher ist f im Nullpunkt nicht lokal biholomorph.
3. Da $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt, folgt, dass $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ lokal biholomorph ist. Über das globale Verhalten sprechen wir im nächsten Abschnitt.
4. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, sowie f' stetig und überall $\neq 0$, so folgt aus dem Kriterium für lokale Biholomorphie, dass f überall lokal biholomorph ist. Ist f außerdem injektiv, so ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow f(G)$ biholomorph, also $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ holomorph. Weiter ist $1 = (f \circ f^{-1})'(w) = f'(f^{-1}(w)) \cdot (f^{-1})'(w)$, also

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

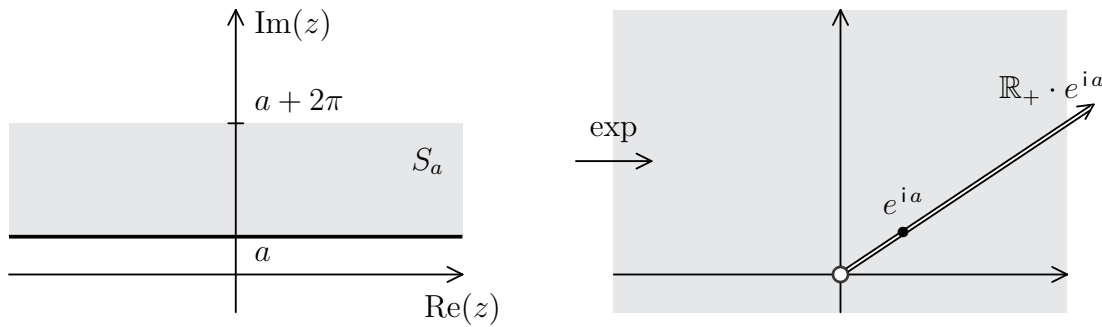
1.5 Der komplexe Logarithmus

Die Logarithmusfunktion sollte die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion sein. Leider kann es eine solche nicht geben, denn es gilt: $\exp(z + 2k\pi i) = \exp(z)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Speziell ist $\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = 1\} = 2\pi i\mathbb{Z}$. Die Exponentialfunktion ist also weit von der Injektivität entfernt. Man muss schauen, ob $\exp$ wenigstens auf einem hinreichend großen Teilgebiet von $\mathbb{C}$ injektiv ist.

1.5.1. Bijektivitätsbereiche der Exponentialfunktion

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $\exp : \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ bijektiv. Die Gerade $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = a\}$ wird dabei auf den Halbstrahl $\mathbb{R}_+ \cdot e^{ia}$ abgebildet.

BEWEIS: Durch $S_a := \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\}$ wird ein Streifen parallel zur x -Achse definiert. Wir zeigen, dass $\exp$ das Innere dieses Streifens injektiv auf die längs eines Halbstrahls aufgeschlitzte Ebene abbildet. Der Nullpunkt kommt im Bild nicht vor.



1) Injektivität: Es ist $\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \exp(z) = \exp(w) &\implies \exp(z - w) = 1 \implies z = w + 2\pi i n \\ &\implies z \text{ und } w \text{ nicht beide im gleichen Streifen } S_a. \end{aligned}$$

2) Surjektivität: Sei $w = re^{it} \in \mathbb{C}^*$, also $r > 0, 0 \leq t < 2\pi$. Wir setzen $z := \ln(r) + it$. Dann ist $\exp(z) = e^{\ln(r)+it} = r \cdot e^{it} = w$. Liegt z nicht im Streifen S_a , so kann man ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so dass $z^* := z + 2\pi i k$ dann aber doch in S_a liegt, und es ist auch $\exp(z^*) = \exp(z) = w$.

