Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 11** **Prof. Fritzsche**

41) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass g sein (globales) Maximum und Minimum auf ∂G annimmt.

b) Sei $\mathbb{D} := D_1(0)$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subset\subset G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie: Ist $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$, so besitzt f in $\mathbb{D}$ eine Nullstelle.

42) Zeigen Sie: Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein einfach geschlossener, glatter Integrationsweg, so besteht $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten. Jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten, und auf der beschränkten Komponente ist $|n(\alpha, z)| = 1$.

Hinweis: Das Komplement von $|\alpha|$ besteht aus abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten, die man nummerieren kann. Dann ordne man jedem Parameterwert t die Menge $\{p(t), q(t)\}$ der beiden Nummern derjenigen Komponenten zu, die bei $\alpha(t)$ links und rechts von α liegen. Man verfolge, wie sich diese beiden Mengen längs $[a, b]$ verhalten. Dabei hilft Aufgabe 40.

43) Sei $\alpha(t) := 2e^{-\mathsf{i}\,t}$, $\beta_1(t) := \mathsf{i} + \frac{1}{2}e^{\mathsf{i}\,t}$ und $\beta_2(t) := -\mathsf{i} + \frac{1}{2}e^{\mathsf{i}\,t}$, sowie $G := \mathbb{C} \setminus \{\mathsf{i}, -\mathsf{i}\}$.

a) Für welche ganzen Zahlen k, l, m ist $\gamma := k\alpha + l\beta_1 + m\beta_2$ in G nullhomolog?

b) Für $\Gamma := \alpha + 2\beta_1 + 3\beta_2$ berechne man

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z - 2\sqrt{2}\,\mathsf{i})(z - \sqrt{2}\,\mathsf{i})^3}\, dz.$$

44) Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten und deren Typ:

$$f(z) := \frac{z^2 + \mathsf{i}}{z^4 + 1}, \quad g(z) := \cos\Big(\frac{1}{z}\Big) \quad \text{und} \quad h(z) := \frac{1}{\sin^2 z}.$$

Abgabetermin: **Donnerstag**, 20.07.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 41: a) Wenn g konstant ist, ist nichts zu zeigen. Man nehme also an, dass g nicht konstant ist und in einem Punkt $z_0 \in G$ sein globales Maximum annimmt. Es sei $c := g(z_0)$. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $D_r(z_0) \subset\subset G$ und $g(z) \le g(z_0)$ für $z \in D_r(z_0)$ gilt. Als harmonische Funktion besitzt g die Mittelwerteigenschaft. Daraus folgt für $0 < \varrho \le r$:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\, t})\, dt \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0)\, dt = g(z_0).$$

Das geht nur, wenn überall ein Gleichheitszeichen steht, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} \big(g(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\, t}) - g(z_0)\big)\, dt = 0.$$

Da der Integrand überall ≤ 0 und ϱ beliebig ist, folgt: $g(z) \equiv c$ auf $D_r(z_0)$.

Sei $M := \{z \in G \,:\, g(z) = c\}$. Dann ist $M \ne \varnothing$, und da man die obigen Überlegungen in jedem Punkt z mit $g(z) = c$ anstellen kann, ist M offen. Weil g stetig ist, ist M auch abgeschlossen. Also muss $M = G$ und g konstant sein. Das ist ein Widerspruch. Der Beweis für Minima geht genauso.

b) Wegen $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ ist $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Nach dem Maximumprinzip folgt, dass $|f| \le 1$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ ist. Nun nehme man an, dass f keine Nullstelle in $\mathbb{D}$ besitzt. Dann ist $f(z) \ne 0$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Daraus folgt, dass $1/f$ auf einer Umgebung $U = U(\overline{\mathbb{D}})$ definiert und holomorph ist.

Weil $|1/f(z)| = 1/|f(z)| = 1$ auf $\partial\mathbb{D}$ gilt, besagt das Maximumprinzip, dass $|1/f(z)| \le 1$ auf ganz $\overline{\mathbb{D}}$ und damit sogar $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$ (also insbesondere für alle $z \in \mathbb{D}$) ist. Aus der Vorlesung (Abschnitt 1.4) ist bekannt, dass dann f auf $\mathbb{D}$ konstant ist. Mit dem Identitätssatz folgt, dass f auf ganz G konstant ist. Das ist ein Widerspruch.

