Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 9** **Prof. Fritzsche**

33) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph auf G, $r > 0$, $z_0 \in G$ und $D_r = D_r(z_0) \subset\subset G$. Zeigen Sie:

$$|f''(z_0)| \leq \frac{2}{r^2} \max_{\partial D_r} |f|.$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) = f(z+1) = f(z + \mathsf{i}\,)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss.

34) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $D = D_1(0) \subset\subset G$. Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und habe in D zwei Nullstellen z_1, z_2 mit Nullstellenordnung $k_1, k_2 > 0$. Für $z \neq z_1, z_2$ sei $f(z) \neq 0$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = k_1 + k_2.$$

b) Sei $f(z) := 1 + z^2$. Bestimmen Sie explizit das Maximum von $|f(z)|$ auf $\overline{D_1(0)}$.

35) Gibt es holomorphe Funktionen $f_1, f_2, f_3 : D = D_1(0) \to \mathbb{C}$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften erfüllen?

$$\begin{aligned} f_1(1/n) = f_1(-1/n) &= 1/n^3, \\ f_2(1/n) &= n/(n+1) \\ \text{und} \quad f_3(1/n) &= \big(1 + (-1)^n\big)/2. \end{aligned}$$

36) Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Gibt es Konstanten a, b, so dass $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

Hinweis: Man kann vielleicht Induktion nach k führen. Mit f ist auch der Differenzenquotient von f im Nullpunkt eine ganze Funktion.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 06.07.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 33: a) Es ist

$$\begin{aligned}
|f''(z_0)| &= \Big| \frac{2}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3}\, d\zeta \Big| \\
&\le \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f| \\
&= \frac{2}{r^2} \max_{\partial D_r(z_0)} |f|.
\end{aligned}$$

b) Da f auf $P := \{x + \mathsf{i}\,y \,:\, 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le 1\}$ beschränkt ist und sich die Werte wiederholen, ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt und nach Liouville konstant.

Lösg. zu Afg. 34: a) Nach dem Satz über Nullstellen von holomorphen Funktionen gibt es eine Darstellung

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} g(z),$$

mit einer holomorphen Funktion g auf G mit $g(z_1) \ne 0$ und $g(z_2) \ne 0$. Dann ist aber $g(z) \ne 0$ für alle $z \in G$, sowie

$$f'(z) = k_1(z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2} g(z) + k_2(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2-1} g(z) + (z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2} g'(z)$$

und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1}{z - z_1} + \frac{k_2}{z - z_2} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,.$$

Diese Funktion ist auf ∂D holomorph. Also kann das Integral berechnet werden:

$$\int_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = k_1 \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z_1} + k_2 \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z_2} + \int_{\partial D} \frac{g'(\zeta)\, d\zeta}{g(\zeta)} = 2\pi\,\mathsf{i}\,(k_1 + k_2),$$

denn der Integrand im letzten Integral ist auf ganz G holomorph.

b) Es sei $f(z) = 1 + z^2$ und $D := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \le 1\}$. f ist holomorph auf $\overline{D} = D$, und D ist beschränkt. Nach dem Maximumprinzip nimmt $|f|$ auf dem Rand $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ sein Maximum an. Ein Punkt $z \in \partial D$ hat die Gestalt $z = e^{\mathsf{i}\,t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Für diese z gilt:

$$\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= |1 + z^2|^2 \;=\; |1 + e^{\mathsf{i}\,2t}|^2 \\
&= (1 + \cos(2t))^2 + \sin(2t)^2 \\
&= 2 + 2\cos(2t).
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für $t = 0$, $t = \pi$ und $t = 2\pi$ maximal, also nimmt $|f(z)|$ in $z = e^{\mathsf{i}\,\pi} = -1$ und $z = e^0 = e^{2\pi\,\mathsf{i}} = 1$ jeweils ein Maximum an (nämlich den Wert $|f(z)| = 2$).

Lösg. zu Afg. 35: Hier geht es natürlich um den Identitätssatz.

a) Da $f_1(1/n) = 1/n^3$ und f_1 in 0 stetig ist, muss $f_1(0) = \lim_{n\to\infty} f_1(1/n) = \lim_{n\to\infty} 1/n^3 = 0$ sein. Durch die Werte auf $M := \{0\} \cup \{1/n \,:\, n \ge 2\}$ ist f_1 eindeutig bestimmt (Identitätssatz). $g(z) = z^3$ hat auf M die gleichen Werte, also muss $g = f_1$ sein. Aber dann ist $f_1(-1/n) = -1/n^3$. Widerspruch! f_1 gibt es nicht.

b) Es soll $f_2(1/n) = n/(n+1) = 1/(1+1/n)$ sein. Das leistet die Funktion $f_2(z) = 1/(1+z)$.

c) Es soll gelten:

$$f_3\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2}\big(1+(-1)^n\big) = \begin{cases} 1 & \text{für gerades } n, \\ 0 & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Aber dann ist f_3 im Nullpunkt nicht stetig. Ein holomorphes f_3 kann nicht existieren.

Lösg. zu Afg. 36: Man führe Induktion nach k.

Der Fall $k = 0$ ist nichts anderes als der Satz von Liouville.

Schluss von $k-1$ nach k: Sei $|f(z)| \le a + b|z|^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Sei $g(z) := \begin{cases} \big(f(z) - f(0)\big)/z & \text{für } z \ne 0, \\ f'(0) & \text{für } z = 0. \end{cases}$

Dann ist g eine ganze Funktion, und es gilt:

$$|g(z)| \le \frac{|f(z)| + |f(0)|}{|z|} \le \frac{a + b|z|^k + |f(0)|}{|z|}.$$

Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass $|g(z)| \le C$ für $|z| \le 1$ ist.

Für $|z| > 1$ ist $1/|z| < 1$ und deshalb

$$|g(z)| \le a + |f(0)| + b|z|^{k-1}.$$

Ist $c := \max(C, a + |f(0)|)$, so folgt:

$$|g(z)| \le c + b|z|^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist g ein Polynom vom Grad $\le k-1$. Also ist $f(z) = f(0) + z \cdot g(z)$ ein Polynom vom Grad $\le k$.