Ist $z = x + ia$ (mit $x \in \mathbb{R}$), so ist $\exp(z) = e^x \cdot e^{ia} \in \mathbb{R}_+ e^{ia}$. ■

Definition (Logarithmuszweig):

$$\log_{(a)} := (\exp \big|_{S_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{ia} \rightarrow \overset{\circ}{S}_a$$

heißt **der durch a bestimmte Logarithmuszweig**. Insbesondere heißt $\log = \log_{(-\pi)} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \{z = x + iy : -\pi < y < \pi\}$ der **Hauptzweig** des Logarithmus.

1.5.2. Berechnungsformel für den Logarithmus

Ist $z = r \cdot e^{it}$, mit $a < t < a + 2\pi$, so ist $\log_{(a)}(z)$ definiert, und es gilt

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + it.$$

Der BEWEIS ist klar.

Man kann folgendes Kochrezept zur Bestimmung von Logarithmen verwenden (das allerdings kein eindeutiges Ergebnis liefert): Eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{it}$ mit $0 \leq t < 2\pi$ sei gegeben. Man sucht ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $a < t < a + 2\pi$ ist.

1. Ist $0 \leq t < \pi$, so wähle man $a = -\pi \implies \log_{(-\pi)}(z) = \log(z) = \ln(r) + it$.
2. Ist $\pi \leq t < 2\pi$, so kann man $a = 0$ wählen und erhält $\log_{(0)}(z) = \ln r + it$.

1.5.3. Beispiele

1. Sei $z = 2i = 2 \cdot e^{i(\pi/2)}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \pi/2$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und man erhält den Hauptwert:

$$\log(2i) = \log_{(-\pi)}(2i) = \ln(2) + i\pi/2.$$

2. Sei $z = -2i$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = 3\pi/2$. Weil $0 < 3\pi/2 < 2\pi$ gilt, kann man $a = 0$ wählen und erhält:

$$\log_{(0)}(-2i) = \ln(2) + i(3\pi/2), \text{ aber auch } \log_{(-\pi)}(-2i) = \ln(2) - i\pi/2.$$

1.5.4. Ableitung des Logarithmus

$\log(z)$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ eine holomorphe Funktion mit

$$\log(1) = 0, \quad \exp(\log(z)) = z \quad \text{und} \quad \log'(z) = 1/z.$$

BEWEIS: Der Hauptzweig $\log$ ist auf der entlang der negativen reellen Achse aufgeschlitzten Ebene $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ definiert. Die Zahl 1 liegt in dieser aufgeschlitzten Ebene, und es ist $\log(1) = \ln(1) = 0$. Nach Konstruktion ist $\exp(\log(z)) = z$ auf ganz $\mathbb{C}'$. Als Umkehrabbildung zur komplexen Exponentialfunktion (deren Ableitung nirgends verschwindet) ist $\log$ natürlich holomorph.

Für $z \in \mathbb{C}'$ ist $\log'(z) = 1/\exp'(\log(z)) = 1/z$. ■

Wir können noch eine weitere Beschreibung des Logarithmus geben. Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass Folgendes gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \text{ bzw. } \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $= 1$, also ist

$$\tilde{L}(w) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n$$

eine holomorphe Funktion auf $D_1(0)$. Sei $L(z) := \tilde{L}(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$.

Behauptung: Für $|z-1| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

BEWEIS:

$$\text{In } D_1(0) \text{ ist } \tilde{L}'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-w)^{n-1} = \frac{1}{1+w}.$$

Weil $\tilde{L}$ auf $D_1(0)$ holomorph ist, ist $L(z) = \tilde{L}(z-1)$ holomorph auf $D_1(1)$, und es ist $L'(z) = \tilde{L}'(z-1) = 1/z = \log'(z)$, also $L(z) = \log(z) + c$ mit einer Konstanten c . Setzt man $z = 1$ ein, so erhält man $c = 0$. ■

