Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 12** **Prof. Fritzsche**

45) Bestimmen Sie sämtliche Laurent-Entwicklungen von $f(z) := \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ um den Punkt $z_0 = -1$.

46) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten und deren Typ:

$$f(z) := \frac{z - \sin z}{z^3}, \quad g(z) := \frac{\sin z}{1 - \tan z} \quad \text{und} \quad h(z) := \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

Dabei sei $\tan z := \sin z / \cos z$.

47) Berechnen Sie die folgenden Residuen:

$$\operatorname{res}_0\bigl(e^{-1/z}\bigr), \qquad \operatorname{res}_z\left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right) \text{ für } z = \pm 1,$$

$$\operatorname{res}_{-1}\left(\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_0\left(\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right).$$

48) Benutzen Sie den Residuensatz zur Berechnung des Integrals $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\cos t + \sin t}$.

49) Berechnen Sie $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$ mit Hilfe des Residuensatzes.

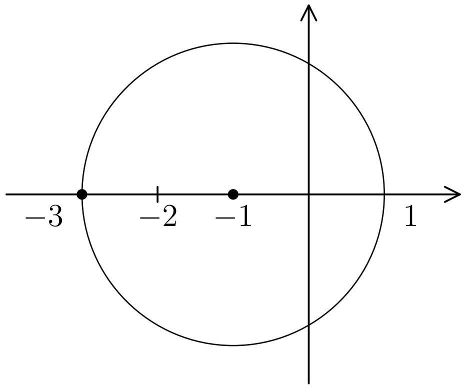
50) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{4\,dx}{\sqrt{x}(4x^2+1)}$

Hinweis: Denken Sie an die Mellin-Transformation!

Abgabetermin: **Donnerstag**, 27.07.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte. Für die Bewertung reichen 4 Aufgaben, als Klausurvorbereitung sollte man aber möglichst viele Aufgaben bearbeiten.

Lösg. zu Afg. 45:



a) Entwicklung im Kreisring $K_{0,2}(-1) = \{z \,:\, 0 < |z+1| < 2\}$.

Setze zur Abkürzung $u = z+1$. Dann ist $|u/2| < 1$ und

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u} \cdot \frac{1}{1-(-u/2)} \\ &= \frac{1}{2u} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(-\frac{u}{2}\Big)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2^{\nu+1}} u^{\nu-1} \\ &= \frac{1/2}{z+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+1}}{2^{\mu+2}} (z+1)^{\mu}. \end{aligned}$$

b) Entwicklung im Kreisring $K_{2,\infty}(-1) = \{z \,:\, |z+1| > 2\}$.

In diesem Fall ist $2/|z+1| < 1$ und

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z+1)+2} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-(-2)/(z+1)}\,,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\frac{-2}{z+1}\Big)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-2)^{\nu} (z+1)^{-\nu-2} \\ &= \sum_{\mu=2}^{\infty} (-2)^{\mu-2} (z+1)^{-\mu} = 4 \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(-1)^n}{2^n} (z+1)^n. \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 46: a) $z = 0$ ist die einzige isolierte Singularität von f. Es ist

$$\begin{aligned} z - \sin z &= z - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1} \\ &= -z^3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu-2} = z^3 \cdot g(z), \end{aligned}$$

mit $g(z) := \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+3)!} z^{2\mu}$.

Weil der Konvergenzradius von $g(z)$ Unendlich und $f(z) = g(z)$ außerhalb des Nullpunktes ist, ist die Singularität hebbar.

b) $g(z)$ hat isolierte Singularitäten bei $z_k := \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und bei den Nullstellen des Cosinus, aber letztere sind offensichtlich hebbar, denn man kann $f(z) = \frac{\sin z \cos z}{\cos z - \sin z}$ schreiben.

Um zu sehen, dass der Nenner keine weiteren Nullstellen hat, muss man die Gleichung $\tan z = 1$ lösen. Nutzt man die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, sowie die Gleichungen

$$\sin(\mathrm{i}\, z) = \mathrm{i} \cdot \sinh(z) \quad \text{und} \quad \cos(\mathrm{i}\, z) = \cosh(z),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\tan(x + \mathrm{i}\, y) &= \frac{\sin x \cos(\mathrm{i}\, y) + \cos x \sin(\mathrm{i}\, y)}{\cos x \cos(\mathrm{i}\, y) - \sin x \sin(\mathrm{i}\, y)} = \frac{\sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y} \\
&= \frac{(\sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y)(\cos x \cosh y + \mathrm{i} \sin x \sinh y)}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} \\
&= \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} + \mathrm{i} \frac{\sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}.
\end{aligned}$$

Damit dies $= 1$ wird, muss $\sinh y \cosh y = 0$ sein, also $y = 0$. Das bedeutet, dass die Lösungen von $\tan z = 1$ alle reell sein müssen. Damit bleibt es bei den Punkten z_k.

