Übungen zur Funktionentheorie 1

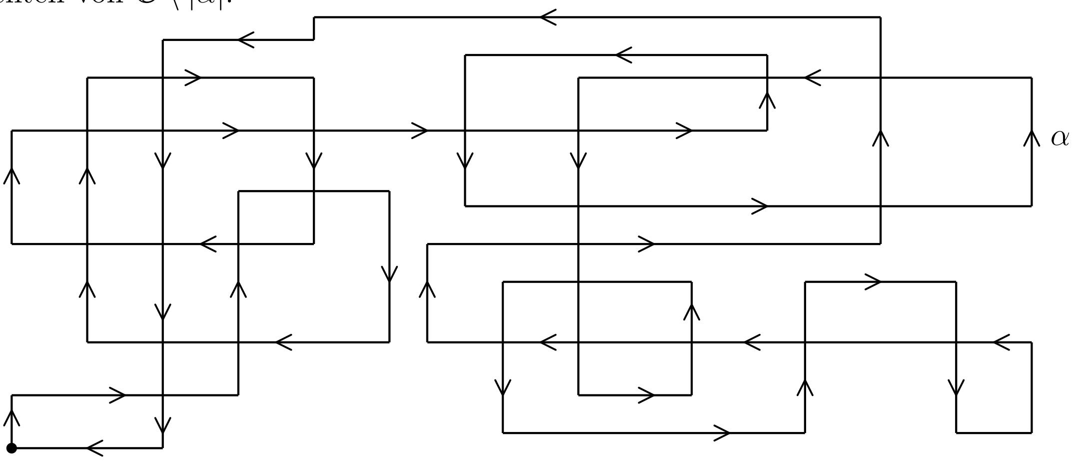
SS 2017 **Blatt 10** **Prof. Fritzsche**

37) $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ seien geschlossene Wege und $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt, so dass $|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - a|$ auf $[0,1]$ gilt. Zeigen Sie, dass $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$ ist

Hinweis: Man benutze den Hilfsweg $\gamma(t) := a + (\gamma_2(t) - a)/(\gamma_1(t) - a)$.

38) a) Sei $0 < r < a$. Bestimmen Sie eine stetige Argumentfunktion längs des Weges $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ mit $\alpha(t) := a + re^{\mathrm{i}\,t}$.

b) Bestimmen Sie in der folgenden Skizze die Umlaufszahlen sämtlicher Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.



39) a) Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0)$ reell und > 0. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $r(t) := |\alpha(t)|$ stetig differenzierbar und $r'(t) > 0$ auf $[0, \varepsilon]$ ist. Zeigen Sie weiter, dass man ε so klein wählen kann, dass man $|\alpha| \cap \overline{D_\varepsilon(0)}$ durch $\widetilde{\alpha} : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{\alpha}(s) := s \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(s)}$ parametrisieren kann, wobei $\varphi : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = \arg \alpha'(0)$ ist.

b) Sei $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha'(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass man mit Hilfe einer biholomorphen Abbildung die Voraussetzungen von (a) herstellen kann.

40) Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Integrationsweg, $t_0 \in (a, b)$ und α glatt in $z_0 := \alpha(t_0)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabe 39, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle δ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$ gilt: $D_\delta(z_0) \setminus |\alpha|$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, und jeder Punkt von $D_\delta(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten. Außerdem trifft die Gerade $L := z_0 + \mathbb{R}\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ die Spur von α im Innern von $D_\delta(z_0)$ nur im Punkt z_0.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 13.07.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 37: Aus der Voraussetzung folgt: $a \notin |\gamma_1|, |\gamma_2|$. Wäre nämlich $a = \gamma_1(t)$, so wäre $|\gamma_2(t) - a| < 0$, und das geht nicht. Wäre $a = \gamma_2(t)$, so wäre $|\gamma_1(t) - a| < |\gamma_1(t) - a|$, und das kann natürlich auch nicht sein.