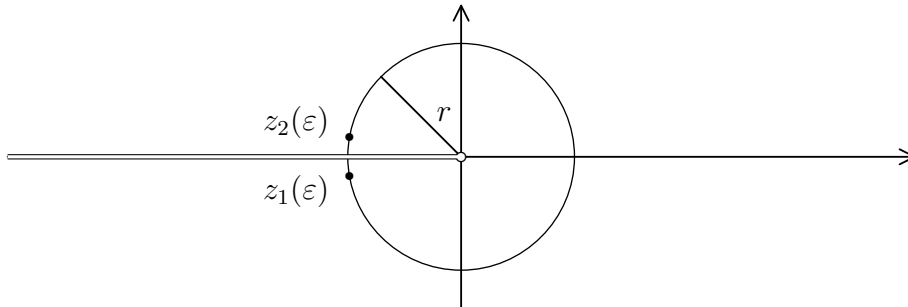
Weil $\log'(z) = 1/z$ ist, stellt der Nullpunkt natürlich ein unüberwindliches Hindernis für eine etwaige Fortsetzung des Logarithmus dar. Warum man $\log$ aber nicht wenigstens auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren kann, zeigt die folgende Überlegung:

$$\begin{aligned} \text{Es sei } z_1(\varepsilon) &:= r e^{i t_1(\varepsilon)} \\ \text{und } z_2(\varepsilon) &:= r e^{i t_2(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

mit $t_1(\varepsilon) := -\pi + \varepsilon$ und $t_2(\varepsilon) := \pi - \varepsilon$. Dann streben beide Punkte $z_i(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die reelle Zahl $-r$, aber

$$\log(z_2(\varepsilon)) - \log(z_1(\varepsilon)) = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2(\pi - \varepsilon)i$$

strebt für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $2\pi i$.



Die Zweige $\log_{(-\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind alle auf $\mathbb{C}'$ definiert. Verschafft man sich für jedes k ein Exemplar G_k von $\mathbb{C}'$ und verheftet dann jeweils G_k mit G_{k+1} entlang der

negativen reellen Achse so, dass die Logarithmuswerte aneinander passen, so erhält man eine wendeltreppenartige Fläche aus unendlich vielen Blättern, die „Riemannsche Fläche“ des Logarithmus. Auf der existiert eine globale Logarithmusfunktion.

Jetzt können wir auch beliebige Potenzen in $\mathbb{C}$ definieren.

Definition (allgemeine Potenzfunktion):

Für komplexe Zahlen z und w mit $z \neq 0$ setzt man

$$z^w := \exp(w \cdot \log_{(a)}(z)).$$

Dabei muss z im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Wenn möglich, benutzt man den Hauptzweig.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte.

1.5.5. Beispiele

1. Was ist i^i ? Mit $i = e^{i\pi/2}$ folgt:

$$i^i = \exp(i \cdot \log_{(-\pi)}(e^{i\pi/2})) = \exp(i \cdot i\pi/2) = e^{-\pi/2} = 0.207879 \dots$$

Dabei wurde der Hauptzweig des Logarithmus benutzt. Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich

$$\exp(i \cdot \log_{(-\pi+2\pi k)}(e^{i(\pi/2+2\pi k)})) = \exp(i \cdot (i\pi/2 + 2\pi i k)) = e^{-\pi/2} e^{-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{it}$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi i k]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + it + 2\pi i k]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(r)\right) \cdot \exp\left(i\left(\frac{t}{2} + \pi k\right)\right) = \pm \sqrt{r} \cdot e^{it/2}, \end{aligned}$$

je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist. Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n -ten Wurzel:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(t/n) + i(2k/n)\pi} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(t/n)} \cdot (\zeta_n)^k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

wobei ζ_n eine n -te Einheitswurzel bezeichnet. In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

4. Für den Logarithmus einer positiven reellen Zahl benutzt man normalerweise den Hauptzweig. Ist also e die Euler'sche Zahl, so ist $e^z = \exp(z \cdot \log(e)) = \exp(z \cdot \ln(e)) = \exp(z)$, denn es ist ja $\ln(e) = 1$. Das rechtfertigt endlich die Exponentialschreibweise für die komplexe Exponentialfunktion. Man sollte dabei aber nicht vergessen, dass $\exp(z)$ nur einer der möglichen Werte von e^z ist, auch wenn die anderen Werte meistens unberücksichtigt bleiben.