Für $z \to z_k$ strebt der Nenner von $g(z)$ gegen 0 und der Zähler gegen $1/\sqrt{2}$. Also liegen in z_k Polstellen vor.

c) h hat eine Singularität in $z = 0$ (dort ist die Funktion offensichtlich nicht definiert), aber auch in den Punkten $z_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ (weil dort der Sinus verschwindet).

In den Punkten z_k liegen Polstellen vor. Da diese sich gegen 0 häufen, ist der Nullpunkt überhaupt keine isolierte Singularität.

Lösg. zu Afg. 47:

1. Die Laurententwicklung von $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ um $z_0 = 0$ ist:

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + (-1)\frac{1}{z} \pm \ldots$$

   D.h. es ist $a_{-1} = \mathrm{res}_0(f) = -1$.

2. Ist $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, so ist $z = 1$ eine einfache und $z = -1$ eine doppelte Polstelle von f. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_1(f) &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \\
\text{und}\quad \operatorname{res}_{-1}(f) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}[(z+1)^2 f(z)]^{(2-1)} = \lim_{z\to -1}\left(\frac{z}{z-1}\right)' \\
&= \lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. Ist $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$, so ist $z = -1$ eine doppelte Polstelle von f. Es gilt also:

$$\operatorname{res}_{-1}(f) = \lim_{z\to -1}\big[(z+1)^2 f(z)\big]' = \lim_{z\to -1}\frac{2z^2+8z-8}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

4. Ist $f(z) = \dfrac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}$, so ist $z = 0$ eine dreifache Polstelle von f. Man kann $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ schreiben, mit der in $z = 0$ holomorphen Funktion $f_1(z) := \dfrac{z^2}{(2z-1)(z-2)}$ und der Funktion $f_2(z) := \dfrac{1}{z^3(2z^2-5z+2)}$. Offensichtlich ist $\operatorname{res}_0(f) = \operatorname{res}_0(f_2)$, und mit $N(z) := 2z^2 - 5z + 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_0(f_2) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\big(z^3 f_2(z)\big)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{1}{N(z)}\Big)'' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{-(4z-5)}{N(z)^2}\Big)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-4\cdot N(z)^2 + (4z-5)\cdot 2N(z)\cdot N'(z)}{N(z)^4} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{-16-20\cdot(-5)}{16} = \frac{84}{2\cdot 16} = \frac{21}{8}\,.
\end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 48: Sei $R(x,y) := \dfrac{1}{3-2x+y}$, dann ist

$$R(\cos(t),\sin(t)) = \frac{1}{3-2\cos(t)+\sin(t)}.$$

Wir setzen

$$f(z) := \frac{1}{z}R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big), \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{2\,\mathrm{i}}{(1-2\,\mathrm{i}\,)z^2+6\,\mathrm{i}\,z-1-2\,\mathrm{i}}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind $z_1 = 2 - \mathrm{i}$ und $z_2 = \frac{1}{5}(2 - \mathrm{i})$, d.h. es ist

$$f(z) = \frac{2\mathrm{i}}{(1-2\mathrm{i})(z-(2-\mathrm{i}))(z-\frac{1}{5}(2-\mathrm{i}))}.$$

Da nur $z_2 \in D_1(0)$ liegt, können wir das Integral folgendermaßen berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(t) + \sin(t)}\, dt = 2\pi \cdot \mathrm{res}_{z_2}(f).$$

Da z_2 einfache Polstelle von f ist, gilt:

$$\mathrm{res}_{z_2}(f) = \lim_{z\to z_2}(z - z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{2\mathrm{i}}{(1-2\mathrm{i})(z-(2-\mathrm{i}))} = \frac{2\mathrm{i}}{4\mathrm{i}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(t) + \sin(t)}\, dt = \pi.$$

Lösg. zu Afg. 49: Offensichtlich ist $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.