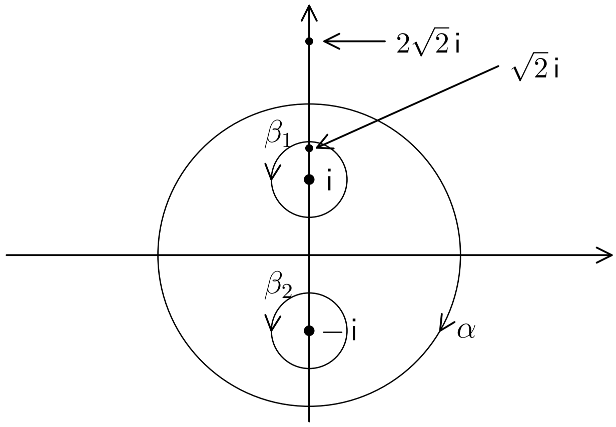
Lösg. zu Afg. 42: Den Wortlaut der Aufgabe kann man als **speziellen Jordan'schen Kurvensatz** bezeichnen (der echte Jordan'sche Kurvensatz setzt nur die Stetigkeit des Weges voraus, und sein Beweis ist dann deutlich schwieriger).

Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ der fragliche Weg, so zerfällt $\mathbb{C} \setminus |\alpha| = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ in (höchstens) abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Dabei sei C_0 die unbeschränkte Komponente.

Ist $t \in [a,b]$ ein beliebiger Parameterwert, so gibt es eine Umgebung $U = U(\alpha(t))$, so dass $U \setminus |\alpha|$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten C_- und C_+ zerfällt. Die liegen ihrerseits wiederum in gewissen Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$. Es sei $\{p(t), q(t)\}$ die Menge der Nummern dieser beiden Komponenten, sowie $\Phi_-(t) := \min(p(t), q(t))$ und $\Phi_+(t) := \max(p(t), q(t))$. Das ergibt zwei Funktionen $\Phi_-, \Phi_+ : [a,b] \to \mathbb{Z}$, die auf Grund ihrer Konstruktion lokal-konstant, also stetig sind. Sie müssen dann auf $[a,b]$ natürlich sogar konstant sein.

Die Ränder der Komponenten C_i liegen auf $|\alpha|$. Insbesondere gibt es ein $t_0 \in [a,b]$, so dass $\alpha(t_0) \in \partial C_0$ ist. Dann ist $\Phi_-(t_0) = 0$ und damit $\Phi_-(t) \equiv 0$ auf $[a,b]$. Wechselt man bei $\alpha(t_0)$ von C_0 auf die andere Seite des Weges, so ändert sich die Umlaufszal um ± 1. Deshalb ist $i_0 := \Phi_+(t_0) \neq 0$. Aber $\Phi_+(t)$ ist auf dem ganzen Intervall konstant. Also ist $C_{i_0} = C_1$ die einzige beschränkte Komponente, und jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt von C_0 und von C_1. Die Umlaufszahl kann in C_1 nur den Wert -1 oder den Wert $+1$ annehmen.

Lösg. zu Afg. 43: a) Die Situation sieht folgendermaßen aus:



Es ist $n(\alpha, \mathrm{i}) = -1$ und $n(\alpha, -\mathrm{i}) = -1$, sowie $n(\beta_1, \mathrm{i}) = 1$, $n(\beta_1, -\mathrm{i}) = 0$, $n(\beta_2, \mathrm{i}) = 0$ und $n(\beta_2, -\mathrm{i}) = 1$, also

$$\begin{aligned} n(\gamma, z) &= k \cdot n(\alpha, z) + l \cdot n(\beta_1, z) + m \cdot n(\beta_2, z) \\ &= \begin{cases} -k + l & \text{für } z = \mathrm{i} \\ -k + m & \text{für } z = -\mathrm{i}. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit γ in G nullhomolog ist, muss $n(\gamma, \mathrm{i}) = n(\gamma, -\mathrm{i}) = 0$ sein, also $-k + l = -k + m = 0$. Das bedeutet, dass $k = l = m$ ist, also $\gamma = k \cdot \alpha + k \cdot \beta_1 + k \cdot \beta_2$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

b) Sei $a := 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$. Dann ist $f(z) := \dfrac{1}{z - a}$ holomorph auf $\widetilde{G} := \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Da $n(\alpha, a) = n(\beta_1, a) = n(\beta_2, a) = 0$ ist, ist Γ nullhomolog in $\widetilde{G}$. Nach dem verallgemeinerten Integralsatz ist

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)(z-\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3} = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3}\,dz = n(\Gamma, \sqrt{2}\,\mathrm{i}) \cdot \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2!} \cdot f''(\sqrt{2}\,\mathrm{i}).$$