Nun setze man
$$\gamma(t) := a + \frac{\gamma_2(t) - a}{\gamma_1(t) - a}.$$
Weil $|\gamma_2(t) - a - (\gamma_1(t) - a)| = |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - a|$ ist, ist

$$|\gamma(t) - (a + 1)| = \Big| \frac{\gamma_2(t) - a}{\gamma_1(t) - a} - 1 \Big| < 1 \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

also $|\gamma| \subset D_1(a + 1)$.
Aber $a \in \mathbb{C} \setminus D_1(a+1)$ (denn $|a - (a + 1)| = 1$). Also liegt a in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

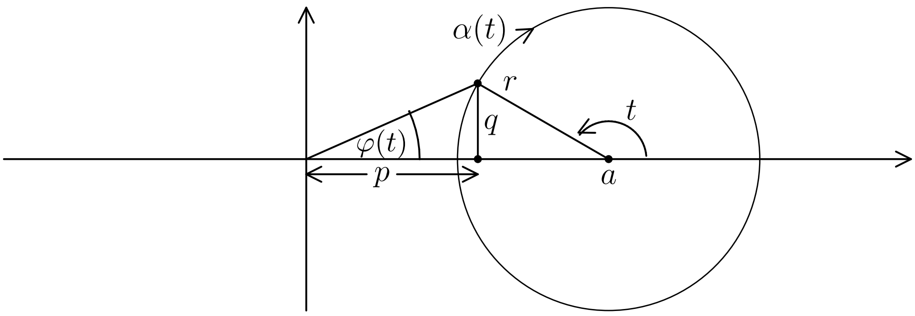
Es ist $\ln(\gamma(t) - a) = \ln(\gamma_2(t) - a) - \ln(\gamma_1(t) - a)$ und deshalb

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} = \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t) - a} - \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - a}.$$

Daraus folgt:

$$0 = n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - a}\, dz = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}\, dt = n(\gamma_2, a) - n(\gamma_1, a).$$

Lösg. zu Afg. 38: a) Die Situation sieht folgendermaßen aus:



Der Punkt $\alpha(t) = a + re^{\mathrm{i}\,t} = (a + r\cos t, r\sin t)$ gehört zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $p := a + r\cos t$ und $q := r\sin t$. Man beachte, dass $\cos(t) < 0$ für $\pi/2 < t < 3\pi/2$ ist, also $p = a + r\cos t < a$ für solche t gilt.

Wird $\alpha(t)$ vom Nullpunkt aus unter dem Winkel $\varphi(t)$ gesehen, so ist $\tan\varphi(t) = q/p = (r\sin t)/(a + r\cos t)$, also

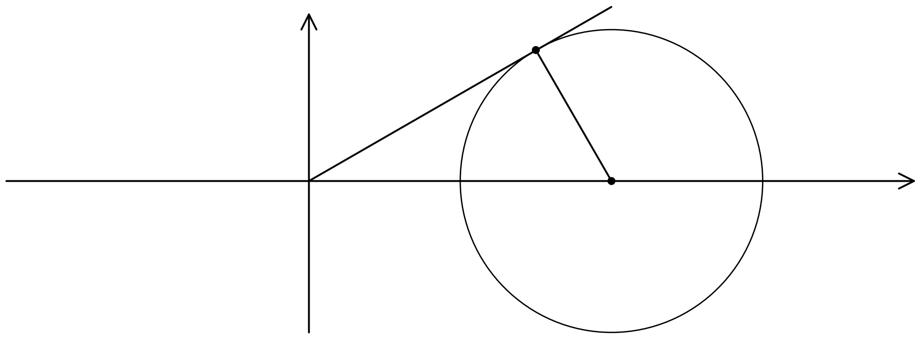
$$\varphi(t) := \arctan\Big(\frac{r\sin t}{a + r\cos t}\Big).$$

Das ist eine stetige Argumentfunktion längs α.