Der Integrand $f(x) := 1/(x^6 + 1)$ besitzt 6 einfache Polstellen, nämlich

$z_k := e^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)/6}$, für $k = 0, 1, \ldots, 5$ (die Lösungen der Gleichung $z^6 = -1$).

Davon liegen z_0, z_1 und z_2 in der oberen Halbebene.

Sei $g_k(z) := \dfrac{z^6+1}{z-z_k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{5} z_k^i z^{5-i}$. Dann ist

$$\mathrm{res}_{z_k}(f) = \lim_{z\to z_k}(z - z_k)\cdot f(z) = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{g_k(z)} = \frac{1}{6z_k^5}.$$

Das Integral existiert, weil der Grad des Nenners um (mehr als) 2 größer als der Grad des Zählers ist. Nach dem Satz über die Berechnung rationaler Integrale ist

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{res}_{z_0}(f) + \mathrm{res}_{z_1}(f) + \mathrm{res}_{z_2}(f)\Big) \\ &= \frac{\pi\mathrm{i}}{6}\Big(\frac{1}{z_0^5} + \frac{1}{z_1^5} + \frac{1}{z_2^5}\Big) = \frac{\pi\mathrm{i}}{6}\Big(e^{-\mathrm{i}(5/6)\pi} + (-\mathrm{i})^5 + e^{-\mathrm{i}(25/6)\pi}\Big) \\ &= \frac{\pi\mathrm{i}}{6}\Big(\frac{1}{2}(-\sqrt{3} - \mathrm{i}) - \mathrm{i} + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \mathrm{i})\Big) = \frac{\pi\mathrm{i}}{6}(-2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 50: Sei $f(z) := \dfrac{z^{-1/2}}{z^2 + 1/4}$ und $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$. Dann gilt laut Vorlesung:

$$\int_0^\infty \frac{4\,dx}{\sqrt{x}(4x^2+1)} = \int_0^\infty \frac{x^{1/2-1}\,dx}{(x^2+1/4)} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-e^{\pi\mathrm{i}}}\sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}}\mathrm{res}_w(f) = \pi\mathrm{i}\sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}}\mathrm{res}_w(f).$$

Weil $f(z) = \dfrac{z^{-1/2}}{(z - \mathsf{i}/2)(z + \mathsf{i}/2)}$ ist, sind die Residuen von f in $w_1 = \mathsf{i}/2$ und $w_2 = -\mathsf{i}/2$ zu berechnen. Es ist

$$\Big(\frac{\mathsf{i}}{2}\Big)^{-1/2} = \exp\Big(-\frac{1}{2}\log_{(0)}\big(\frac{1}{2}e^{\mathsf{i}\pi/2}\big)\Big) = \exp\big(\frac{1}{2}\ln 2 - \mathsf{i}\,\frac{\pi}{4}\big) = \sqrt{2}e^{-\mathsf{i}\pi/4}$$

und

$$\Big(-\frac{\mathsf{i}}{2}\Big)^{-1/2} = \exp\Big(-\frac{1}{2}\log_{(0)}\big(\frac{1}{2}e^{\mathsf{i}(3\pi)/2}\big)\Big) = \exp\big(\frac{1}{2}\ln 2 - \mathsf{i}\,\frac{3\pi}{4}\big) = \sqrt{2}e^{-\mathsf{i}(3\pi)/4}.$$

Damit folgt:

$$\mathrm{res}_{\mathsf{i}/2}(f) = \lim_{z\to\mathsf{i}/2}\frac{z^{-1/2}}{z + \mathsf{i}/2} = \frac{(\mathsf{i}/2)^{-1/2}}{\mathsf{i}} = -\mathsf{i}\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathsf{i})\Big) = -1 - \mathsf{i}$$

und

$$\mathrm{res}_{-\mathsf{i}/2}(f) = \frac{(-\mathsf{i}/2)^{-1/2}}{-\mathsf{i}} = \mathsf{i}\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathsf{i})\Big) = 1 - \mathsf{i}.$$

Damit ist

$$\int_0^\infty \frac{4\,dx}{\sqrt{x}(4x^2+1)} = \pi\,\mathsf{i}\,\big((-1 - \mathsf{i}) + (1 - \mathsf{i})\big) = 2\pi.$$