Die Schwierigkeit, die Exponentialfunktion zu invertieren, vererbt sich auf andere elementare Funktionen. Exemplarisch soll hier die komplexe Arcustangensfunktion eingeführt werden.

Bekanntlich ist

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

also

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = -\frac{i(e^{2iz} - 1)}{e^{2iz} + 1}.$$

Diese Funktion ist überall holomorph, außer in den Punkten z , für die $e^{2iz} + 1 = 0$ ist. Das sind alle Punkte der Gestalt $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\tan z$ setzt sich aus zwei Funktionen zusammen: $\tan(z) = g(f(z))$ mit

$$f(z) := \exp(2iz) \quad \text{und} \quad g(w) := i \frac{1-w}{1+w}.$$

Die Abbildung $z \mapsto 2iz$ bildet $G_0 := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ auf den Parallelstreifen $S_{-\pi} = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ab, der wiederum durch $\exp$ bijektiv auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}'$ abgebildet wird. f bildet also G_0 bijektiv auf $\mathbb{C}'$ ab. Da $w = -1$ nicht in $\mathbb{C}'$ liegt, ist g auf $\mathbb{C}'$ definiert.

Die Umkehrabbildung von f ist auf $\mathbb{C}'$ gegeben durch

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2i} \log w \quad (\text{mit dem Hauptzweig des Logarithmus}).$$

Wir müssen nun noch herausfinden, wie das Bild von $\mathbb{C}'$ unter g aussieht, wohin insbesondere $\mathbb{R}_-$ abgebildet wird.

Offensichtlich ist g eine auf $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ definierte Möbius-Transformation. Die Umkehrfunktion $w = g^{-1}(u)$ erhält man durch Auflösung der Gleichung $u = i(1-w)/(1+w)$ nach w :

$$w = g^{-1}(u) = \frac{1+iu}{1-iu}.$$

Also bildet g die Menge $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ab.

Weil -1 unter g keinen Bildpunkt besitzt, muss nur noch gezeigt werden, wohin g die Mengen $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$ und $M_2 := \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 0\}$ abbildet. Dabei ist $g(t) = ih(t)$, mit

$$h(t) := \frac{1-t}{1+t} \quad (\text{für } t \neq -1).$$

Die Funktion $h(t)$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definiert und differenzierbar, es ist $h(0) = 1$ und $h'(t) = -2/(1+t)^2 < 0$, also h auf seinem Definitionsbereich streng monoton fallend. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} h(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty, \\ \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t < -1}} h(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2+\varepsilon}{-\varepsilon} = -\infty \\ \text{und } \lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{1-n} = -1. \end{aligned}$$

Also ist $g(M_1) = \{it : t < -1\}$ und $g(M_2) = \{it : t \geq 1\}$, und daher

$$\begin{aligned} g(\mathbb{C}') &= (\mathbb{C} \setminus \{-i\}) \setminus \{it : t \geq 1 \text{ oder } t < -1\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{it : t \geq 1 \text{ oder } t \leq -1\} =: G. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $\arctan = \tan^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : G \rightarrow G_0$ gegeben durch

$$\arctan(u) = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ui}{1-ui}.$$

Andere Logarithmenzweige führen zu anderen Zweigen des Arcustangens.

Wie im Reellen erhält man für die Ableitung

$$\arctan'(u) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1-ui}{1+ui} \cdot \frac{i+u+i-u}{(1-ui)^2} = \frac{1}{(1+ui)(1-ui)} = \frac{1}{1+u^2}.$$

1.6 Anhang zu Kapitel 1

Im Anhang finden sich einige Beweise, die nicht in der Vorlesung vorgeführt wurden.

Satz 1.2.2. (Seite 11)

M und N seien Teilmengen des metrischen Raumes X.