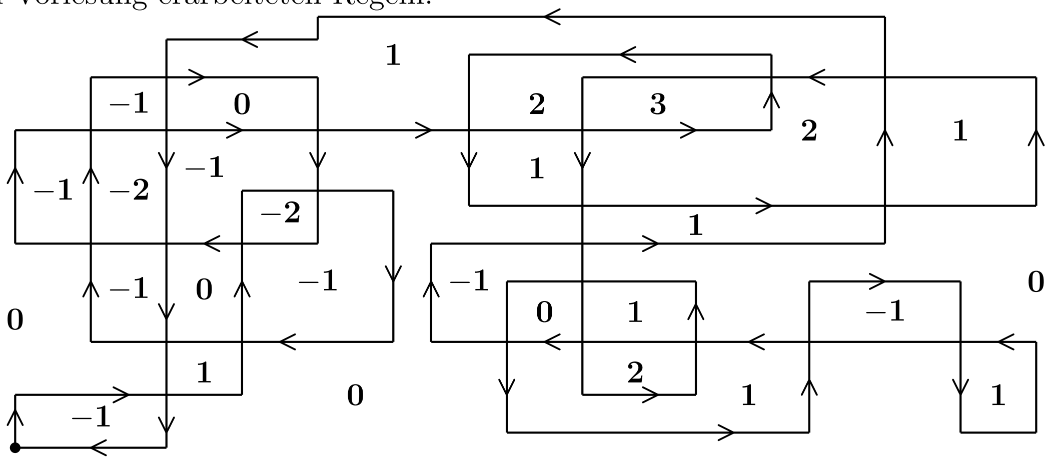
Zum besseren Verständnis noch ein paar Anmerkungen:

Zum Beispiel ist $\alpha(0) = (a + r, 0)$ und $\varphi(0) = 0$, $\alpha(\pi/2) = (a, r)$ und $\varphi(\pi/2) = \arctan(r/a)$. Wenn $r = a$ ist, erhält man $\varphi(\pi/2) = \pi/4$. Es ist $\alpha(\pi) = (a - r, 0)$ und $\varphi(\pi) = 0$, $\alpha(3\pi/2) = (a, -r)$ und $\varphi(3\pi/2) = -\arctan(r/a) = -\varphi(\pi/2)$.

$|\varphi(t)|$ wird maximal, wenn die Gerade durch $\alpha(t)$ und den Nullpunkt genau die Tangente an den Kreis mit Radius r um $(a, 0)$ durch 0 ist. Diese Tangente steht senkrecht auf dem Radius, der a mit $\alpha(t)$ verbindet. Liegt $\alpha(t)$ in der oberen Halbebene, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Ecken 0, a und $\alpha(t)$, der Hypotenuse a und den Katheten r und $|\alpha(t)|$, und es ist $\tan\varphi(t) = r/|\alpha(t)|$.



b) Bestimmung der Umlaufszahlen sämtlicher Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ nach den in Vorlesung erarbeiteten Regeln:



Lösg. zu Afg. 39: a) Weil α **stetig** differenzierbar und $\alpha'(0) \neq 0$ ist, kann man annehmen, dass $\alpha'(t) \neq 0$ für $t \in [0, 1]$ ist. Wir schreiben $\alpha(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$. Dann ist $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) > 0$ und $y'(0) = 0$, und man kann annehmen, dass $x'(t) > 0$ für $t \in [0, 1]$ ist. Sei

$$r(t) := |\alpha(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Für $t \neq 0$ ist r stetig differenzierbar, und außerdem gilt:

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2} \xrightarrow{t \to 0} \sqrt{x'(0)^2 + y'(0)^2} = x'(0).$$