Weil $\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ in $D_{1/2}(\mathrm{i})$ liegt, ist $n(\alpha, \sqrt{2}\,\mathrm{i}) = -1$, $n(\beta_1, \sqrt{2}\,\mathrm{i}) = 1$ und $n(\beta_2, \sqrt{2}\,\mathrm{i}) = 0$, also $n(\Gamma, \sqrt{2}\,\mathrm{i}) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1$. Außerdem ist $f'(z) = -1/(z-a)^2$ und $f''(z) = 2/(z-a)^3$. Damit folgt:

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)(z-\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3} = 1 \cdot \pi\,\mathrm{i} \cdot f''(\sqrt{2}\,\mathrm{i}) = \pi\,\mathrm{i} \cdot \frac{2}{(\sqrt{2}\,\mathrm{i} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i})^3} = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Lösg. zu Afg. 44: 1) Sei $f(z) := \dfrac{z^2 + \mathsf{i}}{z^4 + 1}$. Die isolierten Singularitäten von f sind die Nullstellen des Nenners. Es ist $z^4 + 1 = 0 \iff z^4 = -1 = e^{\mathsf{i}\,\pi}$. Als Lösungen erhält man

$$\begin{array}{rrcl} & z_1 & := & e^{\mathsf{i}\,\frac{1}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathsf{i}), \\ & z_2 & := & e^{\mathsf{i}\,\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathsf{i}), \\ & z_3 & := & e^{\mathsf{i}\,\frac{5}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathsf{i}) \\ \text{und} & z_4 & := & e^{\mathsf{i}\,\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathsf{i}). \end{array}$$

Man braucht auch noch die Nullstellen des Zählers. Es gilt:

$$\begin{aligned} z^2 + \mathsf{i} = 0 &\iff z^2 = -\mathsf{i} = e^{\mathsf{i}\,\frac{3}{2}\pi} \\ &\iff z = e^{\mathsf{i}\,\frac{3}{4}\pi} = z_2 \quad \text{oder} \quad z = e^{\mathsf{i}\,\frac{7}{4}\pi} = z_4. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass z_2 und z_4 hebbare Singularitäten von f sind, denn auf einer Umgebung U von z_2 ist

$$g(z) := \frac{1}{(z - z_1)(z - z_3)}$$

eine holomorphe Funktion mit $g|_{U \setminus \{z_2\}} = f$, und bei z_4 argumentiert man analog.

Weil z_1 und z_3 einfache Nullstellen des Nenners sind, während der Zähler dort $\neq 0$ ist, folgt, dass z_1 und z_3 einfache Polstellen von f sind.

2) Sei $f(z) := \cos(\frac{1}{z})$. Für $z \neq 0$ ist f holomorph. Betrachten wir die Nullfolgen $z_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ und $w_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f(z_n) = \cos(\frac{1}{z_n}) = 0 \quad \text{und} \quad f(w_n) = \cos(\frac{1}{w_n}) = 1.$$

Damit ist f in $z = 0$ noch nicht einmal stetig fortsetzbar. Weil aber auch nicht $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$ gilt, liegt in $z = 0$ eine wesentliche Singularität von f vor.

3) Es sei $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$. Für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ist f holomorph.

Die Sinus-Funktion kann bei $n\pi$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. Deshalb kann man die Funktion $g(z) = \dfrac{\sin(z)}{z - n\pi}$ in der Nähe von $n\pi$, aber für $z \neq n\pi$, in folgender Form schreiben:

$$g(z) = \frac{1}{z - n\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - n\pi)^k,$$

wobei $a_0 = \sin(n\pi) = 0$ ist, und $a_1 = \sin'(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Also gilt

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - n\pi)^{k-1}$$

für $z \neq n\pi$ und mit $a_1 = (-1)^n$. Es folgt, dass g in $z = n\pi$ durch $g(n\pi) = (-1)^n \neq 0$ holomorph fortgesetzt werden kann. Dann ist aber die Funktion $h(z) := \dfrac{1}{g(z)}$ in einer Umgebung von $n\pi$ holomorph, mit $h(n\pi) = \pm 1$.

Daraus folgt schließlich, dass die Funktion $\dfrac{1}{\sin(z)} = \dfrac{1}{z - n\pi} \cdot h(z)$ in $z = n\pi$ eine Polstelle erster Ordnung hat. Also hat $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$ in $z = n\pi$ eine Polstelle zweiter Ordnung.