1. *Ist M abgeschlossen, so ist $M = \overline{M}$.*
2. *$\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in X, die M umfasst.*
3. *Ist $M \subset N$, so ist $\overline{M} \subset \overline{N}$.*

BEWEIS: 1) M abgeschlossen $\implies X \setminus M$ offen $\implies \forall x \in X \setminus M \exists U = U(x) \subset X \setminus M \implies$ ein $x_0 \in X \setminus M$ kann kein Häufungspunkt von M sein. Also ist $M' \subset M$ und $\overline{M} = M$.

2) a) $\overline{M}$ ist abgeschlossen: Ist $x_0 \in X \setminus \overline{M}$, so ist x_0 kein Häufungspunkt von $M \implies \exists U = U(x_0)$ mit $U \cap M = \emptyset \implies U$ enthält keinen Häufungspunkt von $M \implies U \subset X \setminus \overline{M}$. Also ist $X \setminus \overline{M}$ offen und $\overline{M}$ abgeschlossen.

b) Sei A abgeschlossen und $M \subset A$. Ist x_0 ein Häufungspunkt von M , so $\exists x_\nu \in M$ mit $x_\nu \rightarrow x_0$. Da die x_ν auch in A liegen, liegt x_0 in $\overline{A} = A$. Also ist $\overline{M} \subset A$.

3) Sei $M \subset N$. Weil $N \subset \overline{N}$ gilt, ist auch $M \subset \overline{N}$. Weil $\overline{N}$ abgeschlossen ist, muss $\overline{M}$ in $\overline{N}$ enthalten sein. ■

Satz 1.2.5. (Seite 13)

X und Y seien metrische Räume mit Metriken d_X bzw. d_Y . Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist in $x_0 \in X$ stetig.*
2. *$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: Ist $d_X(x, x_0) < \delta$, so ist $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*
3. *Konvergiert x_n gegen x_0 , so konvergiert auch $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.*

BEWEIS: (1) $\implies$ (3): Sei f in x_0 stetig, $y_0 := f(x_0)$ und die Folge der Punkte $x_n \in X$ konvergiere gegen x_0 . Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so $\exists U = U(x_0) \subset X$, so dass $f(U)$ in der ε -Umgebung $V_\varepsilon(y_0)$ liegt. Außerdem $\exists \delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset U$. Weil x_n gegen x_0 konvergiert, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\delta$ für $n \geq n_0$. $\implies f(x_n) \in f(U) \subset V_\varepsilon(y_0)$ für $n \geq n_0$. Das bedeutet, dass $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

(3) $\implies$ (2): Es gelte das Folgenkriterium. Wir führen Beweis durch Widerspruch: Annahme, $\exists \varepsilon > 0$, so dass $\forall \delta > 0 \exists x$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ und $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Insbesondere folgt: $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n$ mit $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ und $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Das bedeutet: x_n konvergiert gegen x_0 , aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x_0)$. Widerspruch!

(2) $\implies$ (1): Die Voraussetzung besagt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x_0)) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$. Hieraus folgt aber ganz einfach die Stetigkeit von f in x_0 . ■

Beispiel 1.2.8. (Seite 15)

Ein **Intervall** ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $r_1 \in I$, $r_2 \in I$ und $r_1 < r < r_2$, so ist auch $r \in I$. Jedes Intervall ist zusammenhängend.

Beweis: Sei I ein Intervall, $I = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nicht leere (relativ) abgeschlossene Teilmengen. Sei $t_0 \in A$ und $t_1 \in B$, o.B.d.A. sei $t_0 < t_1$. Dann setze man $c := \sup\{t \in A : t < t_1\} \implies t_0 \leq c \leq t_1$, also $c \in I \implies (c, t_1] \neq \emptyset$ und in B enthalten. Weil B abgeschlossen ist, ist $c \in B$. Und weil A abgeschlossen ist, müsste c auch zu A gehören. WS zu $A \cap B = \emptyset$!