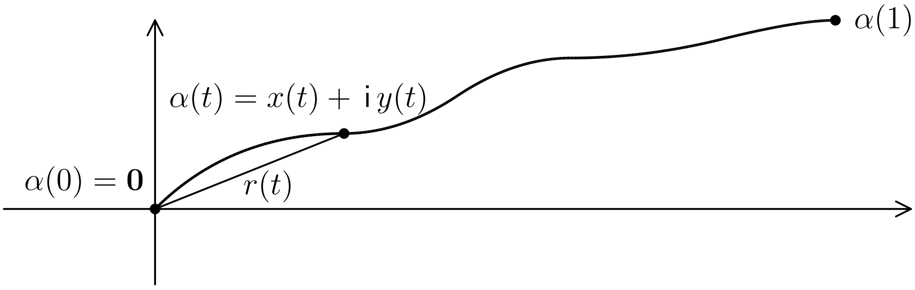
Das bedeutet, dass r auch in $t = 0$ differenzierbar und $r'(0) = x'(0)$ ist. Andererseits gilt für $t \neq 0$:

$$r'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{r(t)} = \frac{\frac{x(t)}{t} \cdot x'(t) + \frac{y(t)}{t} \cdot y'(t)}{\frac{r(t)}{t}},$$

und dieser Ausdruck strebt für $t \to 0$ gegen

$$\frac{x'(0)^2 + y'(0)^2}{x'(0)} = x'(0).$$

Also ist r auf $[0, 1]$ sogar stetig differenzierbar, und wenn $\delta > 0$ klein genug ist, ist $r'(t) > 0$ auf $[0, \delta]$. Damit ist r dort streng monoton wachsend. Setzen wir $\varepsilon := r(\delta)$, so ist $r : [0, \delta] \to [0, \varepsilon]$ bijektiv, und zu jedem ϱ mit $0 \leq \varrho \leq \varepsilon$ gibt es genau ein t mit $0 \leq t \leq \delta$ und $r(t) = \varrho$.



Die Umkehrabbildung $t(s) := r^{-1}(s)$ ist stetig und auch streng monoton wachsend, und es ist $r(t(s)) = s$. Schreibt man $x(t)$ in der Form

$$x(t) = x(0) + t \cdot \Delta(t), \text{ mit } \lim_{t \to 0} \Delta(t) = \Delta(0) = x'(0) > 0,$$

so sieht man, dass auch $x(t) > 0$ für kleines $t > 0$ ist. Daher ist

$$\varphi(s) := \arctan\left(\frac{y(t(s))}{x(t(s))}\right)$$

definiert und stetig für $0 < s < \varepsilon$ (für genügend kleines ε). Mit l'Hospital folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{s \to 0} \varphi(s) = \arctan\left(\frac{y'(0)}{x'(0)}\right) = 0,$$

d.h. $\varphi : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ ist stetig, mit $\varphi(0) = 0 = \arg(\alpha'(0))$. Schreibt man $\alpha(t) = r(t)e^{\mathrm{i}\,\psi(t)}$, mit einer stetigen Argumentfunktion ψ mit $\psi(0) = 0$, so ist

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sin \psi(t)}{\cos \psi(t)} = \tan \psi(t),$$

also $\varphi(s) = \psi(t(s))$. Deshalb ist $\widetilde{\alpha}(s) := \alpha(t(s)) = s \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(s)}$ die gesuchte Parametrisierung der Spur von α.

b) Wendet man eine biholomorphe Abbildung Φ an, so ersetzt man α durch $\Phi \circ \alpha$. Löst man dann das Problem aus (a) für den Weg $\Phi \circ \alpha$ mit Hilfe einer Parametrisierung α^* von $|\Phi \circ \alpha| = \Phi(|\alpha|)$, so parametrisiert $\widetilde{\alpha} := \Phi^{-1} \circ \alpha*$ den ursprünglichen Weg α.

Ist $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha'(0) = re^{\mathrm{i}\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$, so setze man $T(z) := z - z_0$ und $D(w) := e^{-\mathrm{i}\theta} \cdot w$, sowie $\Phi := D \circ T$. Dann ist Φ biholomorph, $\Phi \circ \alpha(0) = \Phi(z_0) = D(0) = 0$ und $(\Phi \circ \alpha)'(0) = D'(0) \cdot T'(z_0) \cdot \alpha'(0) = e^{-\mathrm{i}\theta} \cdot 1 \cdot re^{\mathrm{i}\theta} = r$.

Lösg. zu Afg. 40: O.B.d.A. sei $t_0 = 0$ und $z_0 = 0$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

1. $a \leq -\varepsilon < 0 < \varepsilon \leq b$.

2. $\alpha_l := \alpha|_{[-\varepsilon,0]}$ und $\alpha_r := \alpha|_{[0,\varepsilon]}$ sind stetig differenzierbar und glatt.

Nach Aufgabe 39 kann man ε so klein wählen, dass es stetige Funktionen φ_l und φ_r auf $[0, \varepsilon]$ gibt, so dass gilt: $\widetilde{\alpha_l}(t) := te^{\mathrm{i}\varphi_l(t)}$ parametrisiert $|\alpha_l|$ und $\widetilde{\alpha_r}(t) := te^{\mathrm{i}\varphi_r(t)}$ parametrisiert $|\alpha_r|$. Dabei muss $\varphi_l(0) = \varphi_r(0) + \pi$ gelten, weil die Wege $\widetilde{\alpha_r}$ und $\widetilde{\alpha_l}$ beide bei 0 starten und dort entgegengesetzte Richtung haben.

Ist $\widetilde{\alpha_l}(t) = \widetilde{\alpha_r}(t)$ für ein $t \in (0, \varepsilon]$, so ist $e^{\mathrm{i}(\varphi_l(t) - \varphi_r(t))} = 1$, also $\varphi_l(t) = \varphi_r(t) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für kleines t kann das nicht sein. Also kann man annehmen, dass α auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ injektiv und $\varphi_r(t) < \varphi_l(t) < \varphi_r(t) + 2\pi$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$ ist.

Für $0 < \delta \leq \varepsilon$ definiere man dann:

$$\begin{aligned} C_+(\delta) &:= \{te^{\mathrm{i}s} \mid 0 < t < \delta,\, \varphi_r(t) < s < \varphi_l(t)\}, \\ C_-(\delta) &:= \{te^{\mathrm{i}s} \mid 0 < t < \delta,\, \varphi_l(t) < s < \varphi_r(t) + 2\pi\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $D_\delta(0) = C_-(\delta) \cup C_+(\delta) \cup \big(D_\delta(0) \cap |\alpha|\big)$ eine Zerlegung von $D_\delta(0)$ in drei disjunkte Teilmengen. $C_-(\delta)$ und $C_+(\delta)$ sind homöomorphe Bilder von offenen Rechtecken und damit Gebiete in $\mathbb{C}$. Damit ist aber auch klar, dass diese Gebiete die beiden einzigen Zusammenhangskomponenten von $D_\delta(0) \setminus |\alpha|$ sind. Offensichtlich liegt $D_\delta(z_0) \cap |\alpha|$ im Rand beider Komponenten.

Ist $v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$, so bewirkt die Multiplikation von v mit i eine Linksdrehung um 90°. $L = z_0 + \mathbb{R}\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ trifft $|\alpha|$ in z_0 also unter einem rechten Winkel.

Es sei (o.B.d.A.) vorausgesetzt, dass $t_0 = 0$, $z_0 = 0$ und $\alpha'(0) = 1$ ist. Annahme, $\exists\, s_n \in (-\delta, \delta)$ mit $s_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ und $s_n\,\mathrm{i} \in |\alpha| \cap D_\delta(0)$. Dann $\exists\, t_n \in (-\delta, \delta)$ mit $\alpha(t_n) = s_n\,\mathrm{i}$ Die beschränkte Folge t_n besitzt einen Häufungspunkt, o.B.d.A. konvergiere t_n gegen eine Zahl t^*. Dann konvergiert $s_n\,\mathrm{i} = \alpha(t_n)$ gegen $\alpha(t^*)$. Also ist $\alpha(t^*) = 0$, und weil α injektiv ist, ist $t^* = 0$ und $t_n \neq 0$ für alle n. Dann folgt:

$$1 = \alpha'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(t_n)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n\,\mathrm{i}}{t_n} = \mathrm{i} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n},$$

und die rechte Seite ist $= 0$ oder rein imaginär. Das ist ein Widerspruch.